Submetido para TEMA

Otimização de Redes de Distribuição de Água com Estações de Bombeamento

C. H. DIAS[1], F. A. M. GOMES[2], Departamento de Matemática Aplicada, IMECC UNICAMP, 13081-970, Campinas, SP, Brasil.

Resumo. Neste artigo, apresentamos um novo método para a otimização de redes de distribuição de água com estações de bombeamento. O método é uma adaptação do algoritmo de Hansen, Madsen e Nielsen [*Math. Programming*, **52** (1991), 45-58]. Nele, o problema não linear inteiro original é aproximado, a cada iteração, por um problema de programação linear com região de confiança em forma de caixa. Os valores reais assim obtidos são convertidos para soluções inteiras adjacentes, garantindo-se que as restrições sejam satisfeitas. Os resultados numéricos indicam que o algoritmo é eficiente.

1. Introdução

Uma rede de distribuição de água é um grafo $G = \{V, A\}$ no qual os m arcos que formam o conjunto A representam os canos e os n nós (ou vértices) que compõem V estão associados aos consumidores (casas, indústrias, etc) e aos fornecedores de água (caixas d'água, estações de tratamento, etc). Em um problema de otimização de redes de distribuição, o comprimento e a posição dos canos é conhecida e tem-se como objetivo a determinação dos seus diâmetros de modo a minimizar o custo de implantação da rede, mantendo a pressão nos nós acima de um determinado limite e satisfazendo a demanda dos consumidores.

Dependendo da topografia do local e da disposição das caixas d'água, pode ser necessário introduzir bombas no sistema para garantir a pressão mínima em todos os pontos da rede. Neste caso, devemos considerar como um objetivo adicional a minimização dos gastos com as bombas.

A otimização de uma rede é um problema difícil de resolver porque alguns poucos diâmetros de canos estão disponíveis comercialmente, de modo que as variáveis do problema são inteiras. Além disso, a função custo e algumas das restrições são não lineares.

Vejamos como formular esse problema, analisando primeiramente o caso em que não há bombas.

[1]henrique@ime.unicamp.br.
[2]chico@ime.unicamp.br.

1.1. Formulação do problema de otimização de redes

Se desconsideramos a possibilidade de utilizar estações de bombeamento na rede de água, as únicas variáveis do nosso problema são os diâmetros dos canos $d_i,\ i = 1, \ldots, m$. Essas variáveis podem assumir apenas os valores discretos $\bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_{nd}$ dos nd diâmetros disponíveis no mercado. Denominaremos D o conjunto dos diâmetros tabelados.

A cada diâmetro comercial $\bar{d}_i$, associamos um custo por unidade de comprimento do cano, $c(\bar{d}_i)$. Como desprezamos o custo das conexões, a função objetivo do nosso problema é dada simplesmente por

$$\min_{d \in D}\ F(d) \equiv \sum_{i=1}^{m} \ell_i c(d_i), \tag{1.1}$$

onde ℓ_i é o comprimento do cano i.

As restrições do problema devem refletir as características físicas da rede e as exigências de projeto. A primeira condição que vamos apresentar é a da continuidade da vazão nos nós da rede.

Suponhamos que A_j seja o conjunto dos canos conectados ao nó j e que q_x seja a vazão (constante) em cada cano $x \in A_j$. Neste caso, considerando que a água é um líquido incompressível, podemos dizer que a soma do fluxo de água que entra e do fluxo que sai do nó j deve ser zero, o que representamos por

$$\sum_{x \in A_j} s_x q_x = Q_j,\ j = 1, \ldots, n, \tag{1.2}$$

onde Q_j é a vazão externa (de suprimento ou consumo) do nó j e s_x é igual a 1 se a água chega ao nó j pelo cano x e -1 se ela sai do nó por este cano.

Um segundo tipo de restrição está associado à perda de energia nos canos. Observa-se que, quando um fluido atravessa um cano, parte da energia total é convertida em energia térmica devido ao atrito interno e à turbulência. Essa perda de energia, que também denominamos *perda de carga*, é habitualmente calculada com o auxílio de fórmulas empíricas que levam em conta, dentre outros fatores, a rugosidade média das paredes do cano.

