

# E a quadratura foi para o espaço . . . \*

Vera L. X. Figueiredo <sup>†</sup>      Sandra A. Santos <sup>‡</sup>

2 de Março de 2005

## Resumo

Arquimedes demonstrou que a área de um segmento parabólico é  $4/3$  da área do triângulo inscrito de mesma base e de vértice no ponto em que a tangente é paralela base. Este trabalho estende a quadratura de Arquimedes para  $\mathbb{R}^n$ , permitindo interpretar a razão entre áreas no caso plano em termos da dimensão. O problema em  $\mathbb{R}^n$  é estabelecido, com a construção dos objetos correspondentes no cálculo de seus volumes  $n$ -dimensionais. Assim como ocorre com a  $n$ -esfera unitária em  $\mathbb{R}^n$ , os volumes dos objetos envolvidos vão para zero quando  $n$  tende a infinito. A relação entre estes volumes, no entanto, apresenta um curioso comportamento assintótico. Com base nos cálculos efetuados, uma outra relação estabelecida por Arquimedes, entre os volumes da semi-esfera, do cilindro circunscrito e do cone inscrito, é estendida e ampliada.

**Palavras-chave:** Arquimedes; quadratura da parábola; volumes  $n$ -dimensionais; segmento de parabolóide  $n$ -dimensional; segmento de cone  $n$ -dimensional.

---

\*Este trabalho contou com os apoios do CNPq, PROIN-CAPES, FAPESP e FAEPEX/PRE-UNICAMP.

<sup>†</sup>Departamento de Matemática, IMECC-UNICAMP, CP 6065, 13081-970 Campinas SP, Brazil. E-mail: vera@ime.unicamp.br

<sup>‡</sup>Departamento de Matemática Aplicada, IMECC-UNICAMP, CP 6065, 13081-970 Campinas SP, Brazil. E-mail: sandra@ime.unicamp.br

# 1 Introdução

Historicamente, o processo de determinar um quadrado com área igual de uma região plana, limitada por uma curva fechada, ficou conhecido como *quadratura* (cf. [12]). O problema da “quadratura do círculo” é possivelmente um dos mais famosos neste tema. A procura por uma solução construída com régua e compasso remonta aos antigos gregos, e cessou apenas em 1882, quando o matemático alemão Ferdinand Lindemann (1852-1939) demonstrou que  $\pi$  é um número transcendente (cf. [4, p.127]).

Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.), na introdução de seu livro *Quadratura da Parábola* [11], comenta em uma carta a seu mestre Dositheu de Pleusa sobre o problema da quadratura do círculo, já investigado por antecessores. Trocando o círculo por um objeto definido a partir de uma parábola (seção cônica) e uma reta, Arquimedes relata sua descoberta, por processo mecânico, de uma relação entre áreas, provada com argumentos geométricos. Seu raciocínio é apresentado em 24 proposições, culminando em duas provas distintas para a relação estabelecida. Até a proposição 17 ele combina resultados sobre cônicas, de Euclides (c.430-360 a.C) e Aristeu (c.320 a.C), com seu pensamento mecânico de equilíbrio de áreas, obtendo uma primeira prova para o seu resultado. Nas proposições 18 a 24, Arquimedes constrói sua argumentação com base no *método da exaustão*, creditado a Eudoxo (c.400-347 a.C), e que se apóia no seguinte princípio: *dadas duas áreas desiguais, acumulando-se sucessivamente o excesso pelo qual a maior delas supera a menor, essa quantia ultrapassará qualquer área finita pré-determinada*. O método da exaustão foi usado por Eudoxo para estabelecer, por exemplo, que o volume de um cone circular é um terço do volume do cilindro de mesma base e mesma altura.

