

Projetos para o ensino de Cálculo Variacional

Gabriel L. Lima ^{*} Vera L. X. Figueiredo [†] Sandra A. Santos [‡]

8 de Março de 2005

Resumo

Este trabalho propõe o uso de projetos como uma ferramenta auxiliar para o ensino do Cálculo Variacional. Após uma breve introdução à filosofia do trabalho com projetos, e exercícios preliminares envolvendo problemas de otimização para funções de várias variáveis e multiplicadores de Lagrange, são encaminhadas duas propostas de projetos visando resgatar o problema da geodésica e o problema da braquistócrona com os olhares histórico, físico, geométrico, analítico e computacional. Este resgate procura engajar o estudante em um trabalho autônomo, na busca da compreensão e apropriação da matemática envolvida. São abordados desde conceitos introdutórios do Cálculo Variacional até aspectos mais elaborados presentes nesse ramo da matemática.

Palavras-chave: Cálculo variacional; Multiplicadores de Lagrange; Lagrangianas; Projetos.

^{*}Departamento de Matemática, IMECC-UNICAMP, CP 6065, 13081-970 Campinas SP, Brazil. E-mail: gllima@hotmail.com

[†]Departamento de Matemática, IMECC-UNICAMP, CP 6065, 13081-970 Campinas SP, Brazil. E-mail: vera@ime.unicamp.br

[‡]Departamento de Matemática Aplicada, IMECC-UNICAMP, CP 6065, 13081-970 Campinas SP, Brazil. E-mail: sandra@ime.unicamp.br

1 Introdução

Os trabalhos de J. Dewey [7] e W. H. Kilpatrick [16] são pioneiros no uso de projetos no ensino, e preconizavam, já na primeira década do século vinte, que o aluno se tornasse “ator da sua formação, por intermédio de aprendizagens concretas e significativas para si” ([2, p.193]).

O ensino e a aprendizagem do Cálculo vem se beneficiando com várias iniciativas envolvendo o uso de projetos no ensino. Costa e Grou apresentam as primeiras reflexões sobre o uso de projetos no ensino de Cálculo de uma e várias variáveis na Universidade Estadual de Campinas [4, 5]. Segundo estas autoras ([4, p.10], “...os procedimentos utilizados em experiências desta natureza estão baseados em fatores que transcendem ao Cálculo: envolvimento, iniciativa e entusiasmo de alunos e professores.”

O uso de projetos no ensino de Cálculo visa dar um caráter mais flexível à ementa rígida de uma disciplina obrigatória dos cursos de Ciências Exatas e Engenharias. Os artigos [6] e [10] relacionam aspectos históricos e físicos ao tema a ser trabalhado, e aliam modelagem matemática à ferramenta computacional para resgatar os conceitos de Cálculo. Indo além, os projetos podem também promover uma maior integração entre as diferentes áreas do conhecimento na medida em que os alunos compreendem a repercussão destes conhecimentos na sociedade e na cultura. Como exemplo de tais atividades convida-se o leitor a conhecer os trabalhos [11] e [21], que exploram temas ambientais, como a questão do lixo na Universidade, e curvas de nível e o vazamento de um navio petroleiro.

Os projetos desenvolvidos por alunos ingressantes na Universidade que cursam a disciplina de Cálculo de uma variável podem ser um importante instrumento capaz de fazer a transição do ensino médio para o ensino superior e mostrar a relevância do Cálculo neste processo transitório [23, p.127].

Pretende-se neste texto explorar o recurso didático do projeto por meio do estabelecimento de uma ponte, agora entre o Cálculo e o Cálculo Variacional. Neste sentido, este trabalho se inicia com uma seção de exercícios preliminares envolvendo problemas de máximos e mínimos de várias variáveis utilizando o Teorema de Lagrange.

A seguir são apresentadas duas sugestões de projetos envolvendo tópicos clássicos do cálculo variacional explorados sob os olhares analítico, geométrico, histórico, computacional e físico. Estes projetos destinam-se potencialmente para estudantes de final de graduação e de pós-graduação. A primeira proposta trabalha com geodésicas e a segunda com o problema da Braquistócrona. Elas envolvem uma abordagem teórica dos assuntos e também possibilitam que os alunos visualizem, por meio de programas computacionais com recursos gráficos, algébricos e simbólicos, alguns resultados vistos na teoria.

Vale ressaltar que os recursos computacionais colaboram para a compreensão do caráter local das soluções dos problemas variacionais sob consideração. Resultados de existência (e unicidade) de solução nem sempre favorecem a construção e visualização efetiva deste objeto matemático. Tanto no caso das geodésicas quanto no problema da braquistócrona, os recursos gráficos, numéricos e algébricos, aliados ao conhecimento dos conceitos envolvidos e dos pré-requisitos, proporcionam um conjunto de ferramentas para se levantar conjecturas e buscar elementos para comprová-las ou verificar que não são

válidas. À medida que o computador simplifica os procedimentos algébricos e favorece a visualização gráfica, pode fornecer subsídios para ousarmos mais e irmos mais longe, indagando, explorando e buscando para além do que já foi construído e apreendido.

1.1 Exercícios preliminares

Pré-requisitos: Máximos e mínimos em várias variáveis [8] e Teorema de Lagrange, que será enunciado a seguir.

Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (caso geral com m restrições de igualdade em \mathbb{R}^n)

Sejam f, g_1, \dots, g_m funções de classe C^1 de n variáveis e seja \mathbf{x}^* um extremo (máximo ou mínimo) local de f no conjunto viável

$$D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\mathbf{x}) = k_1, \dots, g_m(\mathbf{x}) = k_m\}.$$

Suponha que $\nabla g_1(\mathbf{x}^*), \dots, \nabla g_m(\mathbf{x}^*)$ são vetores linearmente independentes (condição de regularidade em \mathbf{x}^*). Então existem números reais $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$ (multiplicadores de Lagrange) tais que $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ é um ponto crítico da função Lagrangeana

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \lambda_1 (g_1(\mathbf{x}) - k_1) - \dots - \lambda_m (g_m(\mathbf{x}) - k_m).$$

1. Dentre os pontos do elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

onde $a > b$, prove que aqueles que estão mais próximos da origem se acham sobre o plano $x = 0$.

2. Considere a reta de equação $y = x - 5$ e a curva $x^2 + (y - 2)^2 = 4$. Encontre o ponto (r, s) na reta e o ponto (t, u) na curva que realizam a distância mínima entre a reta e a curva, seguindo as seguintes etapas:
 - (a) Faça um esboço da situação para compreender o problema.
 - (b) Formule matematicamente o problema: *minimizar o quadrado da distância entre os pontos, sujeito aos pontos pertencerem, respectivamente, às curvas dadas*, definindo a função objetivo e os vínculos. Note que as funções envolvidas possuem quatro variáveis: (r, s, t, u) .
 - (c) Utilize a restrição “ (r, s) pertence à reta” para reduzir a dimensão do problema, que passa a ter três variáveis e um único vínculo.
 - (d) Resolva o sistema de Lagrange resultante e analise o(s) resultado(s) obtido(s).

- (e) Faça um novo esboço para visualizar a solução encontrada e validá-la graficamente.
3. Defina duas elipses disjuntas em \mathbb{R}^2 e encontre os pontos que realizam a distância mínima entre ambas. Como roteiro, baseie-se nas etapas do item anterior, mas observe que neste caso o problema permanece com quatro variáveis e duas restrições.

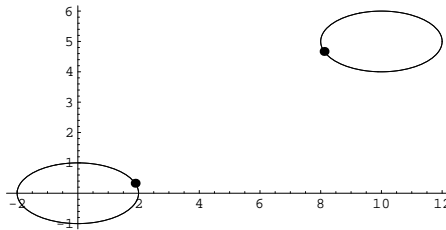


Figura 1: Ilustração para a situação problema sugerida no item 3, com as soluções demarcadas

Este problema e o anterior estão propostos em [9].

4. O problema a seguir foi inspirado na abordagem presente em [25]. Utilizando o método dos Multiplicadores de Lagrange, podemos demonstrar duas desigualdades extremamente importantes em análise matemática: a **desigualdade de Cauchy-Schwarz-Bunyakovskii** e a **desigualdade de Hölder**. A desigualdade de Cauchy-Schwarz-Bunyakovskii foi demonstrada em \mathbb{R}^n por Cauchy em 1821, por Bunyakovskii para integrais em 1859 e por Schwarz para integrais duplas em 1885. Ela estabelece o seguinte: para números arbitrários $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ temos a seguinte desigualdade:

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)^{1/2} (b_1^2 + \dots + b_n^2)^{1/2}.$$

Já a desigualdade de Hölder foi demonstrada por Hölder em 1889 e estabelece que para números não negativos $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ e para $p > 1, q = \frac{p}{p-1}$ vale a seguinte desigualdade:

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \leq (a_1^p + \dots + a_n^p)^{1/p} (b_1^q + \dots + b_n^q)^{1/q}.$$

Com o auxílio dessas desigualdades podemos demonstrar importantes resultados de análise matemática, principalmente sobre normas.

Agora, trabalhando com problemas de máximos e mínimos em várias variáveis:

- (a) Demonstre a desigualdade de Cauchy-Schwarz-Bunyakovskii. Sugestão: com base na desigualdade, escolha a *função objetivo* adequada e trabalhe com a *restrição* $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = B^2$

- (b) De maneira análoga, demonstre a desigualdade de Hölder. Sugestão: leve em consideração o fato de esta desigualdade valer para números não negativos, e adapte a idéia usada em [4a](#).
- (c) Definimos a **norma euclidiana** de $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ por

$$\|z\|_2 = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_n^2}.$$

Demonstre que esta norma satisfaz a desigualdade triangular

$$\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2.$$

Sugestão: utilize a desigualdade de Cauchy-Schwarz-Bunyakovskii.

- (d) Mostre que a **norma-p**,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^p \right)^{1/p},$$

$p > 1$ satisfaz a desigualdade triangular. Sugestão: utilize a desigualdade de Hölder.

5. Nos itens anteriores trabalhou-se com problemas de máximos e mínimos de várias variáveis. O cálculo variacional aparece então, como uma continuação desta teoria para problemas mais gerais. Comprove isto fazendo uma pequena nota histórica sobre a evolução dos problemas de máximos e mínimos e seus métodos de resolução. Uma boa referência para isto é o [capítulo 1 de [19](#)] e [25](#)].

2 Projeto sobre geodésicas

Por dois pontos quaisquer sobre uma superfície, há infinitos caminhos na superfície que os ligam. Se existir uma curva de menor comprimento entre estes dois pontos, então ela é denominada uma **linha geodésica** (ou **geodésica**).