A fórmula de Hazen-Williams é uma das equações mais comumente usadas para descrever a perda de carga. Para um cano x que conecta os nós i e j da rede, essa fórmula diz que

$$h_i - h_j = R_x \ell_x d_x^{-4{,}87} q_x |q_x|^{0{,}852}, \tag{1.3}$$

onde h_i e h_j são, respectivamente, os valores das cargas nos nós i e j, q_x é a vazão no cano, supondo que o fluido se move de i a j, e R_x é uma constante que depende do material do qual o cano é feito. Os valores constantes apresentados em (1.3) são aqueles utilizados quando se trabalha com o sistema internacional de unidades.

Observando as equações (1.3) e (1.2), constatamos que os vetores de cargas h e de vazões q dependem dos diâmetros adotados, de modo que, em nosso problema, as componentes desses vetores devem ser tratadas como variáveis auxiliares.

Apesar do sistema composto por (1.3) e (1.2) ter $n+m$ equações e $n+m$ incógnitas, apenas $n-1$ das n equações de continuidade são linearmente independentes, de modo que é preciso supor conhecida a carga em um nó qualquer para que o sistema $n+m-1$ remanescente tenha solução única.

Para completar as restrições do problema, devemos exigir que a pressão em cada nó seja superior ao mínimo estipulado no projeto. Temos, assim,

$$h_j \geq h_j^{min}, \; j = 1, \ldots, n, \tag{1.4}$$

onde h_j^{min} é a carga mínima admissível no nó j.

2. O algoritmo de Hansen, Madsen e Nielsen

Um método eficiente para determinar o vetor ótimo de diâmetros para uma rede sem bombas foi proposto por Hansen, Madsen e Nielsen [2]. Este método baseia-se na programação linear seqüencial com regiões de confiança do tipo caixa.

A cada iteração k, supomos conhecido um vetor de diâmetros $d^{(k)} \in D$. De posse desse vetor, usamos as equações (1.3) e (1.2) para determinar $h(d^{(k)})$ e $q(d^{(k)})$, que representamos aqui como funções de d. A partir desses dados, linearizamos o problema (1.1-1.4), obtendo, assim, um novo problema apenas em Δd:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\Delta d} & L(\Delta d) \equiv a^T \Delta d + F(d) \\ \text{suj. a} & h_j'(d)^T \Delta d + h_j(d) \geq h_j^{min}, \; j = 1, \ldots, n, \\ & \bar{d}_i^{ant} \leq d_i + \Delta d_i \leq \bar{d}_i^{pos}, \; i = 1, \ldots, m, \end{array} \tag{2.1}$$

onde o índice k foi suprimido para facilitar a notação.

Como se observa, neste problema linear, tratamos Δd como um vetor real. A última restrição pode ser interpretada como uma região de confiança do tipo caixa. Ela indica que só podemos variar os diâmetros dos canos para os valores adjacentes na lista ordenada de diâmetros disponíveis comercialmente ($\bar{d}_i^{ant}$ é o diâmetro anterior e $\bar{d}_i^{pos}$ é o diâmetro posterior a d_i nessa lista).

A solução desse problema é um vetor $d^+ = d^{(k)} + \Delta d$, cujas componentes não precisam ser inteiras. Para obter uma solução $d^{(k+1)}$ factível para o problema original, os diâmetros d^+ são ajustados aos valores tabelados de forma que as restrições (1.2-1.4) sejam satisfeitas. Se $F(d^{(k+1)}) < F(d^{(k)})$, iniciamos uma nova iteração. Caso contrário, o algoritmo é interrompido e tomamos $d^{(k)}$ como solução ótima aproximada.

3. Redes com bombas

A inclusão de bombas nas redes de distribuição tem como função aumentar a carga em determinados pontos da rede, de forma que sejam atendidas as exigências de carga mínima nos nós de demanda. Ela pode ser necessária, por exemplo, quando a topografia da cidade exige que se transporte água a pontos elevados.

Em um problema com bombas, o objetivo é determinar não apenas os diâmetros dos canos, mas também as cargas que as bombas vão fornecer ao sistema, de modo a minimizar os custos.

Na modelagem que adotamos para uma rede desse tipo, cada bomba é representada por um arco de comprimento nulo que liga dois nós fictícios, como ilustrado na Figura 1. Os dois nós possuem demanda externa igual a zero. Além disso, supomos que as vazões das bombas, assim como o sentido do fluxo da água no arco são constantes.

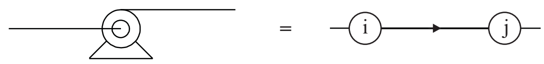

Figura 1: Representação de uma bomba.

