Formas diferenciais em eletrodinâmica

Differential forms in electrodynamics

Igor Leite Freire *

13 de dezembro de 2005

Resumo

Neste trabalho, estudamos a eletrodinâmica com formas diferenciais.

Palavras-chave: Equações de Maxwell, formas diferenciais.

Abstract

In this work, we study the electrodinamics with differencial forms.

Keywords: Maxwell's equations, differential forms.

1 Introdução

Ao longo da 2ª metade do século XIX, diversos cientistas contribuíram para o desenvolvimento da teoria eletromagnética, culminando com a publicação, pelo físico e matemático escocês James Clerck Maxwell, do *A Treatise on Electricity and Magnetism*, fazendo uma verdadeira unificação de vários fenômenos outrora considerados dissociados ([1]).

Com o desenvolvimento matemático do início do séxulo XX, novos formalismos se mostraram adequados ao estudo da eletrodinâmica de Mawell, como por exemplo, as formas diferenciais, a análise vetorial e o cálculo tensorial.

A análise vetorial oferece uma maneira mais conveniente para tratar as equações da eletrodinâmica, e o cálculo tensorial as torna ainda mais concisas e gerais, com o custo de serem mais abstratas à maioria dos estudantes que se iniciam em seu estudo.

A grande vantagem das formas aplicadas ao eletromagtismo é que elas o generalizam como os tensores, mas com a simplicidade dos vetores.

Mas afinal, o que são formas diferenciais?

*Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), Unicamp, CP 6165, 13083-970, Campinas (SP), Brasil. E-mail: igor@ime.unicamp.br. Auxílio financeiro CAPES.

Quando calculamos uma integral de linha, por exemplo,

$$\int_\Gamma f(x)dx + g(y)dy + g(z)dz$$

associamos ao argumento da integral uma 1-forma α, dada pela expressão:

$$\alpha = f(x)dx + g(y)dy + g(z)dz.$$

Desta maneira, ao integrarmos a forma α num caminho Γ, tal integral é definida por

$$\int_\Gamma \alpha = \int_\Gamma f(x)dx + g(y)dy + g(z)dz.$$

Mais geralmente, uma 2-forma, 3-forma, etc, são grandezas que associamos aos integrandos de integrais de superfície, volume, etc. Por exemplo, se $\vec{F}(\vec{r}) = (F_1(\vec{r}), F_2(\vec{r}), F_3(\vec{r}))$ é um campo vetorial, sua integral de superfície é

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_S F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy.$$

Ao seu integrando, associamos a 2-forma

$$\eta = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy,$$

de modo que

$$\int_S \eta = \int_S F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy$$

da mesma maneira, se

$$\int_V \rho_0(\vec{r})dV$$

é uma integral de volume, a ela associamos a 3-forma

$$\rho = \rho_0 dx \wedge dy \wedge dz$$

de modo que

$$\int_V \rho = \int_V \rho_0(\vec{r})dV.$$

De modo análogo definimos formas diferenciais de grau maior. Por definição, uma 0-forma é uma função diferenciável.

Nas expressões para 2-formas e 3-formas, e mais geralmente, uma k-forma, aparece o símbolo $\wedge$. Ele denota o produto exterior entre formas diferenciais (ver apêndice).

Numa definição mais rigorosa, uma forma diferenciável é um tensor antissimétrico covariante, mas aqui não nos ateremos a este fato. Interessa-nos mais as propriedades geométricas delas, em detrimento das algébricas.

A proposta deste trabalho é empregar a teoria de formas diferenciais na eletrodinâmica, de maneira introdutória, e obter a versão em formas das equações de Maxwell para meios isotrópicos, o tensor de Faraday e expressar os *invariantes de calibre* da eletrodinâmica através das mesmas.

Diversos trabalhos tem sido feitos com essa proposta, como se pode ver em [2, 3, 4, 5, 6, 7]. Em [8], encontramos o emprego das formas em termodinâmica.

2 Equações de Maxwell e formas

As equações de Maxwell são ([9]), na forma integral:

$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4\pi \int_V \rho dV, \tag{1}$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \tag{2}$$

$$\oint_{\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{c}\frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}, \tag{3}$$

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \tag{4}$$

onde c é a velocidade da luz no meio.

Além disso, temos a equação da continuidade:

$$\oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV \tag{5}$$

Utilizando o Teorema de Stokes (ver apêndice) e associando aos integrandos das integrais de linha, superfície e volume; 1-formas, 2-formas e 3-formas, as Eqs. (1) – (5) se tornam, respectivamente:

$$dD = 4\pi\rho, \tag{6}$$

$$dB = 0, \tag{7}$$

$$dH = \frac{4\pi}{c} J + \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}, \tag{8}$$

$$dE = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{9}$$

$$dJ = \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{10}$$

que são as equações de Maxwell em formas diferenciais ([2, 3, 4, 5, 6, 7]).