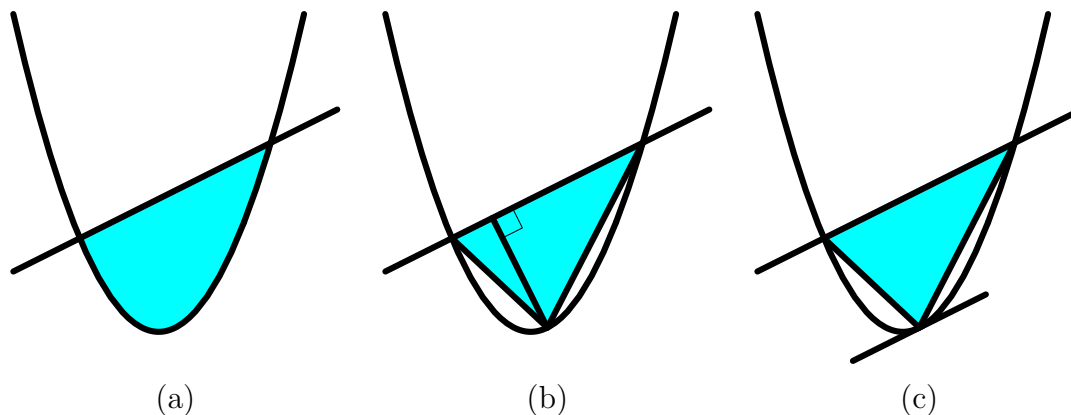


Figura 1: (a) Segmento parabólico, (b) triângulo inscrito de mesmas base e altura, e (c) triângulo inscrito com tangente ao vértice paralela base.

Dados um arco de parábola e uma reta que o intercepte em dois pontos, denomina-se *segmento parabólico* a região plana delimitada por estes dois objetos geométricos (Figura 1(a)). Sua *base* é o segmento da reta compreendido pela parábola, e sua *altura* é o comprimento do maior segmento de reta perpendicular base e com extremidades na

parábola e na base do segmento parabólico. O ponto da parábola no qual a altura se realiza é denominado *vértice*. O resultado estabelecido por Arquimedes foi o seguinte (Figura 1(b)):

A área de qualquer segmento parabólico é  $4/3$  da área do triângulo com mesma base e igual altura.

O processo de exaustão empregado por Arquimedes consistiu em considerar consecutivamente os segmentos parabólicos remanescentes e os correspondentes triângulos inscritos, de mesmas base e altura (ver figura 2). Se  $A$  é a área do triângulo inscrito no segmento original, a área do segmento é expressa por

$$A \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots \right).$$

Embora, na linguagem atual, a série infinita e o processo limite emergam naturalmente no raciocínio empregado, Arquimedes contornou esses delicados conceitos mostrando que

$$A \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{3} \frac{1}{4^{n-1}} \right) = \frac{4}{3} A.$$

A igualdade foi obtida supondo-a válida por excesso ou por falta, e obtendo as contradições por meio do princípio da exaustão. Para mais detalhes, ver o artigo *Arquimedes, o rigor e o método* [2], que aborda vários aspectos da obra de Arquimedes.

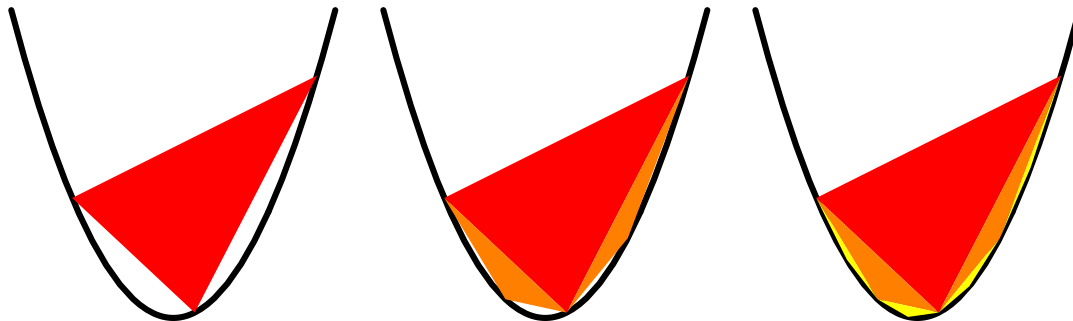


Figura 2: Ilustração para o método da exaustão nos segmentos parabólicos.

Em decorrência de propriedades da parábola, o resultado do célebre geômetra grego pode ser reescrito como (Figura 1(c)):

A área de qualquer segmento parabólico é  $4/3$  da área do triângulo inscrito com mesma base e vértice no ponto onde a tangente é paralela base.