De acordo com [15](#)], o primeiro artigo sobre o menor caminho entre dois pontos numa superfície geral, *De Linea Brevisima in Superficie Quacunque Duo Quaelibet Puncta Jungente (On the Shortest Line on the Arbitrary Surface Connecting Any Two Points Whatsoever)*, foi publicado por Euler em 1732.

O projetos têm por objetivo traçar um panorama das geodésicas com os elementos teóricos desenvolvidos no texto.

2.1 Geodésicas na esfera

Esta parte do projeto tem por objetivo revisar conceitos de Geometria Analítica, Cálculo de várias variáveis, Análise, Cálculo variacional e Geometria Diferencial.

Pré-requisitos: coordenadas esféricas [8], equação de plano [27], distância geodésica [22], teorema da Função Implícita [18], comprimento de arco [capítulo 1 de [19]], equação de Euler-Lagrange [capítulo 1 de [19]], geodésicas sob o ponto de vista da geometria diferencial [22].

Geodésicas via Geometria Analítica

1. Como a superfície da Terra pode ser considerada esférica, o problema de determinar qual o menor caminho entre dois pontos em uma esfera sempre teve grande destaque. Faça uma pesquisa e encontre exemplos que ilustrem a importância dessa idéia. Uma sugestão seria pesquisar sobre a cartografia e as grandes navegações.
2. As cidades de Dallas ($Latitude, Longitude$) = $(32^\circ N, 97^\circ O)$ e Nagasaki ($Latitude, Longitude$) = $(32^\circ N, 180^\circ L)$ estão sobre o mesmo paralelo. Utilizando coordenadas esféricas localize-as na superfície da Terra. Suponha o raio da Terra 6375km.
3. Determine a equação do plano P_1 que passa pelas duas cidades e é paralelo ao eixo z . Visualize este plano juntamente com a superfície da Terra e as duas cidades.
4. Determine a equação do plano P_2 que passa pelas duas cidades e pelo centro da Terra. Visualize-o juntamente com a superfície da Terra e as duas cidades.
5. Obtenha a curva interseção do plano P_1 com a superfície da Terra.
6. Obtenha a curva interseção do plano P_2 com a superfície da Terra.



Figura 2: O caminho mais curto entre Dallas e Nagasaki (arco de cima) e a linha de rumo (loxodromia).

7. Utilizando produto interno de vetores calcule a distância, na superfície da Terra, entre as duas cidades considerando as curvas obtidas em 5 e 6. Atenção! Neste cálculo, considere sempre o menor dos arcos de círculo entre as duas cidades.

8. Compare os resultados obtidos em 7.

Uma maneira popular (e mais antiga) de descrever geodésicas é chamá-las de curvas de menor distância entre dois pontos numa superfície. Isto é verdade certamente para o plano, onde as geodésicas são segmentos de retas, que dão a menor distância entre quaisquer dois de seus pontos. Mas vejamos o que ocorre com a superfície esférica. Pode-se estabelecer que a menor distância entre dois pontos P e Q na esfera é ao longo de uma geodésica, que neste caso é um grande círculo formado pela interseção da esfera com o plano que passa por P , Q e o centro da esfera (veja figura 3).

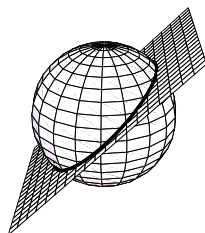


Figura 3: Um grande círculo na superfície da Terra.

Mas existem dois arcos de grande círculo entre dois de seus pontos e somente um deles é a curva de menor distância, exceto quando P e Q são os pontos finais de um diâmetro, denominados pontos antípodas, quando ambos os arcos têm o mesmo comprimento. Este exemplo da esfera também mostra que nem sempre é verdade que por dois pontos passa uma única geodésica: quando P e Q são pontos antípodas qualquer grande círculo por P e Q é uma geodésica [24, p.140].

9. Escolha duas cidades na superfície da Terra que não estão no mesmo paralelo e nem no mesmo meridiano. Tente visualizar o menor dos arcos do grande círculo que passa pelas cidades escolhidas. Isto é sempre possível? Por que? Qual o resultado de análise que nos permite afirmar algo a este respeito? Dê um exemplo mostrando um caso onde a visualização desta curva não é possível. Sugestão: tenha em mente o Teorema da Função Implícita.

Geodésicas via Cálculo Variacional

10. Queremos estabelecer que o caminho mais curto entre dois pontos na esfera é um arco do grande círculo pensando nesse problema como um problema de minimizar o comprimento de um arco ligando dois pontos. Escreva a expressão que fornece o comprimento de arco entre dois pontos dados em uma esfera.
11. O problema de encontrar o menor caminho entre os dois pontos dados na esfera se transforma então no problema de minimizar a integral obtida em 10. A área da matemática que trata deste tipo de problema é o **Cálculo Variacional**. Tente

resolver este problema da mesma maneira que resolveria um problema usual de máximo e mínimo. Quais as dificuldades encontradas? Sugestão: comece pensando em encontrar pontos críticos.