Como $d^2 = 0$ (ver apêndice), segue que se ϕ e α são, respectivamente, 0-formas e 1-formas, então

$$d(E + d\phi) = dE,$$
$$d(B + d\alpha) = dB$$

onde E e B são, respectivamente, 1 e 2-formas. Por outro lado, aplicar o operador d a uma 0-forma ϕ ou a uma 1-forma α equivale a tomar o gradiente de ϕ ou o rotacional de α. As equações

$$d^2\phi = 0,$$

$$d^2\alpha = 0$$

dizem-nos que o campo $d\phi$ é irrotacional e o campo $d\alpha$ é solenoidal.

As relações constitutivas entre os campos elétrico e deslocamento elétrico; campo indução magnética e magnético são, respectivamente ([2, 3, 4, 5, 6, 7])

$$D = \star\varepsilon E, \tag{11}$$

$$B = \star\mu H \tag{12}$$

onde $\star$ denota o operador *estrela de Hodge*, também chamado *dual de Hodge*.

3 O tensor de Faraday

Considere a 2-forma F definida por

$$F = E \wedge dt + \frac{1}{c} B \tag{13}$$

onde

$$E = E(\vec{r}, t) = E_1(\vec{r}, t)dx + E_2(\vec{r}, t)dy + E_3(\vec{r}, t)dz,$$

$$\begin{gathered} B = B(\vec{r}, t) = B_1(\vec{r}, t)dy \wedge dz + \\ B_2(\vec{r}, t)dz \wedge dx + B_3(\vec{r}, t)dx \wedge dy. \end{gathered}$$

denotam, respectivamente, a 1-forma campo elétrico e a 2-forma campo indução magnética. Aplicando o operador d na Eq. (13), obtemos:

$$\begin{gathered} dF = dE \wedge dt + \frac{1}{c} dB = \\ dE \wedge dt + \frac{1}{c}(\nabla \cdot \vec{B})dx \wedge dy \wedge dz + \\ \frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \wedge dt = \left(dE + \frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \right) \wedge dt = 0 \end{gathered} \tag{14}$$

de onde conclui-se que

$$dF = 0. \tag{15}$$

A Eq. (14) é equivalente às Eqs. (7)-(9), que são as equações de Maxwell homogêneas. Considere agora a 2-forma G, dual de F, num meio isotrópico tal que $\mu = \varepsilon = 1$

$$\begin{gathered} G = \star F = -E_1 dydz + E_2 dxdz - E_3 dxdy + \\ (H_1 dzdt + H_2 dxdt + H_3 dydt) \end{gathered} \tag{16}$$

onde omitimos, por comodidade, o símbolo do produto exterior, a dependência espaço-temporal e supomos que o meio é isotrópico com permissividade elétrica do meio ε e permeabilidade magnética do meio μ.

Aplicando o operador d na Eq. (16), obtemos:

$$\begin{gathered} dG = -(\nabla \cdot \vec{E})dxdydz + \\ \left(-\frac{\partial E_3}{\partial t} - \mu \frac{\partial H_2}{\partial y} + \mu \frac{\partial H_3}{\partial x} \right) dxdydt \\ \left(\frac{\partial E_2}{\partial t} - \mu \frac{\partial H_2}{\partial z} + \mu \frac{\partial H_1}{\partial x} \right) dxdzdt \\ \left(-\frac{\partial E_1}{\partial t} + \mu \frac{\partial H_2}{\partial y} - \mu \frac{\partial H_3}{\partial z} \right) dydzdt \end{gathered} \tag{17}$$

Definindo a quadricorrente

$$J^{'} = \rho dxdydz + J \wedge dt$$

segue que

$$dG = \star J^{'} \tag{18}$$

onde a quadricorrente $J^{'}$ é definida de modo a se ter

$$\begin{gathered}\star J^{'} = -(\nabla \cdot \vec{E}) dxdydz + \\ \left(-\frac{\partial E_3}{\partial t} - \mu \frac{\partial H_2}{\partial y} + \mu \frac{\partial H_3}{\partial x} \right) dxdydt \\ \left(\frac{\partial E_2}{\partial t} - \mu \frac{\partial H_2}{\partial z} + \mu \frac{\partial H_1}{\partial x} \right) dxdzdt \\ \left(-\frac{\partial E_1}{\partial t} + \mu \frac{\partial H_2}{\partial y} - \mu \frac{\partial H_3}{\partial z} \right) dydzdt.\end{gathered}$$

A Eq. (18) é equivalente às equações de Maxwell não-homogêneas, isto é, as Eqs. (6-8).