Esta segunda forma de apresentação do resultado de Arquimedes (cf. [6, exerc.49,p.341] e a terminologia por ele empregada nos inspiraram a estender a relação plana para  $\mathbb{R}^n$ , investigando o seguinte problema:

Qual a relação existente entre os  $n$ -volumes de um segmento parabólico  $n$ -dimensional, obtido ao interceptarmos um  $n$ -parabolóide de revolução por um hiperplano, e do segmento de cone  $n$ -dimensional inscrito, de mesma base e com vértice no ponto do  $n$ -parabolóide onde o hiperplano tangente é paralelo ao hiperplano dado? (Ver figura 3.)

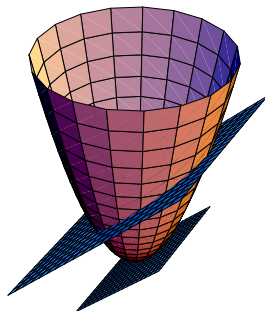


Figura 3: Ilustração para o problema da quadratura em  $\mathbb{R}^3$ .

Este artigo está organizado da seguinte maneira: na seção 2 definimos os objetos de interesse, calculamos seus volumes e encontramos a relação procurada. Como consequência dos resultados obtidos para os volumes dos objetos, estendemos e ampliamos na seção 3 uma outra relação estabelecida por Arquimedes entre os volumes da semi-esfera, do cilindro circunscrito e do cone inscrito. A seção 4 finaliza o texto, apontando possíveis desdobramentos.

## 2 A quadratura em $\mathbb{R}^n$

Para estendermos para  $\mathbb{R}^n$  a relação que Arquimedes encontrou para as áreas no caso plano precisamos inicialmente definir os objetos correspondentes ao segmento parabólico e ao triângulo inscrito de vértice no ponto em que a tangente é paralela à base.

### 2.1 Segmento de parabolóide $n$ -dimensional

Consideremos as funções diferenciáveis  $f, g : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por:

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}) = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2$$

e

$$g(x_1, \dots, x_{n-1}) = a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} + b.$$

Seus gráficos delimitam o seguinte segmento parabólico  $n$ -dimensional (Ver figura 4 para ilustração em  $\mathbb{R}^3$ .)

$$SP_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathcal{B}_{n-1}(R_0), \\ f(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq g(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

onde

$$\mathcal{B}_{n-1}(R_0) = \left\{ (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \left(x_1 - \frac{a_1}{2}\right)^2 + \dots + \left(x_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{2}\right)^2 \leq R_0^2 \right\}$$

e

$$R_0 = \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 + 4b}.$$

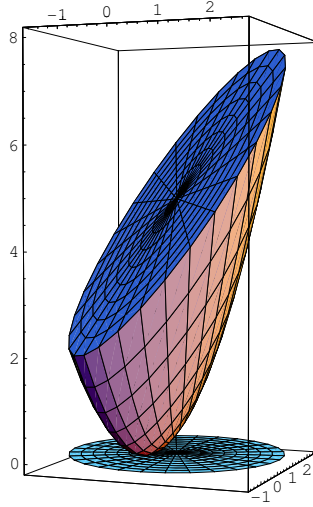


Figura 4: Segmento oblo do parabolóide  $x_3 = x_1^2 + x_2^2$ , definido pelo plano  $x_3 = x_1 + x_2 + 4$ , e sua projeo no plano  $x_3 = 0$ .

Introduzindo as coordenadas esféricas generalizadas (cf. [13]):

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(\rho, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}) = \rho \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \dots \operatorname{sen} \phi_{n-2} \\ y_2 &= y_2(\rho, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}) = \rho \cos \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \dots \operatorname{sen} \phi_{n-2} \\ y_3 &= y_3(\rho, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}) = \rho \cos \phi_2 \operatorname{sen} \phi_3 \dots \operatorname{sen} \phi_{n-2} \\ &\vdots \\ y_{n-2} &= y_{n-2}(\rho, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}) = \rho \cos \phi_{n-3} \operatorname{sen} \phi_{n-2} \\ y_{n-1} &= y_{n-1}(\rho, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}) = \rho \cos \phi_{n-2} \end{aligned} \tag{1}$$

com  $\rho \in [0, R_0]$ ,  $\phi_1 \in [0, 2\pi]$ ,  $\phi_j \in [0, \pi]$ ,  $j = 2, \dots, n-2$ , a bola  $\mathcal{B}_{n-1}(R_0)$  pode ser descrita por

$$(u_1, \dots, u_{n-1}) = (y_1 + a_1/2, \dots, y_{n-1} + a_{n-1}/2), \tag{2}$$

com os parâmetros  $\rho$  e  $\phi_j, j = 1, \dots, n-2$  variando como acima.

