Sobre a Função de Mittag-Leffler

R. Figueiredo Camargo
Departamento de Matemática
Imecc – Unicamp
13081-970 Campinas, Brasil

E. Capelas de Oliveira
Depto. de Matemática Aplicada
Imecc – Unicamp
13081-970 Campinas, Brasil

Ary O. Chiacchio
Departamento de Matemática
Imecc – Unicamp
13081-970 Campinas, Brasil

Resumo

A chamada função de Mittag-Leffler pode ser interpretada como uma possível generalização da função exponencial. Como uma aplicação desta função destaca-se o estudo de equações diferenciais fracionárias onde as soluções, em geral, funções transcendentes, podem ser conduzidas a uma função de Mittag-Leffler.

Neste trabalho apresentam-se, além de várias propriedades, relações de recorrência, função geratriz e relações com outras funções especiais, em particular, as funções hipergeométricas confluentes. Enfim, mostra-se que a função erro é um caso particular da função de Mittag-Leffler. Problemas de aplicação são apresentados e discutidos.

Introdução

Há um pouco mais de cem anos Mittag-Leffler introduziu uma função, hoje conhecida pelo nome de função de Mittag-Leffler, como sendo uma possível generalização da função exponencial.[1] Esta função depende apenas de um parâmetro, em geral, um parâmetro real ou complexo. Desde então, passados mais cinqüenta anos Agarwal[2] generalizou a função de Mittag-Leffler a partir da introdução de um outro parâmetro; esta generalização é conhecida como função de Mittag-Leffler com dois parâmetros. No caso particular deste segundo parâmetro ser igual à unidade, recupera-se a clássica função de Mittag-Leffler.

Várias relações envolvendo a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros foram apresentadas e discutidas por Argawal-Humbert[3] a partir da técnica da transformada de Laplace. Srivastava[4] efetuou um estudo sistemático da função de Mittag-Leffler conforme proposta por Humbert-Delerue[5], isto é, a generalização simétrica da função de Mittag-Leffler com duas variáveis. Neste trabalho, são obtidas relações com outras funções conhecidas, equações diferenciais e integrais do tipo Hankel.

Vamos nos concentrar na função de Mittag-Leffler com dois parâmetros devido, por exemplo, à sua vasta aplicabilidade no estudo de equações diferenciais fracionárias. São muitos os problemas onde o chamado cálculo integrodiferencial fracionário tem a sua utilidade como, por exemplo, em problemas do estado sólido[6] e em problemas advindos da engenharia[7] dentre outros.

Aqui, efetuamos uma revisão da função de Mittag-Leffler com dois parâmetros no que concerne as suas propriedades, relações de recorrência, função geratriz, equações diferenciais e relações com outras funções, em particular, com as chamadas funções de Wright[8], as funções de Fox[9], e as funções hipergeométricas confluentes[10], em particular a função erro.

O presente trabalho está disposto do seguinte modo: na primeira seção introduzimos algumas preliminares, isto é, abordamos os conceitos de função gama e função beta bem como introduzimos o símbolo de Pochhammer. Na segunda seção, apresentamos as funções erro e gama incompleta, enquanto que na seção três apresentamos a função de Mittag-Leffler como por este apresentada, isto é, com apenas um parâmetro, ou ainda, como uma possível generalização da função exponencial. Na seção quatro introduzimos o conceito de função de Mittag-Leffler com dois parâmetros, estudamos algumas de suas propriedades, relações com outras funções especiais, em particular com as funções de Wright e de Fox. Discute-se, como caso particular da função de Mittag-Leffler com dois parâmetros, a função erro, relações de recorrência, fórmula de duplicação bem como a relação envolvendo a função gama incompleta. Na seção cinco estudamos a função de Mittag-Leffler relacionada através de um par de transformadas integrais do tipo Laplace e concluímos a seção discutindo uma integral do tipo convolução envolvendo a função de Mittag-Leffler. Ao final apresentamos duas aplicações e concluímos com perspectivas futuras.

1 Preliminares

Nesta seção vamos rever os conceitos envolvendo as funções gama e beta e, em particular, introduzir o símbolo de Pochhammer.

Historicamente, a função gama[1], denotada por $\Gamma(z)$, conforme apresentada por Euler, foi introduzida como uma possível generalização do conceito de fatorial, através da integral imprópria

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty t^\alpha \mathrm{e}^{-t} dt$$

com $\mathrm{Re}(\alpha) \geq -1$. No caso em que $\alpha \equiv n = 0, 1, 2, \ldots$ temos

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Por outro lado, a função beta, denotada por $B(p,q)$, está relacionada com a função gama através da expressão

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

com $\mathrm{Re}(p) > 0$ e $\mathrm{Re}(q) > 0$, cuja representação integral pode ser dada por

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt.$$

O símbolo de Pochhammer, $(\alpha)_n$, é definido por

$$(\alpha)_n = \left\{ \begin{array}{rll} 1 & \text{para} & n = 0 \\ \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) & \text{para} & n \in N \end{array} \right.$$

que, em termos da função gama, pode ser escrito como

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$$

com $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$.

[1]Muitos autores já classificam a função gama como sendo uma função especial. Nós preferimos guardar a nomenclatura funções especiais para funções que se constituem em soluções de equações diferenciais o que não é o caso das funções gama e beta. Por exemplo, a função de Bessel, solução de uma equação de Bessel, faz juz ao nome função especial.

Uma simples aplicação do símbolo de Pochhammer pode ser encontrada na série do binômio, isto é, para $|x| < 1$, vale

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!}\, x^k$$

que, no caso particular $\alpha = 1$, se reduz a

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

isto é, a série geométrica.

2 Função Gama Incompleta

Nesta seção introduzimos o conceito de função gama incompleta bem como as funções erro e de Fresnel. A função gama incompleta tem sua importância, por exemplo, no estudo das equações diferenciais advindas do cálculo integrodiferencial fracionário enquanto que as funções erro emergem naturalmente do estudo das equações diferenciais parciais do tipo parabólico[11] e, enfim, as funções de Fresnel são muito úteis no estudo de problemas envolvendo a difração.

Aqui, vamos nos restringir apenas às respectivas definições e propriedades simples, visto que o objetivo principal é fazer sua conexão com as funções de Mittag-Leffler.