12. Enuncie e demonstre algum teorema que forneça uma maneira de derivarmos uma integral e assim poderemos calcular os pontos críticos do problema que estamos considerando. Sugestão: veja o [capítulo 1 de [19]] e [13]
13. Utilizando o resultado obtido em 12 é possível encontrar os pontos críticos para este problema. Com base nisto, tente encontrar uma condição necessária para uma curva $y = y(x)$ ser um extremal do problema, isto é, ser uma curva candidata a minimizar a integral desejada. O objetivo deste item é chegar na famosa **Equação de Euler-Lagrange**.
14. Com base no que foi feito em 13 encontre uma curva candidata a extremo do problema considerado. Com isso será possível obter um arco de grande círculo como geodésica. Sugestão: consulte o [capítulo 1 de [19]] e estude detalhadamente a seção que trata da Equação de Euler-Lagrange.

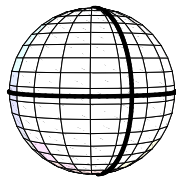


Figura 4: Um meridiano e o equador da esfera.

15. Com base no que foi visto no decorrer do projeto, discuta o caráter local das geodésicas, justificando-o. Note que esta resolução do problema via cálculo variacional não nos dá os meridianos e o equador da esfera como geodésicas (ver figura 4).
16. **Algo mais: Geodésicas via Geometria Diferencial e Física**
 - (a) **Equilíbrio de um fio elástico sobre uma superfície:** imagine um fio elástico colocado sobre uma superfície e fixado em dois pontos. Ao adquirir a forma do caminho mais curto entre estes pontos, este fio se põe em equilíbrio e este equilíbrio é estável (isto é, se o tirarmos desta posição, alargamos este fio, e o mesmo tenderá a reduzir-se, tomando novamente a posição inicial). É possível obter o seguinte resultado: para que um fio elástico sobre uma superfície esteja em equilíbrio é necessário que em qualquer ponto deste fio a normal principal coincida com a normal à superfície [20, p.56]. Podemos então dar uma definição de geodésicas levando em consideração este resultado.

Definição 7.1 Uma geodésica numa superfície é uma curva tal que em cada um de seus pontos, a normal principal coincide com a normal à superfície [20].

- i. Prove que uma curva numa superfície para a qual o plano osculador¹ passa, em cada um de seus pontos, pela normal à superfície neste ponto, é uma geodésica [20, p.56] [15, p.116].
 - ii. Mostre que um arco de grande círculo satisfaz à definição de geodésica dada acima [20, p.57].
 - iii. Encontre um método de obter os meridianos e o equador da esfera como geodésica. Sugestão: uma boa referência para isto é [22] que trata o problema via geometria diferencial.
- (b) **Princípio de Hertz:** Um ponto que se move em um plano por inércia descreve uma linha reta (o primeiro princípio de Newton).
Um ponto que se move por uma superfície sem ação de qualquer força externa, descreve uma geodésica.
- i. Mostre que, no caso da esfera, um ponto em sua superfície, se não sofre ação de qualquer força externa, se move por um grande círculo [20, p.62].

2.2 Geodésicas em superfícies planificáveis

Pré-requisitos: isometria [22], equação de Euler-Lagrange [capítulo 1 de [19]], condições necessárias de Legendre e de Jacobi [capítulo 3 de [19]], minimização de funções convexas [capítulo 5 de [19]].

Esta parte do projeto tem o objetivo de apresentar ou revisar o conceito de isometria, que pode ser muito útil no traçado de geodésicas. Este conceito pode simplificar consideravelmente o estudo das geodésicas de certas superfícies.

1. Dê a definição de isometria.
2. Demonstre que se S e S' são *superfícies regulares*, $N : S \rightarrow S'$ é uma isometria e α é uma geodésica em S , então $N(\alpha)$ é uma geodésica em $N(S) = S'$. Sugestão: consulte [3].
3. Considere um cilindro circular de raio 1. Usando as equações de Euler-Lagrange obtenha os candidatos a geodésicas: retas, hélices circulares e, em particular, círculos (veja figura 5). Veja que estes candidatos devem satisfazer as condições necessárias de Legendre e de Jacobi.

¹Seja $\alpha(s)$ uma curva. O plano gerado pelos vetores $\alpha'(s)$ (vetor tangente à curva) e $\eta(s)$ (vetor normal à curva) é chamado de **plano osculador**.

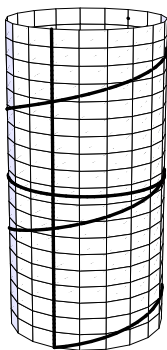


Figura 5: Curvas candidatas a geodésicas no cilindro.

4. O cilindro e o plano são localmente isométricos. Construa uma isometria do cilindro no plano. Prove que, de fato, a expressão encontrada é uma isometria.
5. Usando os resultados de 2 e 4 visualize as geodésicas no cilindro.
6. Obtenha, novamente, a hélice circular como geodésica do cilindro só que agora analisando, sob o ponto de vista da convexidade, o integrando a ser estudado. Sugestão: uma boa referência para este tópico é o [capítulo 5 de [19]].
7. O plano e o cone também são localmente isométricos. Construa uma isometria local entre eles e mostre que é, de fato, uma isometria.
8. Levando em consideração 2 e 7 visualize as geodésicas no cone.

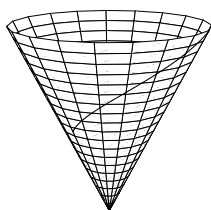


Figura 6: Trecho de uma geodésica no cone.