O determinante do jacobiano desta transformação de coordenadas é dado por (cf. [13]):

$$\begin{aligned} \det \left( \frac{\partial(y_1, \dots, y_{n-1})}{\partial(\rho, \phi_1, \dots, \phi_{n-2})} \right) &= \det \left( \frac{\partial(u_1, \dots, u_{n-1})}{\partial(\rho, \phi_1, \dots, \phi_{n-2})} \right) \\ &= (-1)^{n-2} \rho^{n-2} \operatorname{sen} \phi_2 \operatorname{sen}^2 \phi_3 \dots \operatorname{sen}^{n-3} \phi_{n-2}. \end{aligned} \quad (3)$$

A igualdade

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} \theta \, d\theta \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta \dots \int_0^\pi \operatorname{sen}^k \theta \, d\theta = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(\frac{k}{2} + 1)}, \quad (4)$$

estabelecida em [13], é essencial no cálculo dos volumes dos objetos do problema. A função gama<sup>1</sup> é uma generalização do fatorial (ver, por exemplo, [1, vol. II, p.184]).

O volume do segmento parabólico  $n$ -dimensional é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{SP_n} &= \int_{SP_n} dV_n = \int_{B_{n-1}(R_0)} (g(u_1, \dots, u_{n-1}) - f(u_1, \dots, u_{n-1})) dV_{n-1} \\ &= \int_{(n-1)\text{-retângulo}} (g(\mathbf{u}) - f(\mathbf{u})) \left| \det \left( \frac{\partial(u_1, \dots, u_{n-1})}{\partial(\rho, \phi_1, \dots, \phi_{n-2})} \right) \right| d\rho \, d\phi_1 \dots d\phi_{n-2} \\ &= \int_0^{R_0} (R_0^2 - \rho^2) \rho^{n-2} d\rho \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^\pi \operatorname{sen} \phi_2 \, d\phi_2 \dots \int_0^\pi \operatorname{sen}^{n-3} \phi_{n-2} \, d\phi_{n-2} \\ &= \frac{2R_0^{n+1}}{(n-1)(n+1)} 2\pi \frac{\pi^{(n-3)/2}}{\Gamma(\frac{n-3}{2} + 1)} = \frac{2R_0^2}{(n+1)} \frac{R_0^{n-1} \pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2} + 1)}, \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{n-1})$ , e as igualdades decorrem das equações (3) e (4), da propriedade  $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$ , válida para todo  $s > 0$  e onde

$$\frac{R_0^{n-1} \pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2} + 1)} = \mathcal{V}_{n-1}(R_0) \quad (5)$$

é o volume da  $(n-1)$ -bola de raio  $R_0$  (cf. [1, vol. II, p.412] e [13]).

Portanto, o volume da região  $SP_n$  pode ser expresso em função do volume da bola  $B_{n-1}(R_0)$  da seguinte forma

$$\mathcal{V}_{SP_n} = \frac{2R_0^2}{(n+1)} \mathcal{V}_{n-1}(R_0). \quad (6)$$

---

<sup>1</sup> $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt, s > 0.$

## 2.2 Segmento de cone $n$ -dimensional

O ponto de partida para a descrição do segmento de cone  $n$ -dimensional é a determinação de seu vértice, o ponto da hipersuperfície gráfico de  $f$  no qual o hiperplano tangente é paralelo ao hiperplano gráfico de  $g$ . Para encontrarmos o vértice desta região basta interpretar estes gráficos como hipersuperfícies de nível zero das funções  $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por:

$$F(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{n-1}) - x_n$$

e

$$G(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_{n-1}) - x_n$$

e impor a igualdade entre

$$\nabla F(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ \vdots \\ 2x_{n-1} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla G(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ -1 \end{pmatrix},$$

obtendo

$$\mathcal{P} = \left( \frac{a_1}{2}, \dots, \frac{a_{n-1}}{2}, f\left(\frac{a_1}{2}, \dots, \frac{a_{n-1}}{2}\right) \right),$$

o vértice procurado.