Nesse arco artificial, em lugar de haver perda de carga entre os nós i e j, há um ganho correspondente à carga fornecida pela bomba. Desta forma, para um arco y (de comprimento nulo) com bomba, a variação da carga é dada simplesmente por

$$h_i - h_j = -h_{e_y} \tag{3.1}$$

onde i e j são, respectivamente, o nó a montante e o nó a jusante da bomba, e h_{e_y} representa o ganho de carga fornecido pela bomba. O termo do lado direito tem sinal negativo, indicando que a carga aumenta de i para j.

Como, para cada bomba, introduzimos dois nós fictícios na rede, o número de equações de continuidade da vazão é maior no novo problema. Contudo, para um nó j pertencente a um conjunto bomba, a demanda externa é nula, de modo que as novas equações têm a forma

$$\sum_{x \in A_j} s_x q_x = 0. \ j = n+1, \ldots, n+2n_e. \tag{3.2}$$

Na formulação do novo problema, supomos que os nós consumidores são numerados de 1 a n_c, os nós fornecedores são numerados de n_c+1 a n e os nós fictícios das bombas correspondem aos índices $n+1$ a $n+2n_e$, onde n_e é o número (prefixado) de bombas do sistema. Os canos artificiais associados às bombas recebem numeração de $m+1$ a $m+n_e$.

Se as vazões nas bombas forem consideradas como variáveis, o problema admitirá infinitas soluções ótimas. Assim, supomos que essas vazões são dadas e que somente os diâmetros dos canos originais da rede, $d_1, \ldots, d_m$ e as cargas proporcionadas pelas bombas, $h_{e_{m+1}}, \ldots, h_{e_{m+n_e}}$, devem ser determinadas. As primeiras variáveis são inteiras, enquanto as demais são reais.

Os nós fictícios relacionados às bombas devem satisfazer uma restrição de carga mínima equivalente a (1.4). Além disso, as cargas adicionadas ao sistema pelas bombas estão limitadas superiormente, de modo que temos as restrições adicionais

$$h_j \geq h_j^{min}, \qquad j = 1, \ldots, n+2n_e, \tag{3.3}$$

$$h_{e_i} \leq h_{e_i}^{max}, \qquad i = 1, \ldots, n_e. \tag{3.4}$$

Observe que o vetor h está relacionada aos nós, enquanto h_e está relacionado aos arcos.

Finalmente, no novo problema, devemos incluir, na função objetivo, dois novos termos. O primeiro deles está relacionado ao custo de aquisição das bombas, enquanto o segundo está associado à operação destas. Como o número de tipos e tamanhos de bombas disponíveis no mercado é fixo, deveríamos usar, em nosso modelo, uma variável inteira para representar a bomba escolhida. Entretanto, como o custo de operação da bomba domina os gastos com esse equipamento e varia quase continuamente com o aumento de carga exigido, preferimos omitir essas variáveis inteiras e seguir a proposta de Kessler e Shamir [3], substituindo (1.1) por

$$\min_{d \in D,\, h_e} \; F(d, h_e) \equiv \sum_{i=1}^{m} \ell_i c(d_i) + \sum_{i=1}^{n_e} \left(c_{p_i} q_i^{\gamma} h_{e_i}^{-\delta} + c_{hp_i} q_i h_{e_i} \right) \tag{3.5}$$

onde c_{p_i} é uma constante associada ao custo de aquisição e c_{hp_i} é uma constante relacionada ao custo de operação da bomba i ao longo do horizonte de projeto. Os parâmetros γ e δ devem ser determinados empiricamente, de acordo com as características das bombas utilizadas.

O problema de otimização com bombas é, assim, descrito pela função objetivo (3.5) e pelas equações (1.2), (3.2), (1.3), (3.1), (3.3) e (3.4).

4. Algoritmo adaptado para redes com bombas

Queremos ajustar o método de Hansen, Madsen e Nielsen de forma que ele seja capaz de resolver o novo modelo com bombas. Para tanto, é preciso alterar o problema (2.1), o que é feito pela adição, à função objetivo, de um termo linear na forma $a_e^T \Delta h_e$ e pela inclusão das restrições (3.4). O problema resultante, que tem como variáveis Δd e Δh_e, é apresentado abaixo.