A função gama incompleta pode ser definida pela seguinte integral

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

com $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, ou ainda, em termos da função hipergeométrica confluente[10], ${}_1F_1(a; c; x)$, na seguinte forma

$$\gamma(\alpha, x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}\, {}_1F_1(\alpha; \alpha+1; -x),$$

sendo a representação em série da função hipergeométrica confluente, dada por

$${}_1F_1(a; c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!}.$$

Por outro lado, a função erro, convenientemente normalizada, é dada pela seguinte integral

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} dt$$

que, em termos da função hipergeométrica confluente, é dada por

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2\right).$$

Note que pelas definições da função gama incompleta e da função erro temos que

$$\lim_{x\to\infty} \gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\infty} \mathrm{erf}(x) = 1$$

isto é, no caso da função gama incompleta recupera-se a clássica função de Euler enquanto que no caso da função erro, a área abaixo da curva gaussiana, normalizada à unidade.

É costume introduzir uma outra função gama incompleta, denotada por $\Gamma(\alpha, x)$ e definida através da seguinte integral

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

com $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ de onde segue-se a relação

$$\gamma(\alpha, x) + \Gamma(\alpha, x) = \Gamma(x)$$

e, em completa analogia, introduzimos a função erro complementar, $\mathrm{erfc}(x)$, através da integral

$$\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \mathrm{e}^{-t^2} dt$$

de onde segue a relação

$$\mathrm{erf}(x) + \mathrm{erfc}(x) = 1.$$

Introduzindo, agora, uma outra função gama incompleta, denotada por $\gamma^*(\alpha, x)$, conveniente para nossos estudos futuros, a partir da seguinte expressão

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{-\alpha} \gamma(\alpha, x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} {}_1F_1(\alpha; \alpha+1; -x) \equiv \gamma^*(\alpha, x)$$

de onde segue-se que

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha \gamma^*(\alpha, x) = 1.$$

Esta, a partir de agora, será a nossa definição da função gama incompleta, visto ser esta a função e outras a ela relacionadas, que têm papel importante no cálculo integrodiferencial fracionário.

Utilizando a representação em série para a função hipergeométrica confluente, podemos escrever

$$\begin{aligned}\gamma^*(\alpha,x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}{}_1F_1(\alpha;\alpha+1;-x)\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(\alpha+1)}{}_1F_1(1;\alpha+1;x)\\ &= \mathrm{e}^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha+k+1)}\end{aligned}$$

que, no caso particular $x=0$ estabelece a relação

$$\gamma^*(\alpha,0)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$$

para todo α. Em Miller-Ross[12] encontramos um estudo envolvendo a função gama incompleta e seus casos particulares.

Enfim, mencionamos a equação diferencial satisfeita pela função $\gamma^*(a,x)$

$$x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\gamma^*(a,x)+(a+1+x)\frac{\partial}{\partial x}\gamma^*(a,x)+a\gamma^*(a,x)=0$$

onde

$$\gamma^*(a,x)=\frac{x^{-a}}{\Gamma(a)}\gamma(a,x)$$

e

$$\gamma(a,x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t}t^{a-1}dt.$$

De modo a concluir esta seção apresentamos a definição das chamadas funções de Fresnel, também conhecidas pelo nome de integrais de Fresnel, a saber

$$C(x)=\int_0^x\cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt \qquad \text{e} \qquad S(x)=\int_0^x \mathrm{sen}\,\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt$$

as quais estão relacionadas com a função erro através da seguinte relação

$$C(x)+iS(x)=\frac{1+i}{2}\,\mathrm{erf}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-i)x\right].$$

Ressalte-se que $C(\infty)=\frac{1}{2}=S(\infty)$.

3 Função de Mittag-Leffler I

A função de Mittag-Leffler, $E_\alpha(x)$ é uma função complexa que depende de um parâmetro complexo α e, conforme introduzida por Mittag-Leffler[1], é dada a partir da seguinte expressão

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(1+\alpha k)}$$

que, conforme já mencionado, no caso em que $\alpha = 1$ se reduz à função exponencial

$$E_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$$

ou seja, $E_\alpha(x)$ pode ser considerada uma generalização da função exponencial. Utilizamos a notação $E_\alpha(x)$ no lugar de $E_\alpha(z)$ pois, para os estudos que nos interessam, isto é, associados à derivada fracionária, a variável independente é real.

Também, como já havíamos mencionado, Agarwal[2] introduziu a função

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+\frac{\beta-1}{\alpha}}}{\Gamma(\beta+\alpha n)}$$

como sendo uma outra possível generalização da função de Mittag-Leffler a qual se reduz no caso em que $\beta = 1$, isto é,

$$E_{\alpha,1}(x) = E_\alpha(x)$$

bem como mostrou a conexão com uma função de Bessel generalizada, ou ainda, a chamada função de Wright[8], dada pela seguinte representação em série

$$\Phi_{\beta,\alpha}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{\Gamma(\alpha m+\beta)\Gamma(m+1)}$$

ou seja, obteve uma relação do tipo

$$\Phi_{\beta,\alpha}(t) \propto E_{\alpha,\beta}(1/x).$$

Uma outra possível generalização da função de Mittag-Leffler pode também ser dada pela seguinte expressão[3]

$$E_x(\alpha, c) = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(cx)^k}{\Gamma(1+k+\alpha)}.$$

Enfim, Humbert-Delerue[5] estenderam a definição da função de Mittag-Leffler para o caso de duas variáveis independentes. Para todas estas generalizações e/ou extensões, são estudadas várias propriedades através da metodologia da transformada de Laplace, em particular, do produto de convolução[13]. Deve ser destacado que a generalização da fórmula

$$\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = 2\cosh x$$

segue como uma conseqüência natural.

4 Função de Mittag-Leffler II

Diferentemente das maneiras de estender a função de Mittag-Leffler, acima mencionadas, nós, neste trabalho, vamos considerar a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, definida pela seguinte expansão em série

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

que, como já mencionado, se reduz à clássica função de Mittag-Leffler, no caso em que o parâmetro $\beta = 1$. Casos particulares desta função podem ser encontrados em Podlubny[14].

Vamos apresentar, como casos particulares, as chamadas funções seno e co-seno fracionários, em termos da função de Mittag-Leffler com dois parâmetros

$$Sc_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{(2-\alpha)k+1}}{\Gamma((2-\alpha)k+2)} = xE_{2-\alpha,2}(-x^{2-\alpha})$$

$$Cs_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{(2-\alpha)k+1}}{\Gamma((2-\alpha)k+1)} = xE_{2-\alpha,1}(-x^{2-\alpha})$$

cujas propriedades podem ser mostradas a partir das propriedades da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros.

4.1 Relação com a Função Erro

Nesta seção temos por objetivo demonstrar que a função erro se constitui num caso particular da função de Mittag-Leffler. Para isso, demonstramos uma importante relação entre a função de Mittag-Leffler e a função erro, dada pela teorema a seguir.