O segmento de cone  $n$ -dimensional inscrito no segmento parabólico  $n$ -dimensional, de mesma base e vértice  $\mathcal{P}$  pode ser parametrizado por (ver figura 5 para ilustração em  $\mathbb{R}^3$ )

$$SC_n = (1 - t)\mathcal{P} + t\mathcal{E}$$

onde  $\mathcal{E} = (u_1, \dots, u_{n-1}, g(u_1, \dots, u_{n-1}))$ , com  $t \in [0, 1]$  e  $(u_1, \dots, u_{n-1})$  definido em (2).

O cálculo do volume de  $SC_n$  será computado utilizando uma transformação de coordenadas que leva esta região cônica oblíqua em uma região cônica de revolução, com vértice na origem e mesmo volume (figura 6). Esta transformação  $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(x_1, \dots, x_n) &= \left( x_1 - \frac{a_1}{2}, x_2 - \frac{a_2}{2}, \dots, x_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{2}, \right. \\ &\quad \left. R_0^2 - g(x_1, \dots, x_{n-1}) + x_n \right) \end{aligned} \tag{7}$$

e

$$\mathcal{T}(SC_n) = \overline{SC}_n = (v_1, \dots, v_n) = t\overline{\mathcal{E}},$$

onde  $\overline{\mathcal{E}} = (y_1, \dots, y_{n-1}, R_0^2)$ ,  $t \in [0, 1]$ , e  $(y_1, \dots, y_{n-1})$  são as coordenadas esféricas generalizadas definidas em (1).

Como

$$\det \left( \frac{\partial(v_1, \dots, v_n)}{\partial(\rho, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}, t)} \right) = R_0^2 t^{n-1} \det \left( \frac{\partial(y_1, \dots, y_{n-1})}{\partial(\rho, \phi_1, \dots, \phi_{n-2})} \right),$$

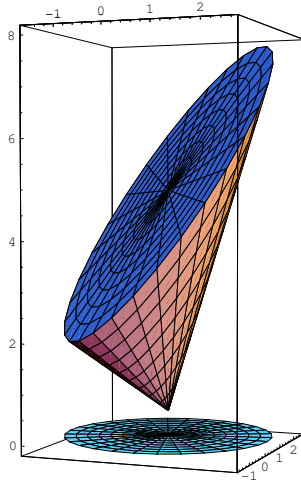


Figura 5: Segmento de cone inscrito no segmento oblíquo de parabolıide (vértice  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  e base no plano  $x_3 = x_1 + x_2 + 4$ ), e sua projeção no plano  $x_3 = 0$ .

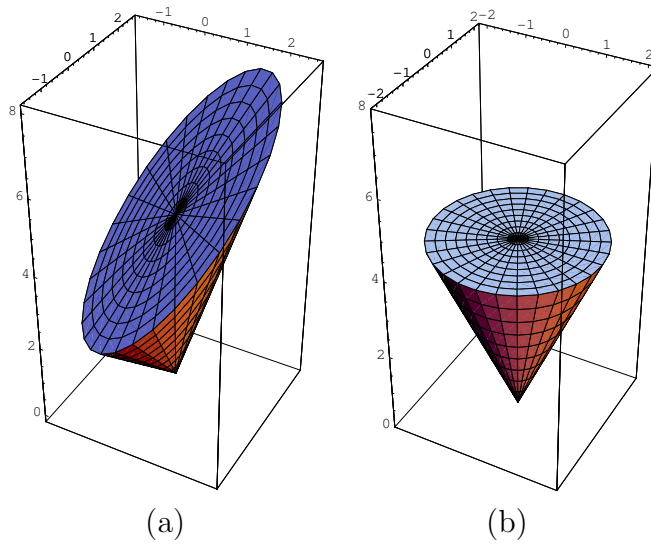


Figura 6: (a) Segmento de cone original (vértice  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  e base no plano  $x_3 = x_1 + x_2 + 4$ ) e (b) região transformada por  $\mathcal{T}$ , ambos com mesmo volume (o determinante da matriz jacobiana de  $\mathcal{T}$   1).