$$\begin{array}{ll}
\displaystyle\min_{\Delta d,\, \Delta h_e} & \Gamma(\Delta d, \Delta h_e) \equiv a^T \Delta d + a_e^T \Delta h_e + F(d, h_e) \\
\text{suj. a} & h_j'(d, h_e)^T \begin{bmatrix} \Delta d \\ \Delta h_e \end{bmatrix} + h_j(d, h_e) \geq h_j^{min}, \; j = 1, \ldots, n + 2n_e, \\
& h_{e_i} + \Delta h_{e_i} \leq h_{e_i}^{max}, \; i = 1, \ldots \; n_e, \\
& \bar{d}_i^{ant} \leq d_i + \Delta d_i \leq \bar{d}_i^{pos}, \; i = 1, \ldots, m, \\
& -\epsilon \leq h_{e_i} + \Delta h_{e_i} \leq \epsilon, \; i = 1, \ldots, n_e.
\end{array} \tag{4.1}$$

A última restrição deste problema é uma região de confiança para Δh_e. O parâmetro ϵ não varia entre iterações, de modo que sua escolha deve ser feita de forma criteriosa, com base a curva que relaciona a carga da bomba ao seu custo.

Nesse problema, as componentes do vetor a são determinadas ajustando-se, para cada cano i, uma reta aos pontos definidos por $\bar{d}_i^{ant}$, d_i e $\bar{d}_i^{pos}$. Já o elemento i do vetor a_e é obtido ajustando-se uma reta aos pontos correspondentes a $h_{e_i} - \epsilon$, h_{e_i} e $h_{e_i} + \epsilon$.

Uma vez resolvido o problema (4.1), é preciso aproximar os novos diâmetros $d^+ = d + \Delta d$ para os valores disponíveis no mercado, tomando-se o cuidado de não permitir que as cargas mínimas nos nós (3.3) e as cargas máximas nas bombas (3.4) sejam violadas. Entretanto, à diferença do que ocorria no algoritmo original, agora também é possível usar as bombas para evitar que a solução fique infactível.

Na prática, o primeiro ajuste é feito simplesmente arredondando as componentes do vetor d^+ para os valores tabelados mais próximos. Se esse processo fornece uma solução factível, adotamo-la. Já no caso provável de algumas cargas estarem fora de seus limites, precisamos decidir se é necessário aumentar alguns diâmetros ou se é mais conveniente aumentar diretamente a carga de uma ou mais bombas. Para resolver esse novo problema, aplicamos um algoritmo que consiste em:

1. Localizar a restrição j que mais é violada.

2. Denominando d_a o vetor de dimensão $m + n_e$ composto pelas componentes de d^+ e h_e^+, calcular o vetor h'_j, cujo i-ésimo elemento é dado por

$$h'_{ji} = \begin{cases} \frac{\partial h_j}{\partial d_i}(d_a), & \text{se } \; i \leq m, \\ \frac{\partial h_j}{\partial h_{e_{(i-m)}}}(d_a), & \text{se } \; i > m. \end{cases}$$

3. Utilizando as derivadas definidas acima e o gradiente da função custo linearizada, determinar o diâmetro ou carga de bomba que provoca o maior aumento em h_j por unidade monetária.

4. Substituir o diâmetro selecionado pelo imediatamente maior na lista de diâmetros comerciais, ou aumentar a carga da bomba em ϵ.

5. Repetir o processo até que nenhuma carga esteja fora dos limites.

Uma vez definida a estratégia de obtenção de uma nova solução inteira, podemos descrever o algoritmo para redes com bombas. Para tanto, vamos supor que uma aproximação inicial da solução seja dada e que os diâmetros fornecidos pertençam ao conjunto de diâmetros comerciais. Assim, definindo $k = 0$, temos:

1. REPETIR
1.1. Obter $\Delta d^{(k)}$ e $\Delta h_e^{(k)}$ resolvendo (4.1).
1.2. Fazer $d^+ \leftarrow d^{(k)} + \Delta d^{(k)}$ e $h_e^+ \leftarrow h_e^{(k)} + \Delta h_e^{(k)}$.
1.3. Obter d^{++} tabelado e h_e^{++} ajustando d^+ e h_e^+.
1.4. SE $F(d^{++}, h_e^{++}) < F(d^{(k)}, h_e^{(k)})$, ENTÃO
1.4.1. $k \leftarrow k + 1$, $d^{(k)} \leftarrow d^{++}$, $h_e^{(k)} \leftarrow e_e^{++}$.
1.5. SENÃO parar.
2. FIM REPETIR

Na próxima seção, veremos o resultado da aplicação desse método a um problema prático.