Teorema: Para todo $z \in \mathbb{C}$ temos

$$E_{\frac{1}{2},1}(iz) = \mathrm{e}^{-z^2}[1 + \mathrm{erf}(iz)] = \mathrm{e}^{-z^2}[\mathrm{erfc}(-iz)]. \tag{1}$$

Demonstração: Consideremos a seguinte relação

$$\frac{n!}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^n} dt = \frac{n!}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{np+1}}{(np+1)p!} \tag{2}$$

que, para $n = 2$, fornece uma representação para a função erro em termos de um somatório, isto é,[2],

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)p!}. \tag{3}$$

Para demonstrar a equação (1) utilizamos a representação acima e a definição da função de Mittag-Leffler para iz, ou seja,

$$\begin{aligned} E_{\frac{1}{2},1}(iz) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)} \\ &= 1 + \frac{iz}{\Gamma(1+1/2)} - z^2 - \frac{iz^3}{\Gamma(2+1/2)} + \frac{z^4}{2} + \frac{iz^5}{\Gamma(3+1/2)} - \frac{z^6}{3!} - \cdots \end{aligned}$$

Agrupando convenientemente os termos da expressão anterior podemos escrever[3]:

$$\begin{aligned} E_{\frac{1}{2},1}(iz) &= 1 - z^2 + \frac{z^4}{2} - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^8}{4!} - \frac{z^{10}}{5!} + \cdots \\ &+ i\left(\frac{z}{\Gamma(1+1/2)} - \frac{z^3}{\Gamma(2+1/2)} + \frac{z^5}{\Gamma(3+1/2)} - \frac{z^7}{\Gamma(4+1/2)} + \cdots\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Utilizando a relação de recorrência envolvendo a função gama[10],

[2]Note, pela equação 3, que a função erro é ímpar o que torna a segunda igualdade da equação (1) trivial.

[3]Note que esta separação não é, de maneira geral, a separação em parte real e parte imaginária.

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)\\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)\\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),
\end{aligned}$$

e lembrando da relação

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z^2)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-z^2}$$

podemos escrever, para a equação (4), que

$$\begin{aligned}
-\mathrm{e}^{-z^2} + E_{\frac{1}{2},1}(iz) &= i\left[\frac{z}{\Gamma(1+1/2)} - \frac{z^3}{\Gamma(2+1/2)} + \frac{z^5}{\Gamma(3+1/2)} - \cdots\right]\\
&= i\left[\frac{z}{\frac{1}{2}\,\Gamma(1/2)} - \frac{z^3}{\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\Gamma(1/2)} + \frac{z^5}{\frac{5}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\Gamma(1/2)} - \cdots\right]\\
&= \frac{2i}{\Gamma(1/2)}\left[z - \frac{2\,z^3}{3} + \frac{2^2\,z^5}{5\,.\,3} - \frac{2^3\,z^7}{7\,.\,5\,.\,3} + \cdots\right],
\end{aligned} \tag{5}$$

ou ainda, utilizando o conceito de duplo fatorial[10] e a relação $\sqrt{\pi} = \Gamma(1/2)$, na seguinte forma

$$E_{\frac{1}{2},1}(iz) = \mathrm{e}^{-z^2} + \frac{2i}{\Gamma(1/2)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2^k\,z^{2k+1}}{(2k+1)!!}. \tag{6}$$

Para concluir que $E_{\frac{1}{2},1}(iz) = \mathrm{e}^{-z^2}[1+\mathrm{erf}(iz)]$ basta verificar que $\mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{erf}(iz)$ é igual ao segundo termo do lado direito da equação (6). Para tanto, consideremos a representação para a função erro dada pela equação (3), ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}(iz) &= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(iz)^{2p+1}}{(2p+1)p!}\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{i\,(z)^{2p+1}}{(2p+1)p!}.
\end{aligned}$$

Sendo assim, temos

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\,i}\,\mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{erf}(iz) = \mathrm{e}^{-z^2}\left[z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5\,\cdot\,2!} + \frac{z^7}{7\,\cdot\,3!} + + \frac{z^9}{9\,\cdot\,4!} + \cdots\right]$$

Utilizando a representação em série para e^{-z^2} obtemos

$$
\begin{aligned}
e^{-z^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2i}\,\mathrm{erf}(iz) &= z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z^2)^k}{k!} \\
&+ \frac{z^3}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z^2)^k}{k!} \\
&+ \frac{z^5}{5\cdot 2!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z^2)^k}{k!} \\
&+ \frac{z^7}{7\cdot 3!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z^2)^k}{k!} + \cdots
\end{aligned}
$$

Expandindo os somatórios do lado direito da equação acima podemos escrever, já rearranjando

$$
\begin{aligned}
e^{-z^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2i}\,\mathrm{erf}(iz) &= z - \frac{z^3}{1!} + \frac{z^5}{2!} - \frac{z^7}{3!} + \cdots \\
&+ \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{3} + \frac{z^7}{3\cdot 2!} - \frac{z^9}{3\cdot 3!} + \cdots \\
&+ \frac{z^5}{5\cdot 2!} - \frac{z^7}{5\cdot 2!} + \frac{z^9}{5\cdot 2!\,2!} - \frac{z^{11}}{5\cdot 2!\cdot 3!} + \cdots \\
&+ \frac{z^7}{7\cdot 3!} - \frac{z^9}{7\cdot 3!} + \frac{z^{11}}{7\cdot 3!\cdot 2!} - \frac{z^{13}}{7\cdot 3!\cdot 3!} + \cdots \\
&= z - \frac{2\,z^3}{3} + \frac{2^2\,z^5}{5\cdot 3} - \frac{2^3\,z^7}{7\cdot 5\cdot 3} + \cdots
\end{aligned}
$$

de onde segue-se que

$$
e^{-z^2}\mathrm{erf}(iz) = \frac{2\,i}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2^k\,z^{2k+1}}{(2k+1)!!}. \tag{7}
$$

4.2 Relações de Recorrência

Nesta seção apresentamos relações de recorrência, mostramos um resultado envolvendo uma relação contígua e concluímos com uma representação integral para a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros em termos de uma outra função de Mittag-Leffler porém com os dois parâmetros sendo iguais.

Utilizando a definição da função de Mittag-Leffler em termos de uma série, podemos escrever a relação de recorrência envolvendo a derivada

$$\frac{d}{dx}E_{\alpha,\beta}(x) = x\frac{d}{dx}E_{\alpha,\alpha+\beta}(x) + E_{\alpha,\alpha+\beta}(x)$$

bem como a relação envolvendo a mudança de argumento da função de Mittag-Leffler

$$E_{\mu,\beta}(x^{\mu/\alpha}) = E_{\alpha,\beta}(x).$$

Por outro lado, uma relação contígua envolvendo o parâmetro β é dada por

$$\alpha x\frac{d}{dx}E_{\alpha,\beta}(x) = E_{\alpha,\beta-1}(x) + (1-\beta)E_{\alpha,\beta}(x),$$

que será mostrada a seguir.