e usando (3), (4), e (5) segue que

$$\mathcal{V}_{SC_n} = \int_{\overline{SC_n}} dV_n = \int_{n\text{-retngulo}} \left| \det \left( \frac{\partial(v_1, \dots, v_n)}{\partial(\rho, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}, t)} \right) \right| d\rho d\phi_1 \cdots d\phi_{n-2} dt$$



$$\begin{aligned}
&= R_0^2 \int_0^1 t^{n-1} dt \int_{(n-1)\text{-retngulo}} \left| \det \left( \frac{\partial(u_1, \dots, u_{n-1})}{\partial(\rho, \phi_1, \dots, \phi_{n-2})} \right) \right| d\rho d\phi_1 \cdots d\phi_{n-2} \\
&= R_0^2 \frac{1}{n} \int_0^{R_0} \rho^{n-2} d\rho \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^\pi \sin \phi_2 d\phi_2 \cdots \int_0^\pi \sin^{n-3} \phi_{n-2} d\phi_{n-2} \\
&= \frac{R_0^2}{n} \frac{R_0^{n-1} \pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2} + 1)} = \frac{R_0^2}{n} \mathcal{V}_{n-1}(R_0). \tag{8}
\end{aligned}$$

### 2.3 A relação entre os $n$ -volumes

A relação procurada é estabelecida no seguinte resultado:

**Teorema 1.** *A relação existente entre os  $n$ -volumes de um segmento parabólico  $n$ -dimensional, obtido ao interceptarmos um  $n$ -parabolóide de revolução por um hiperplano, e do segmento de cone  $n$ -dimensional inscrito, de mesma base e com vértice no ponto do  $n$ -parabolóide onde o hiperplano tangente é paralelo ao hiperplano dado é*

$$\frac{\mathcal{V}_{SP_n}}{\mathcal{V}_{SC_n}} = \frac{2n}{n+1}. \tag{9}$$

Prova. Segue diretamente de (6) e (8). ■

A fórmula (9) evidencia a dimensão dos objetos envolvidos. Ela nos permite rever a relação obtida por Arquimedes para o caso plano (2-volume) como  $2 \times 2 / (2+1)$ , atribuindo um significado para a fração  $4/3$ .

Uma consequência interessante do resultado (9) é a interpretação de seu comportamento assintótico. As fórmulas (6) e (8) que obtivemos para os volumes dos objetos considerados, segmentos  $SP_n$  e  $SC_n$ , dependem diretamente do volume da base destes segmentos ( $(n-1)$ -bola). Conforme desenvolvido em [13], o volume da  $n$ -bola em  $\mathbb{R}^n$  tende para zero quando  $n$  tende para infinito. Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{V}_{SP_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2R_0^2}{(n+1)} \mathcal{V}_{n-1}(R_0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{V}_{SC_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_0^2}{n} \mathcal{V}_{n-1}(R_0) = 0.$$

No entanto, a relação (9) entre os  $n$ -volumes é crescente e limitada, com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{V}_{SP_n}}{\mathcal{V}_{SC_n}} = 2.$$

## 3 Outras extensões

Nesta seção, a relação volumétrica  $3 : 2 : 1$ , estabelecida por Arquimedes (*Sobre a Esfera e o Cilindro*, livro I [11]), entre o cilindro circular que circunscreve um hemisfério e o

cone inscrito com altura igual ao raio, é estendida para  $R^n$  e ampliada com a inserção do volume de um segmento reto de parabolóide adequado.

Com um encaminhamento análogo ao da obtenção da fórmula (8), podemos estabelecer a seguinte expressão para o volume de um cone circular reto em  $\mathbb{R}^n$ , de raio da base  $r$  e altura  $h$

$$\mathcal{V}_{n\text{-cone}}(r, h) = \frac{h}{n} \mathcal{V}_{n-1}(r). \quad (10)$$

Note que a base deste cone é uma  $(n-1)$ -bola em  $R^n$  e a altura é a distância do vértice ao hiperplano que define a base.

O  $n$ -volume do cilindro que o circunscribe, de altura  $h$  e raio da base  $r$ , é

$$\mathcal{V}_{n\text{-cilindro}}(r, h) = \int_{\mathcal{B}_{n-1}(r)} h dV_{n-1} = h \mathcal{V}_{n-1}(r), \quad (11)$$

sendo portanto  $n$  a relação entre os  $n$ -volumes destes dois objetos (ver Tabela 1).