5. Exemplo numérico

Para exemplificar a aplicação do algoritmo acima descrito, resolvemos o problema que consiste em determinar os diâmetros, a carga da bomba e a altura da caixa d'água da rede apresentada na Figura 2, de forma a minimizar o custo de construção e operação.

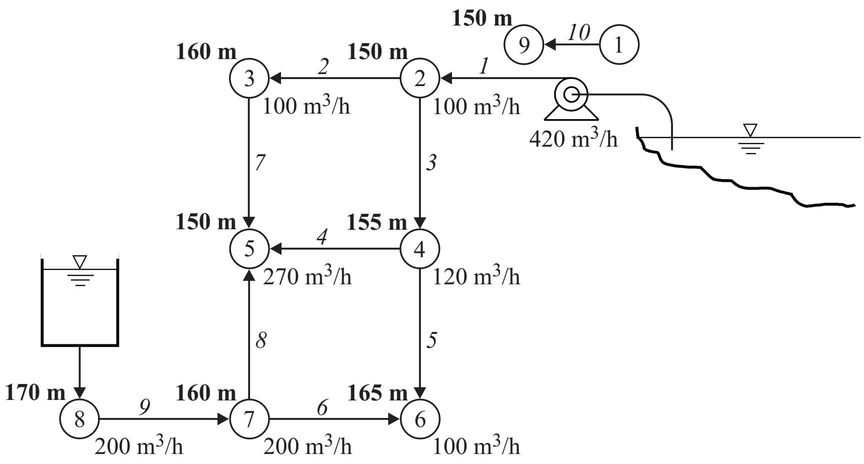

Figura 2: A rede do exemplo.

Nessa figura, a numeração dos arcos aparece em itálico e a cota do terreno em cada nó é dada em negrito. Como se observa, o reservatório, ou caixa d'água, é representado pelo nó 8 e a estação de bombeamento foi substituída pelo arco 10. Os nós 2 a 8 são consumidores e possuem vazão de demanda fornecida em m^3/h. Já para a bomba e o reservatório, a vazão é de oferta.

A carga mínima admissível em cada nó é de $30m$ acima do nível topográfico. Os diâmetros disponíveis com seus respectivos custos encontram-se na Tabela 1.

Admitimos que os canos são de PVC. As constantes relacionadas aos custos da bomba são $CP = 2$ (custo de aquisição) e $CHP = 950$ (custo de operação). Inicialmente, usamos diâmetros iguais a $10\,pol = 0.254\,m$ em todos os canos, consideramos todas as vazões equivalentes a $200\,m^3/h = 55,55.10^{-3}\,m^3/s$, e assumimos que as cargas valem $200\,mca$ (metros de coluna d'água) em todos os nós. Para a bomba, admitimos uma carga inicial de $70\,mca$ e uma variação máxima de carga por iteração de $5\,mca$.

Tabela 1: Diâmetros disponíveis e seus custos.

Diâmetro (pol)	1	2	3	4	6	8	10
Custo ($/m)	2	5	8	11	16	23	32
Diâmetro (pol)	12	14	16	18	20	22	24
Custo ($/m)	50	60	90	130	170	220	300

O algoritmo foi implementado no pacote computacional Matlab. Os diâmetros finais obtidos são fornecidos na Tabela 2. A carga final da bomba foi de $60m$. Os gráficos fornecidos pelo programa são mostrados na Figura 3.

Tabela 2: Diâmetros ótimos.

Cano	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Diâmetro (pol)	10	8	8	6	6	8	6	6	6

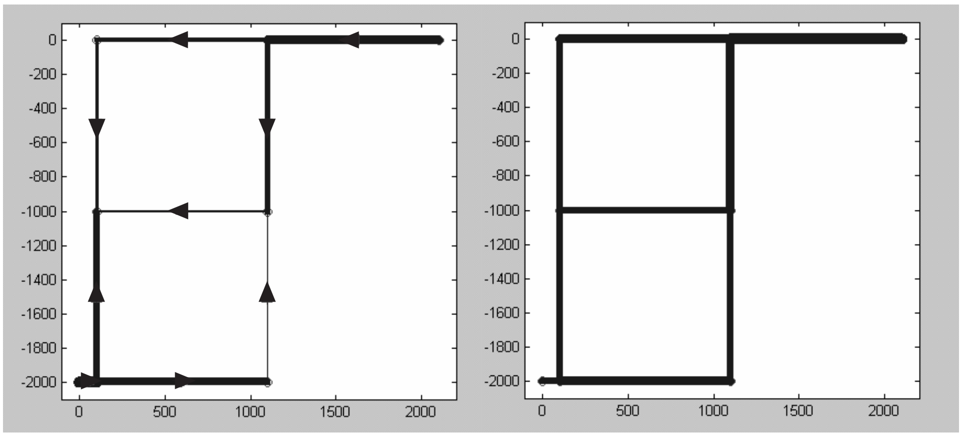

Figura 3: Solução do problema. À esquerda, as vazões. À direita, os diâmetros.