9. O problema a seguir foi retirado de [26]. Considere o cone circular mostrado na figura 7. Para encontrar curvas geodésicas da forma $\theta = \theta(r)$ unindo pontos (r_1, θ_1) e (r_2, θ_2) assumimos, sem perda de generalidade, que $r_1 > r_2 > 0$, $\theta_1 = 0$ e $0 \leq \theta_2 \leq \pi$.
 - (a) Suponha que $\theta \in C^1[r_1, r_2]$. Derive a função comprimento de arco $L(\theta)$. Ela é convexa?

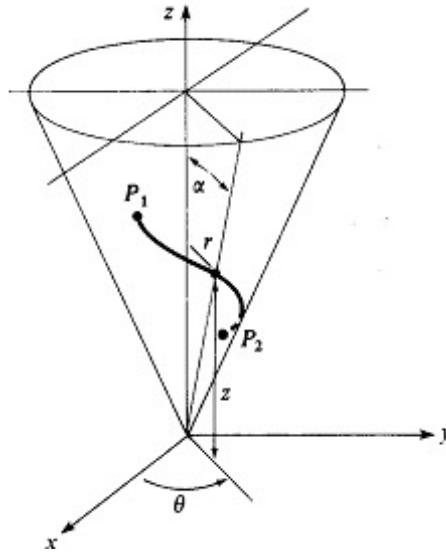


Figura 7: Ilustração extraída de [26, p. 86] mostrando o cone considerado no problema 9.

(b) Quando $\theta_2 \neq 0$, prove que $L(\theta)$ é minimizada unicamente em

$$D = \{\theta \in C^1[r_1, r_2] : \theta(0) = 0, \theta(r_2) = \theta_2\},$$

por $\theta = b \sec^{-1}(r_1/c)$, desde que a constante c possa ser escolhida tal que $\theta(r_2) = \theta_2$.

(c) O que acontece quando $\theta_2 = 0$?

10. **Desdobramento: outras superfícies planificáveis** - Crie uma nova superfície planificável, faça um estudo análogo ao que foi feito no decorrer desta parte do projeto e inclua alguns aspectos novos. Boas sugestões de superfícies planificáveis e algumas aplicações interessantes podem ser encontradas nos seguintes sites:

www.javaview.de

www.ime.unicamp.br/~calculo/modulos/intcil.

O primeiro site contém, dentre outros materiais, geodésicas em diversas superfícies poliedrais. Já o segundo site é um módulo animado sobre interseções de cilindros. A respeito de geodésicas em superfícies poliedrais uma outra boa referência é [20] que, além disso, trabalha também com a idéia mecânica de geodésica como linha de tensão mínima.

2.3 Geodésicas em superfícies de revolução mais gerais

Pré-requisitos: equação de Euler-Lagrange [capítulo 1 de [19]], parametrizações de superfícies de revolução gerais [capítulo 1 de [19]], Relação de Clairaut [17], problemas isoperimétricos [capítulo 2 de [19]].

O objetivo desta seção é discutir um pouco sobre as geodésicas em superfícies de revolução mais gerais, analisar alguns resultados teóricos e algumas consequências interessantes.

1. Obtenha, via equações de Euler-Lagrange, as equações das geodésicas de uma superfície de revolução geral.

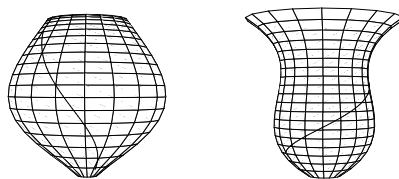


Figura 8: Geodésicas em superfícies de revolução mais gerais.

2. Escolha alguma superfície mais simples, como, por exemplo o cilindro, e tente visualizar, sob a ótica de 1 suas geodésicas. Isto é sempre possível? Quais as dificuldades encontradas? Compare-as com as observadas no item 9 da seção 2.1.
3. Considere superfícies de revolução parametrizadas por

$$x = f(v) \cos u, \quad y = f(v) \sin u, \quad z = g(v).$$

Discuta sob que condições os meridianos e os paralelos desta superfície de revolução são geodésicas. Sugestão: pesquise sobre plano de simetria e a relação deste com as geodésicas. Veja, por exemplo, [20, p.61].

4. Pesquise em livros de geometria diferencial o que diz a **Relação de Clairaut**. Demonstre esta relação a partir do que foi feito em 3. Sugestão: esta abordagem é apresentada na obra [3].
5. Usando a Relação de Clairaut mostre que qualquer geodésica de um parabolóide de revolução

$$z = x^2 + y^2$$

que não seja um meridiano, se auto intercepta um número infinito de vezes. Visualize isto usando o **Mathematica**. Sugestão: uma boa referência para este item é [3], já que o autor explora de maneira detalhada este problema.

6. Desdobramento - Problemas Isoperimétricos e Teorema de Clairaut

- (a) Consulte o capítulo 2 de [19] para formalizar a definição de Problema Isoperimétrico.
- (b) O problema isoperimétrico mais famoso é o Problema de Dido. Pesquise a história deste problema, escreva seu enunciado e resolva-o com base no Teorema de Lagrange, sem utilizar conceitos do cálculo variacional. Sugestão: pense como nos problemas de máximos e mínimos com restrições trabalhados nos exercícios preliminares.
- (c) Resolva agora o mesmo problema só que utilizando a equação de Euler-Lagrange e os conceitos abordados no capítulo 2 de [19].
- (d) O problema das geodésicas também pode ser tratado como um problema isoperimétrico. Obtenha o arco de grande círculo como geodésica da esfera utilizando esta idéia. Sugestão: minimize o comprimento do arco ligando dois pontos na esfera levando em consideração que o arco minimizador deve estar na superfície $G(x, y, z) = 0$. Este problema é tratado na seção 3 do capítulo 2 de [19].
- (e) Utilizando as idéias usadas no item 6d demonstre o seguinte teorema: **Teorema de Clairaut** *Em qualquer ponto de uma dada geodésica sobre uma superfície de revolução, o produto do raio do paralelo pelo seno do ângulo constituído pela geodésica e o meridiano é o mesmo* (veja figura 9). Este problema é abordado de maneira detalhada em [17].