A fim de mostrar a expressão anterior, consideramos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}E_{\alpha,\beta}(x) &= \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)} \\
&= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} + \frac{x}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{x^2}{\Gamma(2\,\alpha+\beta)} + \frac{x^3}{\Gamma(3\,\alpha+\beta)} + \cdots\right] \\
&= \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{2\,x}{\Gamma(2\,\alpha+\beta)} + \frac{3\,x^2}{\Gamma(3\,\alpha+\beta)} + \cdots + \frac{n\,x^{n-1}}{\Gamma(n\,\alpha+\beta)} + \cdots\right].
\end{aligned}$$

Por outro lado podemos escrever

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta-1}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\Gamma(\alpha n+\beta-1)} \\
&= \left[\frac{1}{\Gamma(\beta-1)} + \frac{x}{\Gamma(\alpha+\beta-1)} + \frac{x^2}{\Gamma(2\,\alpha+\beta-1)} + \frac{x^3}{\Gamma(3\,\alpha+\beta-1)} + \cdots\right] \\
&= \left[\frac{\beta-1}{\Gamma(\beta)} + \frac{x(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{x^2(2\,\alpha+\beta-1)}{\Gamma(2\,\alpha+\beta)} + \frac{x^3(3\,\alpha+\beta-1)}{\Gamma(3\,\alpha+\beta)} + \cdots\right],
\end{aligned}$$

na qual a segunda igualdade se deve à relação de recorrência da função gama[4].

[4] A relação $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ implica em $\frac{1}{\Gamma(x-1)} = \frac{x-1}{\Gamma(x)}$.

A partir da equação acima podemos escrever

$$
\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta-1}(x) - \beta E_{\alpha,\beta}(x) &= \frac{-1}{\Gamma(\beta)} + \frac{x(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{x^2(2\,\alpha-1)}{\Gamma(2\,\alpha+\beta)} + \frac{x^3(3\,\alpha-1)}{\Gamma(3\,\alpha+\beta)} + \cdots \\
&= -\left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} + \frac{x}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{x^2}{\Gamma(2\,\alpha+\beta)} + \frac{x^3}{\Gamma(3\,\alpha+\beta)} + \cdots\right] + \\
&+ \alpha x \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{2\,x}{\Gamma(2\,\alpha+\beta)} + \frac{3\,x^2}{\Gamma(3\,\alpha+\beta)} + \cdots\right] \\
&= -E_{\alpha,\beta}(x) + \alpha x \frac{d}{dx} E_{\alpha,\beta}(x),
\end{aligned}
$$

que é o resultado desejado.

Enfim, concluindo esta seção, apresentamos uma relação integral envolvendo uma função de Mittag-Leffler com os dois parâmetros iguais, isto é, a seguinte integral

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + \frac{x}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 dt\, t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} E_{\alpha,\alpha}(xt^\alpha),$$

que, num particular caso, isto é, para $\alpha = 1 = \beta$ fornece a seguinte expressão

$$E_{1,1}(x) = 1 + x \int_0^1 E_{1,1}(xt)\, dt$$

uma identidade, como podemos verificar.

4.3 Fórmula de duplicação

Vamos apresentar nesta seção, em analogia à fórmula de duplicação de arcos na trigonometria, uma expressão envolvendo a função de Mittag-Leffler com uma outra função de Mittag-Leffler porém com os parâmetros sendo um o dobro do outro, ou ainda, a chamada fórmula de duplicação para a clássica função de Mittag-Leffler.

Teorema: Sendo $z \in \mathbb{C}$ e α um parâmetro real, temos:

$$E_{2\alpha}(z) = \frac{1}{2}[E_\alpha(z^{1/2}) + E_\alpha(-z^{1/2})]. \tag{8}$$

Demonstração: Vamos efetuar a respectiva soma que aparece no segundo membro, a saber,

$$
\begin{aligned}
E_\alpha(z^{1/2}) + E_\alpha(-z^{1/2}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k/2}}{\Gamma(\alpha\, k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, z^{k/2}}{\Gamma(\alpha\, k+1)} + \\
&= \left[1 + \frac{z^{1/2}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{z}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{z^{3/2}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \cdots\right] + \\
&+ \left[1 - \frac{z^{1/2}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{z}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{z^{3/2}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \cdots\right] \\
&= 2\left[1 + \frac{z}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{z^2}{\Gamma(4\alpha+1)} + \frac{z^3}{\Gamma(6\alpha+1)} + \cdots\right] \\
&= 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(2\alpha\, k+1)} \\
&= 2E_{2\alpha}(z),
\end{aligned}
$$

que é justamente o resultado enunciado na equação 8.

4.4 Relação com a Função Gama Incompleta

Na seção 2 introduzimos a função gama incompleta, $\gamma^*(\alpha, x)$, isto é, uma função inteira na variável x contendo um parâmetro. Obtivemos uma expressão desta função em termos da função hipergeométrica confluente.

Aqui, nesta seção, apresentamos a função de Mittag-Leffler, com o primeiro parâmetro igual a unidade, em termos da função gama incompleta bem como em termos da função hipergeométrica confluente.

Utilizando a definição da função gama incompleta e tomando $\alpha = 1$ na expressão para a função de Mittag-Leffler obtemos

$$E_{1,\mu+1}(x) = \mathrm{e}^x \gamma^*(\mu, x)$$

enquanto que, em termos da função hipergeométrica, temos

$$
\begin{aligned}
E_{1,\mu}(x) &= \frac{\mathrm{e}^x}{\Gamma(\mu)}\, {}_1F_1(\mu-1; \mu; -x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\mu)}\, {}_1F_1(1; \mu; x).
\end{aligned}
$$

A partir das relações envolvendo as funções hipergeométricas confluentes é possível obter várias relações envolvendo a função de Mittag-Leffler com um dos parâmetros conhecido.

Como casos particulares mencionamos as funções exponencial, seno e coseno hiperbólicos e a função erro complementar em termos das respectivas funções de Mittag-Leffler com dois parâmetros, a saber:

$$\begin{aligned} E_{1,1}(x) &= \mathrm{e}^x, \\ E_{2,1}(x) &= \cosh(\sqrt{x}), \qquad E_{2,2}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sinh(\sqrt{x}), \\ E_{\frac{1}{2},1}(\sqrt{x}) &= \mathrm{e}^x \mathrm{erfc}(-\sqrt{x}). \end{aligned}$$

A última igualdade é conseqüência imediata do teorema demonstrado na Seção 4.1, enquanto que as demais decorrem diretamente da definição da função de Mittag-Leffler.