Por outro lado, de (5), o volume de uma  $n$ -bola em  $\mathbb{R}^n$  pode ser expresso em termos do  $(n-1)$ -volume de uma  $(n-1)$ -bola por

$$\mathcal{V}_n(r) = \frac{2r}{n} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \mathcal{V}_{n-1}(r). \quad (12)$$

A extensão da relação de Arquimedes é obtida no resultado a seguir e ilustrada na Tabela 1:

**Teorema 2.** *A relação existente entre os  $n$ -volumes de um segmento de cilindro circular reto  $n$ -dimensional com altura igual ao raio da base, o hemisfério inscrito de mesmo raio, e o cone inscrito de mesma base e altura é*

$$\mathcal{V}_{n\text{-cilindro}}(r, r) : \mathcal{V}_{n\text{-hemisfério}}(r) : \mathcal{V}_{n\text{-cone}}(r, r) = n : \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} : 1. \quad (13)$$

Prova. Segue diretamente de (10)-(12). ■

**Tabela 1.** Extensão da relação de Arquimedes entre os volumes do cilindro, do hemisfério e do cone.

$n = \frac{\mathcal{V}_{n\text{-cilindro}}}{\mathcal{V}_{n\text{-cone}}}$	2	3	4	5	6	7	...	$n$
$\frac{\mathcal{V}_{n\text{-hemisfério}}}{\mathcal{V}_{n\text{-cone}}}$	$\frac{\pi}{2}$	2	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{15\pi}{16}$	$\frac{16}{5}$	...	$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

Para ampliar a relação de Arquimedes e incluir o volume do segmento reto de parabolóide usaremos o Teorema 1 e a aplicação  $\mathcal{T}$  definida em (7), que transforma o segmento oblíquo de cone  $n$ -dimensional em um segmento reto de cone equivalente (mesmo volume)

e vértice na origem. Esta transformação deixa invariante o parabolóide  $n$ -dimensional que abriga o segmento de parabolóide. De fato, dada a parametrização para  $SP_n$

$$SP_n = (u_1, \dots, u_{n-1}, (1-t)f(u_1, \dots, u_{n-1}) + tg(u_1, \dots, u_{n-1}))$$

com  $t \in [0, 1]$  e  $(u_1, \dots, u_{n-1})$  definido em (2), então

$$\mathcal{T}(SP_n) = (y_1, \dots, y_{n-1}, (1-t)\rho^2 + tR_0^2),$$

onde  $t \in [0, 1]$ ,  $\rho \in [0, R_0]$  e  $(y_1, \dots, y_{n-1})$  definido em (1) (ver figura 7 para ilustração em  $\mathbb{R}^3$ ).

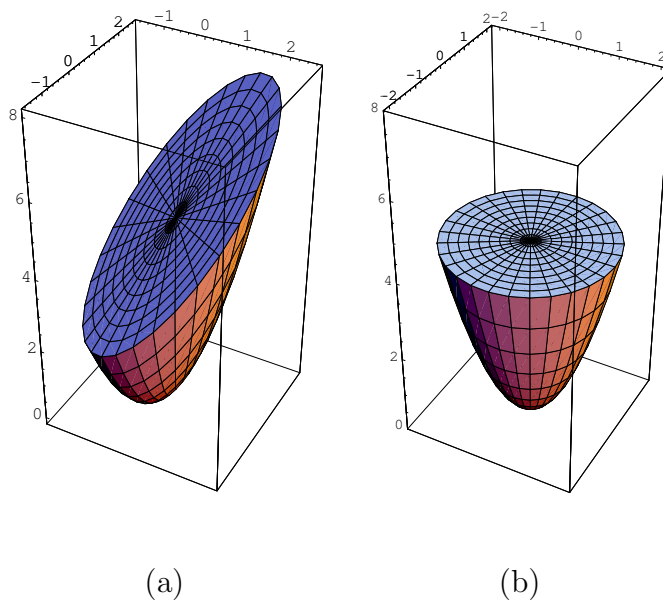


Figura 7: (a) Segmento oblíquo do parabolóide  $x_3 = x_1^2 + x_2^2$ , com base no plano  $x_3 = x_1 + x_2 + 4$ , e (b) segmento transformado por  $\mathcal{T}$ , com base no plano  $x_3 = \frac{9}{2}$ , ambos com mesmo volume.