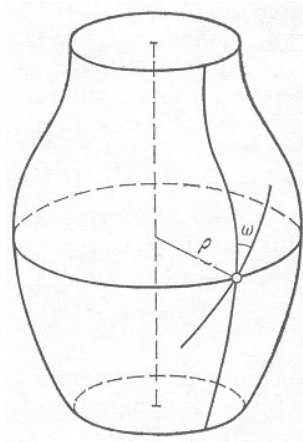


Figura 9: Ilustração extraída de [17, p. 139] mostrando o ângulo citado no enunciado do Teorema de Clairaut.

3 Projeto sobre a braquistócrona

Este projeto tem por objetivo explorar de maneira detalhada o problema mais famoso do cálculo variacional que é a Braquistócrona. Abordaremos o problema da maneira

tradicional como aparece nos livros de cálculo variacional e, em seguida, faremos duas outras abordagens mais realísticas, levando em consideração o atrito envolvido na situação. Estas abordagens mais reais se baseiam em [14] e [1].

O enunciado do problema da Braquistócrona é o seguinte:

Sejam A e B dois pontos dados em um plano vertical. Encontrar a curva que uma partícula M , se movendo no caminho AMB , precisa descrever para sair de A e chegar em B no menor tempo possível, somente sob a ação da força da gravidade.

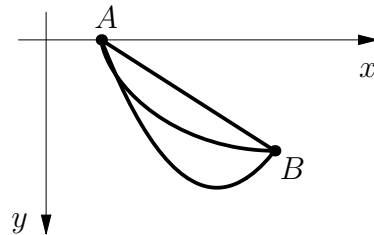


Figura 10: Ilustração mostrando três dos possíveis caminhos que a partícula M pode percorrer para ir de A até B .

3.1 Braquistócrona sem atrito

Nesta subseção trataremos do problema da Braquistócrona da maneira usual como aparece nos livros de cálculo variacional. Ainda não estaremos considerando o atrito e, portanto, trata-se de uma situação menos realista.

Pré-requisitos: equação de Euler-Lagrange [capítulo 1 de [19]], Lei de Snell e Princípio do Menor Caminho da Luz [capítulo 1 de [19]], campos de extremais [capítulo 4 de [19]], condições suficientes para extremos [capítulo 4 de [19]].

1. Qual o resultado que você espera encontrar para este problema?
2. O problema da Braquistócrona é de fundamental importância na história do cálculo variacional. Faça uma pesquisa abordando a origem deste problema, os matemáticos que se empenharam em resolvê-lo, os métodos de resolução estudados e com isso ilustre a importância deste problema para o cálculo variacional.
3. Faça um modelo teórico do problema usando as leis da física e obtenha um funcional a ser minimizado.
4. Obtenha, via equação de Euler-Lagrange, um candidato a mínimo para o funcional encontrado em 3.
5. A solução encontrada em 4 concorda com o que você respondeu em 1?

6. Escolha alguns pontos A e B e, com o auxílio do **Mathematica**, compare o tempo de descida pela reta, pela cicloide e por alguma outra curva que você escolher.
7. O problema da Braquistócrona também pode ser resolvido utilizando princípios de ótica, como a *lei de Snell* e o *princípio do menor caminho da luz*. Modele e resolva este problema sob este ponto de vista. Uma referência para esta abordagem é o capítulo 1 de [19].
8. Mostre que a solução do problema da Braquistócrona, isto é a cicloide, está incluída em um campo de extremais. Sugestão: veja [26, pp.284-286].
9. Usando o que foi obtido no item 8, mostre que a cicloide satisfaz as condições suficientes de Legendre, e portanto, é, de fato, a solução do problema da Braquistócrona. Sugestão: uma boa referência para este item é o [capítulo 4 de [19]].
10. **Algo Mais: Propriedades da Cicloide.** A cicloide além da propriedade de ser Braquistócrona tem também outras propriedades interessantes, já mencionadas no capítulo 1 de [19] e que são encaminhadas a seguir.
 - (a) Mostre que a área delimitada por um arco de cicloide e o eixo das abcissas é igual a três vezes a área do círculo que gerou a cicloide.
 - (b) Existe alguma relação entre o comprimento da cicloide e o diâmetro do círculo que a gerou? Qual é essa relação? Demonstre-a.

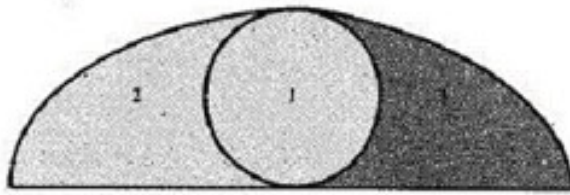


Figura 11: Ilustração extraída de [12, p. 170] mostrando um arco de cicloide, o círculo que o gerou e a área delimitada entre o arco de cicloide e o eixo das abcissas.