5 Transformada de Laplace e Mittag-Leffler

Antes de apresentarmos o cálculo da transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler de modo a obter relações envolvendo o produto de convolução, vamos apresentar um breve resumo da metodologia das transformadas, em particular, a transformada de Laplace.

5.1 Transformada de Laplace

Consideremos uma função $f(x)$ de ordem exponencial.[13] Definimos a transformada de Laplace, através da expressão

$$F(p) = \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{e}^{-px} dx$$

com $\mathrm{Re}(p) > 0$, desde que a integral imprópria exista. A transformada de Laplace inversa é dada pela seguinte integral no plano complexo

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p)\,\mathrm{e}^{px} dp$$

onde o contorno é o chamado contorno de Bromwich.[15]

De particular importância é o chamado produto de convolução[13] cuja transformada de Laplace inversa é dada por[5]

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p)G(p)\,\mathrm{e}^{px}dp \;=\; \int_0^x f(\xi)g(x-\xi)d\xi$$
$$= \int_0^x f(x-\xi)g(\xi)d\xi.$$

5.2 Mittag-Leffler e a Transformada

A fim de obter a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler, vamos obter a transformada de Laplace da função $t^k\mathrm{e}^{at}$, onde a é um parâmetro real, a partir da expansão em série da função exponencial.

Temos

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\pm x)^k = \frac{1}{1\mp x}$$

que, através do processo de continuação analítica[15], fornece

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\pm xt}dt = \frac{1}{1\mp x}$$

para $|x|<1$.

Derivando k vezes a expressão precedente, em relação ao parâmetro x [10] obtemos

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^k\mathrm{e}^{\pm xt}dt = \frac{k!}{(1\mp x)^{k+1}}.$$

Introduzindo o parâmetro a tal que $\pm x = 1-p\pm a$, na expressão anterior, podemos escrever

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-pt}t^k\mathrm{e}^{\pm at}dt = \frac{k!}{(p\mp a)^{k+1}},$$

com $\mathrm{Re}(p)>|a|$, a qual pode ser interpretada como sendo a transformada de Laplace da função $t^k\mathrm{e}^{\pm at}$.

Considerando a expressão anterior e a definição da função de Mittag-Leffler, conforme introduzida na Seção 4, com dois parâmetros com argumento conveniente, obtemos

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-pt}t^{\alpha k+\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm at^{\alpha})dt = \frac{k!p^{\alpha-\beta}}{(p^{\alpha}\mp a)^{k+1}}$$

[5] A importância do produto de convolução reside no fato de que a transformada de Laplace do produto de convolução $f*g$ é igual ao produto das respectivas transformadas, isto é, $F(p)G(p)$, onde $F(p)$ é a transformada de Laplace de $f(x)$ e $G(p)$ é a transformada de Laplace de $g(x)$, respectivamente.

com $\mathrm{Re}(p) > |a|^{1/\alpha}$ onde utilizamos a notação

$$E^{(k)}_{\alpha,\beta}(x) = \frac{d^k}{dx^k} E_{\alpha,\beta}(x).$$

Esta expressão pode ser interpretada como sendo o par de transformadas de Laplace da função $t^{\alpha k+\beta-1} E^{(k)}_{\alpha,\beta}(\pm z t^{\alpha})$.

Um caso particular utilizado, por exemplo, na resolução de uma equação semidiferencial[12] é aquele em que os parâmetros são tais que $\alpha = \beta = 1/2$ de onde segue-se

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} t^{\frac{k-1}{2}} E^{(k)}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\pm a\sqrt{t})dt = \frac{k!}{(\sqrt{p} \mp a)^{k+1}}$$

com $\mathrm{Re}(p) > a^2$.

5.3 Representação Integral

Algumas das mais importantes propriedades da função de Mittag-Leffler são obtidas através de sua representação integral. O objetivo desta seção é demonstrar a validade desta representação, que é dada pelo seguinte teorema:[6]

Teorema: Sendo $E_\alpha(z)$ a função de Mittag-Leffler, podemos escrever

$$E_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi\, i} \int_{Ha} \frac{\xi^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{\xi}}{\xi^{\alpha} - z}\, d\xi, \qquad \alpha > 0, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{9}$$

Demonstração: Consideremos a representação integral para o inverso da função gama[10] dada por

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{\xi^{\beta}}\, d\xi \tag{10}$$

e a definição da função de Mittag-Leffler, ou seja

[6] Ha denota o assim chamado contorno de Hankel. Ver Seção 5.4.

$$
\begin{aligned}
E_\alpha(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha\, k+1)} \\
&= 1 + \frac{z}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{z^2}{\Gamma(2\alpha+1)} + \cdots + \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha+1)} + \cdots \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{Ha} \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{\xi}\, d\xi + z \int_{Ha} \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{\xi^{\alpha+1}}\, d\xi + \cdots + z^n \int_{Ha} \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{\xi^{n\,\alpha+1}}\, d\xi + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\xi^\alpha}\right)^n d\xi,
\end{aligned}
$$

uma vez que[7] $\left|\dfrac{z}{\xi^\alpha}\right| < 1$ podemos escrever

$$
E_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi\, i} \int_{Ha} \frac{\xi^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{\xi}}{\xi^\alpha - z}\, d\xi
$$

que é justamente o resultado que buscávamos.

5.4 Contorno de Hankel

Define-se como contorno de Hankel o caminho no plano complexo que se estende de $[\infty, \delta]$, contorna a origem e retorna ao ponto $[\infty, -\delta]$, permanecendo sempre arbitrariamente próximo ao eixo real como nos mostra[8] a Figura 1.

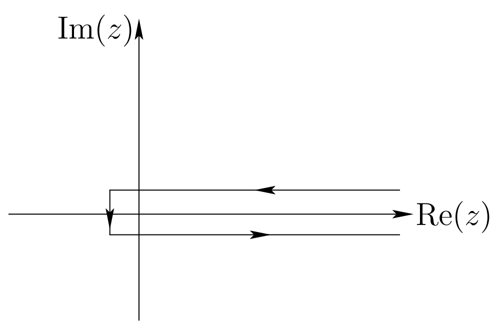

Figura 1: Representação do contorno de Hankel.

[7]Pela definição do contorno de Hankel.

[8]Também define-se como contorno de Hankel o caminho no plano complexo que se estende de $[-\infty, \delta]$, contorna a origem e retorna ao ponto $[-\infty, -\delta]$.

Também é conhecido como contorno de Hankel, o contorno orientado no sentido positivo, composto por uma circunferência, centrada na origem e raio ε e de duas semi-retas $\varepsilon < x < \infty$ e $\infty > x > \varepsilon$, como mostra a Figura 2.