4 Os invariantes de calibre

Em [2], mostra-se que em certas condições, se $d\gamma = 0$, então $\gamma = d\xi$.

Utilizando essa mesma idéia, mostra-se que a partir da Eq. (7), existe uma 1-forma A tal que

$$B = dA. \tag{19}$$

Substituindo a Eq. (16) na Eq. (9), obtemos:

$$dE + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} dA = 0 \Rightarrow d\left(E + \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0.$$

E daí, conclui-se que:

$$E = -d\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}. \tag{20}$$

Fisicamente os campos A e

$$A^{'} = A + d\xi \tag{21}$$

determinam o mesmo campo B. Substituindo $A^{'}$ na Eq. (17), obtemos:

$$E = -d\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(A + d\xi) \tag{22}$$

ou

$$E = -d\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} \tag{23}$$

onde

$$\Phi = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \xi}{\partial t}. \tag{24}$$

As transformações (21) e (24) são *transformações de calibre*.

Como feito no formalismo do cálculo vetorial usual, há uma liberdade de escolha para o calibre. Aqui, faremos a mesma coisa e nossa condição será:

$$\star d \star A = -\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}. \tag{25}$$

A Eq. (25) é a *condição de Lorentz* e dá o *calibre de Lorentz* dos potenciais ϕ e A.

Aplicando o operador $\star d\star$ na Eq. (18) e acrescendo ao resultado a parcela $\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}$, temos:

$$\begin{gathered}\star d\star A+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+\star d\star d\xi= \\ \left(\star d\star A+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)+\left(\star d\star d\xi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right)\end{gathered}$$

ou seja, para a condição de Lorentz ser válida para os potenciais A, $A^{'}$, ϕ, Φ, a função ξ deve satisfazer a equação

$$\star d\star d\xi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=0. \tag{26}$$

Por outro lado, $\star d\star d$ nada mais é que o operador de Laplace (ver Apêndice), logo, a Eq. (23) reduz-se a

$$\nabla^2\xi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=0, \tag{27}$$

ou seja, ξ deve satisfazer a equação de onda.

Substituindo a Eq. (20) na Eq. (6):

$$-d\star d\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}d\star A=\rho. \tag{28}$$

Aplicando o dual de Hodge a ambos os lados da Eq. (28), temos:

$$-\star d\star d\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\star\rho$$

ou

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\rho_0 \tag{29}$$

onde $\rho=\rho_0 dxdydz$.

Analogamente, substituindo as Eqs. (20) e (16) na Eq. (8), obtemos:

$$\star d\star B+\frac{\mu}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}+\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}d\phi=\frac{4\pi\mu}{c}J.$$

Daí concluímos:

$$\left(\star d\star dA+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right)+\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}d\phi=\frac{\pi\mu}{c}J.$$

Como $\nabla^2=\star d\star d+d\star d\star$, temos:

$$\begin{gathered}\underbrace{d\left(-\star d\star A\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)}_{=0} \\ +\left(\nabla^2+\tfrac{1}{c^2}\tfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A+=\tfrac{4\pi\mu}{c}J.\end{gathered} \tag{30}$$

5 Agradecimentos

O autor é grato a Jorge Agreli e Roldão da Rocha pela ajuda com o latex, e a Renata Rodrigues Marcuz Silva e Silvia Dória Felix pelas correções e sugestões com o texto.

6 Apêndice: o cálculo das formas diferenciais

Aqui apresentaremos as bases para o cálculo com formas diferenciais. Faremos a abordagem de maneira geral e ampla, porém não muito profunda. Ateremos apenas aos conceitos mais gerais e fundamentais da teoria. Por exemplo, um fato geral que usaremos aqui é que em R^n, é possível ter p-formas, com $0 \leq p \leq n$ e que dimensão das p-formas em R^n é $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$. De onde conclui-se que A e ϕ satisfazem a equação de onda não-homogenêa. Se as fontes se anulam, nossos potenciais satisfazem a equação de onda homogênea.

6.1 O produto exterior $\wedge$

O α e β são, respectivamente p e q-formas, o produto exterior entre elas associa uma (p+q)-forma γ, denotada por $\gamma = \alpha \wedge \beta$.

As propriedades básicas do produto exterior são:

1. $\alpha \wedge (a\beta + b\gamma) = a\alpha \wedge \beta + b\alpha \wedge \gamma$,
2. $\alpha \wedge (\eta \wedge \omega) = (\alpha \wedge \eta) \wedge \omega$.
3. $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq}\beta \wedge \gamma$.

onde α é uma p-forma, β e γ são q-formas, η e ω são r e s-formas, respectivamente e a e b são escalares.