- (c) Tente fazer uma simulação no **Mathematica** mostrando que a cicloide é também *tautócrona*, isto é, se pusermos uma cicloide para cima, como na figura 12, e deixarmos cair duas bolinhas por ela abaixo, uma do ponto M e outra de N (veja figura 12), elas chegarão ao ponto mais baixo da cicloide, o ponto P , ao mesmo tempo. Cite uma possível aplicação desta propriedade.

3.2 Braquistócrona com atrito - situação 1

Nesta parte do projeto começaremos a considerar o atrito no Problema da Braquistócrona. Isto fará com que o problema fique mais próximo da situação real. Porém,

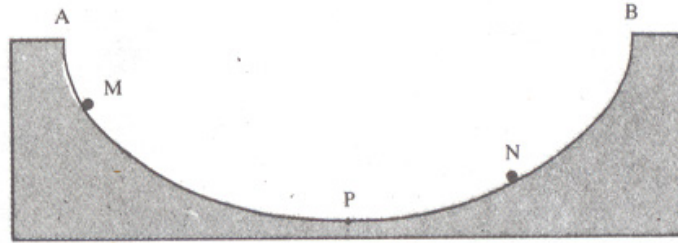


Figura 12: Ilustração extraída de [12, p. 164] mostrando uma bolinha partindo do ponto M e outra do ponto N na ciclóide.

esta é ainda uma abordagem simplificada, que foi inspirada em [14].

Pré-requisitos: equação de Euler-Lagrange [capítulo 1 de [19]], problema da Braquistócrona com atrito [14].

1. Até agora o problema da Braquistócrona foi considerado sem atrito. Levando em consideração a abordagem presente em [14], inclua o atrito neste problema e o formule.
2. Utilizando a equação de Euler-Lagrange obtenha um candidato a solução para este problema.
3. Faça uma comparação, utilizando o **Mathematica**, entre as curvas soluções encontradas no item 2 e no caso do problema sem atrito.
4. Utilizando o **Mathematica** construa uma tabela comparando o tempo de descida pela curva solução com o tempo de descida por outras curvas. Explique detalhadamente seus procedimentos para o cálculo do tempo.
5. O que acontece com a curva solução à medida que o coeficiente de atrito aumenta? Visualize esta situação no **Mathematica**.
6. Este modelo leva em consideração todos os fatores acrescentados quando o atrito é envolvido no problema? Por que?

3.3 Braquistócrona com atrito - situação 2

Nesta subseção do projeto abordaremos o problema da Braquistócrona com atrito, só que agora de maneira mais realista, levando em consideração o *atrito de Coulomb* conforme a abordagem presente em [1].

Pré-requisitos: equação de Euler-Lagrange [capítulo 1 de [19]], problema da Braquistócrona com atrito de Coulomb [1].

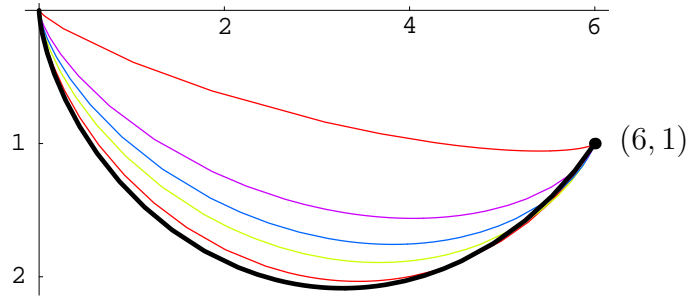


Figura 13: Ilustração mostrando uma comparação entre as curvas soluções da Braquistócrona com atrito a medida que o coeficiente de atrito aumenta. A curva que está abaixo de todas é a cicloide ($\mu = 0$). Da cicloide para cima, os coeficientes de atrito aumentam.

1. Como o problema da Braquistócrona deveria ser modelado para descrever, de fato, a situação de maneira mais real? Qual resultado físico deve ser levado em consideração? Sugestão: referências para este item são a [seção 8 do capítulo 1 de [19]] e [1].
2. Produza sua versão da figura 13, obtendo e verificando os resultados necessários para construir essa figura. Bons apoios para este item são a [seção 8 do capítulo 1 de [19]] e [1].
3. O que deve ocorrer com os tempos de descida à medida que o coeficiente de atrito cresce? E com a curva solução?
4. Faça uma simulação no **Mathematica** para comparar o tempo entre as curvas soluções com diversos coeficientes de atrito e a cicloide sem atrito. Escolha outras duas curvas e compare também com as curvas soluções. Sugestão: para calcular os tempos tenha por base os cálculos feitos em [1] e observe que tudo está dependendo do ϕ final, isto é, do ϕ que faz com que a curva termine no ponto desejado.
5. Escreva um mini-artigo relatando os principais conceitos trabalhados e aprendidos no decorrer deste projeto.

4 Considerações finais

A elaboração das propostas de projetos presentes neste relatório possibilitou novas vivências educativas para os autores. Neste processo, houve um amadurecimento e maior domínio do conteúdo trabalhado, ampliando a confiança para ir além.