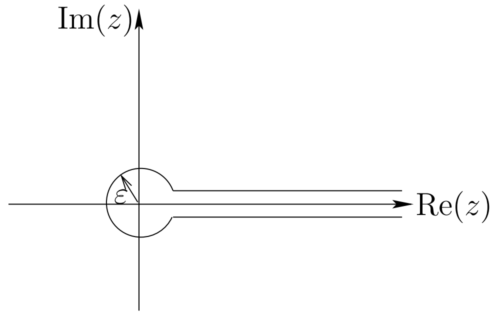

Figura 2: Outra representação do contorno de Hankel.

Esta segunda representação costuma facilitar eventuais cálculos, e pode ser interpretada como uma deformação do caminho proposto na Figura 1.

5.5 Mittag-Leffler e a Convolução

Vamos aqui obter uma expressão envolvendo a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler a fim de determinarmos uma expressão, dada por uma integral, relacionando as funções de Mittag-Leffler com um e dois parâmetros.

Tomando-se a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler e utilizando-se o teorema envolvendo o produto de convolução podemos escrever

$$\Gamma(\beta)\, x^{\beta} E_{\alpha,\beta+1}(x^{\alpha}) = \int_0^x E_{\alpha,1}(\xi^{\alpha})(x-\xi)^{\beta-1} d\xi$$

e, visto que $E_{\alpha,1}(x) = E_{\alpha}(x)$ segue-se a relação

$$\Gamma(\beta)\, x^{\beta} E_{\alpha,\beta+1}(x^{\alpha}) = \int_0^x E_{\alpha}(\xi^{\alpha})(x-\xi)^{\beta-1} d\xi.$$

Um caso particular de interesse é aquele onde os parâmetros α e β são tais que $\beta + 1 = 2\alpha$, de onde segue-se

$$\Gamma(2\alpha - 1)\, x^{2\alpha-1} E_{\alpha,2\alpha}(x^{\alpha}) = \int_0^x E_{\alpha}(\xi^{\alpha})(x-\xi)^{2\alpha-2} d\xi.$$

Um outro caso particular é aquele em que o parâmetro $\beta = 1$, isto é,

$$\int_0^x E_\alpha(\xi^\alpha) d\xi = x E_{\alpha,2}(x^\alpha).$$

5.6 Representação Integral e a Convolução

Aqui vamos calcular uma integral do tipo convolução, isto é, a partir de uma representação integral para a função de Mittag-Leffler e a definição do produto de convolução, obtemos uma integral envolvendo o produto de duas funções de Mittag-Leffler.

Consideremos a representação integral[12]

$$E_t(\nu, a) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t \xi^{\nu-1} \mathrm{e}^{a(t-\xi)} d\xi$$

com $\mathrm{Re}(\nu) > 0$. Calculemos a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler, dada pela representação integral, a partir da transformada de Laplace do produto de convolução, de onde segue-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[E_t(\nu, a)] &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \mathcal{L}[t^{\nu-1}] \mathcal{L}[\mathrm{e}^{at}] \\ &= \frac{1}{s^\nu (s-a)} \equiv F(s) \end{aligned}$$

com $\mathrm{Re}(\nu) > 0$.

A condição $\mathrm{Re}(\nu) > 0$ pode ser estendida para $\mathrm{Re}(\nu) > -1$ através do seguinte argumento: vamos escrever $F(s)$ na forma

$$\frac{1}{s^\nu (s-a)} = \frac{1}{s^{\nu+1}} \left(1 + \frac{a}{s-a} \right).$$

Então, a transformada de Laplace inversa do lado direito desta equação fornece

$$\frac{t^\nu}{\Gamma(\nu+1)} + a\, E_t(\nu+1, a)$$

com $\mathrm{Re}(\nu+1) > 0$, que é o resultado desejado.

Utilizando a relação de recorrência[12]

$$E_t(\nu, a) - E_t(\nu, b) = a\, E_t(\nu+1, a) - b\, E_t(\nu+1, b)$$

mostramos que o resultado associado à transformada de Laplace inversa, anteriormente obtido, é exatamente igual a $E_t(\nu, a)$, de onde segue-se que

$$\mathcal{L}[E_t(\nu, a)] = \frac{1}{s^\nu (s-a)}$$

válida para $\mathrm{Re}(\nu) > -1$.

No caso geral podemos escrever, para $n = 1, 2, \ldots$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\nu (s-a)^n}\right] = \frac{1/\Gamma(\nu)}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} \Gamma(\nu+k) t^{n-1-k} E_t(\nu+k, a)$$

com $\mathrm{Re}(\nu) > -n$.

No caso em que $n = 1$ recuperamos o resultado anteriormente obtido, enquanto que no caso $n = 2$ temos

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\nu (s-a)^2}\right] = t\, E_t(\nu, a) - \nu\, E_t(\nu+1, a)$$

com $\mathrm{Re}(\nu) > -2$.

Enfim, a transformada de Laplace associada ao produto de convolução das funções de Mittag-Leffler com argumentos distintos, isto é, $E_t(\nu, a)$ e $E_t(\mu, a)$ e ainda com $n = 2$, é tal que

$$\frac{1}{s^{\nu+\mu}(s-a)^2}$$

com $\mathrm{Re}(\nu) > -1$ e $\mathrm{Re}(\mu) > -1$ de onde segue-se,

$$\int_0^t E_{t-\xi}(\nu, a) E_\xi(\mu, a) d\xi = t\, E_t(\mu+\nu, a) - (\mu+\nu)\, E_t(\mu+\nu+1, a)$$

com $\mathrm{Re}(\nu) > -1$ e $\mathrm{Re}(\mu) > -1$.

Quando $a \neq b$ podemos escrever para a transformada de Laplace associada à convolução das funções de Mittag-Leffler, $E_t(\nu, a)$ e $E_t(\mu, b)$, a seguinte integral

$$\int_0^t E_{t-\xi}(\nu, a) E_\xi(\mu, b) d\xi = \frac{E_t(\mu+\nu, a) - E_t(\mu+\nu, b)}{a-b}$$

com $\mathrm{Re}(\nu) > -1$, $\mathrm{Re}(\mu) > -1$ e $a \neq b$.

6 Aplicações

Vamos apresentar duas aplicações envolvendo as funções de Mittag-Leffler, em particular, uma delas direcionada para estudos futuros envolvendo o cálculo integrodiferencial fracionário. Enfim, apresentamos, também como aplicação, o procedimento da justaposição de transformadas integrais, como metodologia para a abordagem de uma particular equação diferencial parcial fracionária do tipo difusão.

6.1 Relação Funcional entre funções de Mittag-Leffler

Vamos obter uma relação funcional entre a clássica função de Mittag-Leffler, $E_\alpha(x)$ e, a também chamada função de Mittag-Leffler, $E_x(\alpha, c)$, conforme introduzida por Humbert-Agarwal[3] visto ser esta função mais conveniente para o estudo da derivada fracionária[12].