Alguns outros problemas clássicos da literatura, adaptados pela inclusão de bombas, também foram resolvidos. Os resultados foram comparados àqueles obtidos aplicando-se o algoritmo genético proposto por Savic e Walters [4], também adaptado para a otimização de redes de distribuição com bombas. De uma forma geral, o desempenho do método descrito acima foi bastante satisfatório. As soluções por ele encontradas se aproximaram bastante daquelas fornecidas pelo método de Savic e Walters, tendo sido obtidas em tempo muito menor que o consumido pelo algoritmo genético.

Apesar do método de Kessler e Shamir [3] ter sido desenvolvido para a otimização de redes com bombas, não foi possível comparar seus resultados aos aos encontrados pelos demais algoritmos, uma vez que esse método utiliza variáveis contínuas para representar os diâmetros dos canos. O expediente usado por Kessler e Shamir para obter diâmetros comerciais ao final da otimização consiste em dividir cada cano em uma seqüência de dois ou mais canos, de diâmetros diferentes, conectados. Embora isso permita a obtenção de soluções com custo mais baixo, essas soluções não costumam ser empregadas na prática, o que compromete os resultados assim obtidos.

Naturalmente, a solução encontrada pelo método acima descrito depende do ponto inicial escolhido, de modo que uma configuração final levemente diferente pode ser encontrada se partirmos de um outro conjunto de diâmetros. Deve-se notar, entretanto, que fato semelhante acontece com os algoritmos genéticos, que podem chegar a soluções diferentes quando se altera a população inicial ou o gerador de números aleatórios.

6. Conclusão

O problema de otimização de redes de canos é composto por uma função objetivo e por restrições não lineares e envolve variáveis inteiras, sendo, portanto, extremamente difícil de resolver. Uma vez que não há um algoritmo que seja veloz e que tenha convergência assegurada ao ótimo global do problema, os métodos capazes de obter soluções próximas do ótimo são de grande valia.

Neste quadro, a nova formulação do problema com bombas e a adaptação do método de Hansen, Madsen e Nielsen aqui propostas mostraram-se bastante eficientes, podendo ser consideradas uma boa alternativa para a solução de problemas nos quais os reservatórios, sozinhos, são incapazes de garantir a pressão mínima nos nós consumidores.

Os resultados encontrados são comparáveis àqueles determinados por outros métodos específicos para otimização de redes, e o tempo gasto na obtenção da solução é consideravelmente menor. Ainda que só tenhamos resolvido problemas com poucos arcos, a aplicação do algoritmo a redes de grande porte não apresenta dificuldades.

Possíveis aprimoramentos do método, a serem testados em um futuro próximo, envolvem o uso de uma função quadrática para aproximar a função objetivo original e o emprego de uma estratégia não monótona para a aceitação dos novos diâmetros.

Abstract. This paper describes a new method for optimal design of pipe newtworks with pumps. The method is derived from the algorithm proposed by Hansen, Madsen e Nielsen [*Math. Programming*, **52** (1991), 45-58]. At each iteration of the algorithm, the original integer nonlinear problem is approximated by a linear programming problem with an additional box-shaped trust region. The real solution obtained is converted to a nearby integer solution in such a way that that constraints are not violated. Numerical results suggest that the algorithm is efficient.

Referências

[1] P.R. Bhave, "Analysis of flow in water distribution networks", Technomic, Lancaster, 1991.

[2] C.T. Hansen, K. Madsen e H.B. Nielsen, Optimization of pipe networks, *Math. Programming*, **52** (1991), 45-58.

[3] A. Kessler e U. Shamir, Decomposition technique for optimal design of water supply networks, *Engineering Optimization*, **17** (1991), 1-19.

[4] D.A. Savic e G.A. Walters, Genetic algorithms for least-cost design of water distribution networks, *Journal of water resources planning and management*, ASCE, **123** (1997), 67-77.