Naturalmente, o caráter desafiador que permeia o trabalho com projetos fez-se presente no planejamento e na elaboração das propostas sugeridas neste trabalho. A construção efetiva das geodésicas em superfícies de revolução, por exemplo, não é uma tarefa

simples. Ao deparar com esta questão vivencia-se a lacuna entre os resultados de existência (e unicidade) e a exibição da solução. Para o problema da braquistócrona, por sua vez, recursos auxiliares, como estimativa gráfica da solução de sistemas não lineares via interseção de curvas de nível convenientes, seguida de um método numérico para refinar tal solução, podem ser bastante úteis para o estabelecimento das constantes determinantes e específicas das curvas a serem traçadas e cujo tempo de percurso se deseja calcular.

Ao propiciar a descoberta, a metodologia de ensino com projetos integrada com a ferramenta computacional favorece a produção de conhecimento pelos envolvidos.

Gostaríamos que as propostas sugeridas neste trabalho inspirassem outras iniciativas nesta linha, com integração dos participantes e compartilhamento de vivências e saberes. Como fonte inspiradora para outros projetos sugerimos o livro de Hildebrandt & Tromba [15]. Trata-se de um material valioso para o aprofundamento das idéias subjacentes ao Cálculo Variacional, e que transita dos problemas clássicos a tópicos de pesquisa atual, contextualizados historicamente.

Referências

- [1] N. ASHBY, W. E. BRITTIN, W. F. LOVE & W. WYSS, Brachistochrone With Coulomb Friction, *American Journal of Physics*, Vol. 43, No. 10, (October 1975), 902-905.
- [2] J. P. BOUTINET, *Antropologia do Projecto*, Lisboa: Instituto Piaget, 1990.
- [3] M. P. DO CARMO, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [4] S. COSTA & M. A. GROU, Ensino de cálculo - uma questão de envolvimento. Relatório Técnico 06, Campinas, Unicamp, 1992, 11 pág.
- [5] S. COSTA & M. A. GROU, La enseñanza del cálculo - una cuestión de involucramiento, *Revista Educación Matemática*, 7 (1) pp.100-107, 1995.
- [6] S. COSTA, M. A. GROU & V. L. X. FIGUEIREDO, Mechanical curves - a kinematic Greek look through the computer, *International Journal of Mathematical Education and Technology*, 30 (3) pp.459-468, 1999.
- [7] J. DEWEY, *Democracy and Education*, New York: Mac Millan, 1916.
- [8] C. H. EDWARDS, JR & D. E. PENNEY, *Cálculo com Geometria Analítica*, Volume 3, Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro, 1997.
- [9] V. L. X. FIGUEIREDO, M. P. MELLO & S. A. SANTOS, *Cálculo com Aplicações: Atividades Computacionais e Projetos*, em preparação, 2004.

- [10] V. L. X. FIGUEIREDO, M. P. MELLO & S. A. SANTOS, “Com a mão na cumbuca”, XXIX Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia - COBENGE 2001, Trabalho completo em CD-Rom (7 pág.).
- [11] V. L. X. FIGUEIREDO & S. A. SANTOS, *Relato de Experiência - O Computador no Ensino de Cálculo: o problema do lixo na Unicamp e outras aplicações*, Zetetiké, v.5, n.7, p.111-128, 1997.
- [12] M. GUZMÁN, *Atividades Matemáticas*, Gradiva Publicações Ltda, Lisboa, 1990.
- [13] E. HAIRER & G. WANNER, *Analysis by its History*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1995.
- [14] L. HAWS & T. KISSER, Exploring the Brachistochrone Problem, *The American Mathematical Monthly*, 4 (1995) 328-336.
- [15] S. HILDEBRANDT & A. TROMBA, *The parsimonious universe: shape and form in the natural world*, New York: Springer Verlag, 1996.
- [16] W. H. KILPATRICK, The project method, *Teachers College Bulletin*, pp.3-18, 1918.
- [17] M.L. KRASNOV, G.I. MAKARENKO & A.I. KISELIOV, *Cálculo Variacional*, Editora Mir, Moscou, 1984.
- [18] E. L. LIMA, *Curso de Análise vol.2*, Projeto Euclides, IMPA, 1999.
- [19] G. L. LIMA, *Cálculo Variacional: problemas clássicos, aspectos teóricos e desdobramentos*, Tese de Mestrado, Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação, UNICAMP, Campinas, Brasil, 2004.
- [20] L. A. LIUSTÉRNİK, *Líneas más Cortas, Problemas de Variaciones*, Editora Mir, Moscou, 1979.
- [21] M. P. MELLO & S. A. SANTOS, *Mancha Negra: reflexões sobre um projeto no ensino de Cálculo*, Zetetiké, v.10, n.17/18, Jan/Dez. 2002.
- [22] P. R. RODRIGUES, *Introdução às Curvas e Superfícies*, Editora da Universidade Federal Fluminense, Niterói - RJ, 2001.
- [23] A. J. SOUZA JR., Trabalho com projetos: saberes docentes em movimento. In: G. A. Cicillini & S. V. Nogueira (orgs.) *Educação Escolar: Políticas, saberes e práticas pedagógicas*, Uberlândia: EDUFU, 2002, pp.117-136.
- [24] D. J. STRUIK, *Lectures on Classical Differential Geometry*, Dover, New York, 1961.
- [25] V.M. TIKHOMIROV, *Stories about Maxima and Minima*, Americal Mathematical Society, Mathematical Association of America, 1990.

- [26] J.L. TROUTMAN, *Variational Calculus with Elementary Convexity*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1983.
- [27] C. WEXLER, *Analytic Geometry: a Vector Approach*, Addison-Wesley Publishing Company, London, 1961.