O espaço das 1-formas diferenciais é o espaço gerado pelo conjunto $\{dx_1, \cdots, dx_n\}$, onde o elemento dx_i é dual do vetor e_i da base canônica do R^n, onde supomos $n > 1$. A partir da base das 1-formas podemos construir as bases de todas as outras p-formas, bastando para isto tomar o produto exterior entre os elementos da base das 1-formas. Note que se $(p+q) > n$, então $\alpha \wedge \beta = 0$.

6.2 O operador derivação exterior d

O operador d é um operador que agindo em 0-formas (funções) fornece-nos uma 1-forma. Assim, se f é uma função, $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ é sua diferencial, e ao mesmo tempo é identificada como uma 1-forma. Essa 1-forma é a forma dual do gradiente da função f. Da mesma maneira que o operador d aplicou uma 0-forma em uma 1-forma, é possível, através dele, aplicar p-formas em (p+1)-formas. Temos as seguintes propriedades, onde α e β são p-formas e γ é uma q-forma:

1. $d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$,
2. $d(\alpha \wedge \gamma) = (d\alpha) \wedge \gamma + (-1)^p \alpha \wedge (d\gamma)$,
3. $d^2\omega = d(d\omega) = 0$, para toda forma ω.
4. Para toda função diferenciável, $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.

Assim, podemos simplesmente identificar o operador d como

$$d = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i \wedge \tag{31}$$

onde ele age no coeficiente da forma em questão.

6.3 O dual de Hodge $\star$

O operador estrela de Hodge é uma transformação linear, na verdade, um isomorfismo, entre os espaços das p e $(n-p)$-formas.

Para nossos propósitos, uma definição explícita do operador estrela em termos de uma métrica é dada na equação abaixo. Para uma p-forma, temos:

$$\begin{aligned} &\star(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) = \\ &g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_p j_p} \epsilon_{j_1 \cdots j_n} \frac{\sqrt{|g|}}{(n-p)!} dx_{j_{p+1}} \cdots dx_{j_n}. \end{aligned} \tag{32}$$

onde ϵ é o tensor de Levi-Civita, g é o determinante do tensor de métrica, n é a dimensão do espaço e g^{ij} são os elementos da matriz inversa da métrica.

6.4 O Teorema de Stokes

Para finalizar este apanhado geral acerca da teoria de formas, apresentamos o Teorema de Stokes, que diz que numa variedade orientada Σ, ou seja, um subconjunto do R^n onde há uma n-forma diferenciável que nunca se anula, integrar uma k-forma diferenciável na fronteira $\partial\Sigma$ equivale a integrar $d\omega$ em toda a variedade. Em termos matemáticos, temos:

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega \tag{33}$$

Em dimensão 1, este teorema diz que a integral de uma função ao longo de um intervalo equivale a diferença entre os valores da função entre o ponto final e o ponto inicial. Em dimensão 2 e 3, ele diz que a integral de superfície de um campo vetorial equivale à integral de linha (orientada), fechada, do rotacional do campo vetorial. Estes teoremas são mais conhecidos como Teorema Fundamental do Cálculo (unidimensional), Teorema de Green e Teorema de Stokes (2 e 3 dimensões, respectivamente). Todos eles são casos particulares do Teorema de Stokes acima enunciado.

Para maiores detelhas acerca da teoria de formas, consultar [3, 6].

Referências

[1] J. M. F. Bassalo, Revista Brasileira de Ensino de Física, **22**, 210, 2000.

[2] Y. N. Obukhov e F. W. Hehl, [`physics/0005084`].

[3] H. Flanders, *Differential Forms with Applications on Physucal Sciences.* New York, New York: Dover, 1963.

[4] K. F. Warnick, *A Differential Forms Approach to Electromagnetics in Anisotropic Media*, Tese de doutorado em engenharia elétrica, Brigham Young University, (1997).

[5] K. F. Warnick e D. V. Arnold, Journal of Electromagnetic Waves and Applications, **11**, 1145 (1997).

[6] I. L. Freire, *Aplicação de Formas Diferenciáveis à Eletrodinâmica de Meios Anisotrópicos*, Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada, Unicamp, (2004).

[7] R. da Rocha, I. L. Freire e M. A. Faria Rosa, *R.P 27/05-IMECC-Unicamp, submetido ao Can. J. Phys.* [`physics/0502012`] (2005).

[8] J. M. F. Bassalo, Revista Brasileira de Ensino de Física, **20**, 363, 1998.

[9] M. A. Heald e J. B. Marion, Classical Electromagnetic Radiation, Sauders College Publishing, 3ª Ed., 1995.