A clássica função de Mittag-Leffler é dada pela série

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(1 + k\alpha)}$$

com $\alpha \geq 0$, enquanto que, aquela conforme introduzida por Humbert-Agarwal[3] é tal que

$$E_x(\alpha, c) = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(cx)^k}{\Gamma(1 + k + \alpha)}$$

onde c é um parâmetro.

Aqui vamos mostrar a seguinte relação[12]

$$E_\alpha(cx^\alpha) = \sum_{k=0}^{q-1} c^k \, E_x(k\alpha, c^q)$$

onde q é um inteiro positivo.

De modo a provar esta relação, começamos com a clássica função de Mittag-Leffler, com argumento igual a cx^α, isto é,

$$E_\alpha(cx^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(cx^\alpha)^n}{\Gamma(1 + n\alpha)}$$

que, a partir da definição conforme Humbert-Agarwal, pode ser escrita como

$$
\begin{aligned}
E_\alpha(cx^\alpha) &= \sum_{n=0,q,2q,\ldots}^{\infty} \frac{(cx^\alpha)^n}{\Gamma(1+n\alpha)} \\
&+ \sum_{n=1,q+1,2q+1,\ldots}^{\infty} \frac{(cx^\alpha)^n}{\Gamma(1+n\alpha)} + \cdots + \\
&+ \sum_{n=q-1,2q-1,3q-1,\ldots}^{\infty} \frac{(cx^\alpha)^n}{\Gamma(1+n\alpha)} \\
&= E_x(0,c^q) + c\,E_x(\alpha,c^q) + \cdots + c^{q-1}\,E_x[(q-1)\alpha,c^q]
\end{aligned}
$$

de onde segue-se a expressão desejada.

6.2 Equação Cinética

Como uma outra aplicação da função de Mittag-Leffler vamos discutir a solução de uma equação diferencial em termos do chamado operador integral de Riemann.

A equação diferencial cinética na forma standard é dada por[17]

$$\frac{d}{dt}N_i(t) = c_i N_i(t)$$

onde $c_i > 0$ com solução dada por[9]

$$N_i(t) - N_0 = -c_{i\,0}D_t^{-1}N_i(t)$$

onde ${}_0D_t^{-1}$ é o operador integral de Riemann[20].

Omitindo-se o número i, a solução em sua forma generalizada pode ser escrita como

$$N(t) - N_0 = -c^\nu{}_0D_t^\nu N(t) \tag{11}$$

com o parâmetro $\nu > 0$ ou ainda na seguinte forma

$$N(t) = N_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(ct)^{\nu k}}{\Gamma(\nu k+1)}$$

[9]Nesta expressão temos $N_i = N_i(t)$ é o número densidade de espécies i, uma função do tempo e $N_i(t=0) = N_0$ é o número densidade de espécies i no tempo $t = 0$.

que, reescrita em termos da função de Mittag-Leffler, é dada por

$$N(t) = N_0 E_\nu(-c^\nu t^\nu).$$

Ressaltamos que no trabalho[18] os autores estudam soluções de três formas generalizadas da forma dada pela equação (12) enquanto que equações diferenciais fracionárias do tipo equação de difusão podem ser encontradas na referência[14].

Enfim, mencionamos que uma equação similar àquela acima mencionada pode ser encontrada no caso da difusão governada pela equação[10] de Fokker-Planck fracionária, isto é, o deslocamento médio obedece a equação[21]

$$\frac{d}{dt} < x(t) >= -\tau^{-\alpha}{}_0D_t^{1-\alpha} < x(t) >$$

que em termos da função de Mittag-Leffler tem sua solução dada por

$$< x(t) >=< x(0) > E_\alpha[-(t/\tau)^\alpha].$$

6.3 Justaposição de Transformadas

No estudo de problemas advindos da física do estado sólico envolvendo difusão, Nigmatullin[6] deduziu a seguinte equação diferencial fracionária

$${}_0D_t^\alpha u(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$$

com $t > 0$, $-\infty < x < \infty$ e $0 < \alpha < 1$ sendo λ uma constante.

Nós aqui vamos discutir a solução desta equação diferencial fracionária impondo três condições, duas delas de contorno e outra inicial, a saber

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0 \qquad \text{e} \qquad {}_0D_t^{\alpha-1} u(x,t)|_{t=0} = \Phi(x).$$

Vamos abortar este problema através da justaposição das transformadas integrais, isto é, devido às condições de contorno introduzimos a transformada de Fourier na dimensão espacial enquanto que na dimensão temporal introduzimos a transformada de Laplace, ou seja, justapomos as duas transformadas integrais.

[10]Equações construídas a partir de derivadas fracionárias descrevem a difusão anomalamente lenta, observada em sistemas com uma distribuição larga do tempo de relaxação.

Tomando a transformada de Fourier em ambos os membros da equação bem como da condição inicial e utilizando as condições de contorno obtemos o seguinte problema

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{\alpha} F(\omega,t) + \lambda^2\omega^2 F(\omega,t) &= 0 \\ {}_0D_t^{\alpha-1} F(\omega,t)|_{t=0} &= \Psi(\omega) \end{aligned}$$

onde ω é o parâmetro da transformada de Fourier e $\Psi(\omega)$ é a transformada de Fourier da função $\Phi(x)$.

Agora, para o problema remanescente, isto é, na variável temporal, utilizamos a metodologia da transformada de Laplace.

Aplicando a transformada de Laplace na equação diferencial e utilizando a condição inicial obtemos

$$F(\omega,s) = \frac{\Psi(\omega)}{s^{\alpha} + \lambda^2\omega^2}.$$

Utilizando-se os resultados da Seção 5.6, isto é, invertendo a transformada de Laplace, podemos escrever

$$F(\omega,t) = \Psi(\omega)\, t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda^2\omega^2 t^{\alpha})$$

onde $E_{\alpha,\alpha}(x)$ é uma função de Mittag-Leffler com dois parâmetros, neste caso, iguais.

A partir da integral envolvendo o produto de convolução podemos escrever a solução do problema de partida na forma

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\alpha}(x-\xi,t)\Psi(\xi)d\xi$$

onde $G_{\alpha}(x,t)$, chamada função de Green, é tal que

$$G_{\alpha}(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda^2\omega^2 t^{\alpha}) \cos\omega x \, d\omega.$$

A fim de calcular a integral anterior, vamos proceder novamente com a metodologia da transformada de Laplace, ou seja, aplicar a transformada de Laplace em ambos os membros de onde segue-se

$$g_{\alpha}(x,s) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos\omega x}{\lambda^2\omega^2 + s^{\alpha}} d\omega.$$

A integral resultante pode ser calculada através do teorema dos resíduos[15] de onde segue-se a expressão

$$g_\alpha(x,s) = \frac{s^{-\alpha/2}}{2\lambda}\,\mathrm{e}^{-|x|\lambda^{-1}s^{\alpha/2}}$$

cuja transformada de Laplace inversa fornece

$$G_\alpha(x,t) = \frac{1}{4\pi i\lambda}\int_\Gamma \mathrm{e}^{st}s^{-\alpha/2}\exp\left(-|x|\lambda^{-1}s^{\alpha/2}\right)ds$$

onde Γ é um contorno do tipo Bromwich modificado.

Esta integral de contorno pode ser calculada do seguinte modo: convertemos o contorno de Bromwich num contorno tipo Hankel e introduzimos as mudanças do tipo $\sigma = st$ e $z = |x|\lambda^{-1}t^{-\alpha/2}$ de onde segue-se a representação integral

$$G_\alpha(x,t) = \frac{t^{1-\alpha/2}}{2\lambda}\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha}\mathrm{e}^{\sigma - z\,\sigma^{\alpha/2}}\frac{d\sigma}{\sigma^{\alpha/2}}$$

a qual pode ser dada em termos de uma função de Wright[14] cuja interpretação é conhecida pelo nome de função de Green fracionária.

É conveniente notarmos que estes cálculos correspondem exatamente a calcular a transformada de Fourier em co-senos de uma função de Mittag-Leffler com dois parâmetros iguais.

Enfim, podemos verificar que no caso extremo, $\alpha = 1$, isto é, a clássica equação de difusão unidimensional, a função de Green fracionária se reduz à clássica expressão para a função de Green associada à equação de difusão, ou seja,

$$G_1(x,t) = \frac{1}{2\lambda\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda^2 t}\right).$$

7 Conclusões

Uma grande tendência na matemática moderna é a busca por generalizações. Neste trabalho mostramos que, além da motivação advinda do estudo do cálculo fracionário, em particular, equações diferenciais parciais de ordem não inteira, a função de Mittag-Leffler tem aplicações no estudo intrínseco das funções especiais uma vez que generaliza as funções exponencial e erro além de estar relacionada com as funções gama incompleta e hipergeométrica confluente.

As funções de Mittag-Leffler emergem naturalmente, como já mencionado anteriormente, no estudo das equações diferenciais fracionárias, em particular no estudo da equação cinética fracionária e as funções termonucleares[17]. Uma generalização dos resultados apresentados na referência[17] foram obtidos por[18] também estudando equações cinéticas fracionárias, em particular, as funções de Mittag-Leffler emergem naturalmente como a respectiva solução dada numa forma compacta.

Continuações naturais deste trabalho podem ser feitas tanto no estudo de equações diferenciais fracionárias, como os apresentados na referência[17] e suas generalizações obtidas na referência[18], quanto no refinamento e na busca de novas relações envolvendo a função de Mittag-Leffler com as clássicas funções especiais, em particular, as chamadas funções de Meijer[19]. Enfim, tais funções são de grande utilidade no cáclulo integrodiferencial fracionário[20].

Referências

[1] M. G. Mittag-Leffler, *Sur la Nouvelle Fonction* $E_\alpha(x)$, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, **137**, 554-558, (1903).

[2] R. P. Argawal, *A Propos d'une Note de M. Pierre Humbert*, C. R. Seances Acad. Sci., **236**, 2031-2032, (1953).

[3] P. Humbert et R. P. Agarwal, *Sur la Fonction de Mittag-Leffler et Quelques-unes de ses Généralisations*, Bulletin des Sciences Matematiques, **77**, 180-185, (1953).

[4] H. M. Srivastava, *On an Extension of the Mittag-Leffler Function*, Yokohama Math. J., **16**, 77-88, (1968).

[5] P. Humbert and P. Delerue, *Sur Une Extension à Deux Variables de la Fonction de Mittag-Leffler*, Comptes Rendus, **237**, 1059-1060, (1953).

[6] R. R. Nigmatullin, *To the Theoretical Explanation of the "Universal Response"*, Phys. Sta. Sol., **123B**, 739-745, (1984); *On the Theory of Relaxation for Systems With "Remnant Memory"*, **124B**, 389-393, (1984) e *Fractional Integral and Its Physical Interpretations*, Theor. Math. Phys., **90**, 242-251, (1992).

[7] M. Giona and H. E. Roman, *A Theory of Transport Phenomena in Disordered Systems*, Chem. Eng. J., **49**, 1-10, (1992).

[8] E. M. Wright, *On the Coefficients of Power Series Having Exponencial Singularities*, J. Lond. Math. Soc., **8**, 71-78, (1933).

[9] C. Fox, *The G and H-Functions as Symmetrical Fourier Kernels*, Trans. Amer. Math. Soc., **98**, 395-429, (1961).

[10] E. Capelas de Oliveira, *Funções Especiais com Aplicações*, Editora da Física, São Paulo, (2005).

[11] S. Humbert and E. Capelas de Oliveira, *On the Classification of Second Order Partial Differential Equations in Two Independent Variables Revisited*, Technical Report 45/03, Campinas, (2003).

[12] K. S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equation*, John Wiley & Sons, Inc., New York, (1993).

[13] E. Capelas de Oliveira e M. Tygel, *Métodos de Matemática para Engenharia*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, (2005).

[14] I. Podlubny, *The Laplace Transform Method for Linear Differential Equation of the Fractional Order*, arXiv:funct-an/97100005.

[15] E. Capelas de Oliveira e W. A. Rodrigues Jr., *Funções Analíticas e Aplicações*, Editora da Física, São Paulo, 2006.

[16] F. Mainardi and R. Gorenflo, *On Mittag-Leffler-type Functions in Fractional Evolution Processes*, J. Comput. Appl. Math., **118**, 283-299, (2000).

[17] H. J. Haubold and A. M. Mathai, *The Fractional Kinetic Equation and Thermonuclear Functions*, Astrophysics and Space Science, **327**, 53-63, (2000).

[18] R. K. Saxena, A. M. Mathai and H. J. Haubold, *On Fractional Kinetic Equations*, arXiv:math.CA/0206240.

[19] E. Capelas de Oliveira, Ary O. Chiacchio e R. Figueiredo Camargo, *Sobre a Função de Meijer*, Em Preparação, (2006).

[20] E. Capelas de Oliveira, Ary O. Chiacchio e R. Figueiredo Camargo, *Sobre a Diferenciação Fracionária*, Em Preparação, (2006).

[21] I. M. Sokolov, J. Klafter and A. Blumen, *Fractional Kinetics*, Phys. Today, **55**, 48-54, (2002).