Esta simplificação evidencia o segmento de cilindro circular  $n$ -dimensional que circunscreve os segmentos de parabolóide e de cone, com mesma base e altura que estes dois objetos (ver figura 8 para ilustração em  $\mathbb{R}^3$ ).

A ampliação da relação de Arquimedes é feita no próximo resultado, e ilustrada na figura 9:

**Corolário.** Para  $R_0 = 1$  vale a relação

$$\mathcal{V}_{n\text{-cilindro}}(1, 1) : \mathcal{V}_{n\text{-hemisfério}}(1) : \mathcal{V}_{SP_n} : \mathcal{V}_{n\text{-cone}}(1, 1) = n : \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} : \frac{2n}{n+1} : 1. \quad (14)$$

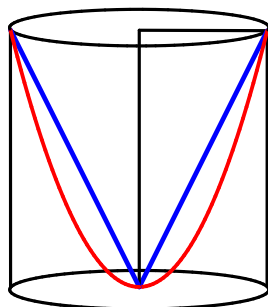


Figura 8: Configuração para ilustrar a relação volumétrica  $3 : \frac{3}{2} : 1$  entre o cilindro circular que circunscreve o segmento reto de parabolóide e o cone inscrito de mesma altura (Arquimedes, obra *Sobre Conóides e Esferóides* [11]).

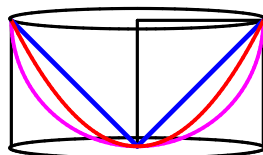


Figura 9: Esquema para ilustrar a relação de Arquimedes ampliada  $3 : 2 : \frac{3}{2} : 1$ , entre os objetos de mesma base (disco unitário): cilindro circular circunscrito, hemisfério, segmento reto de parabolóide com altura 1, e cone inscrito de mesma altura.

## 4 Desdobramentos

As naturezas histórica e geométrica do problema da quadratura oferecem um cenário rico para pesquisa e variações. Nesta perspectiva, os livros [5], [10] e o vídeo [3] são valiosas fontes de consulta. Ainda no caso plano existem peculiaridades interessantes de serem investigadas em cursos introdutórios de Cálculo e Geometria Analítica. Por exemplo, na seção de “problemas quentes” de [14, v.1,p.364] o caráter ótimo do triângulo inscrito no problema da quadratura plana é explorado. O módulo animado disponível em <http://www.ime.unicamp.br/~calculo/modulos/quadratura> ilustra este fato.

Uma aplicação no contexto da arquitetura naval e envolvendo a noção de centro de massa é apresentada no projeto “Parabolóides flutuantes de Arquimedes” ([6, p.932]). Esta proposta concretiza uma das situações trabalhadas nos livros *Corpos Flutuantes I e II* [11] de Arquimedes. Também baseado no conceito de centro de massa, o texto [7] faz um resgate do cálculo integral via centros de massa. Outra aplicação é encaminhada no artigo [8], que se inspira na cumbuca utilizada pelos seringueiros na coleta do látex para realizar uma viagem pela história do Cálculo. Esta cumbuca é um sólido de revolução cuja curva geratriz é constituída por um trecho de parábola e um segmento de reta.

As contribuições de Arquimedes, Pappus e Cavalieri são lembradas, acompanhadas dos conceitos e resultados matemáticos relacionados. Uma amostra deste tipo de abordagem, utilizando a ferramenta computacional, pode ser vista no módulo animado <http://www.ime.unicamp.br/~calculo/modulos/cumbuca>.

A proporcionalidade entre uma esfera e o cilindro que a circunscreve, válida tanto para suas áreas superficiais quanto para seus volumes, foi provavelmente a descoberta preferida de Arquimedes. Ele pediu a seus familiares que, quando morresse, inscrevessem em sua sepultura uma imagem representando esta relação, como a da figura 10(a) (ver [2]). Em [9] a relação  $2 : 3$  é estendida para uma nova família de objetos em  $\mathbb{R}^3$ , o *duplo  $n$ -bolo*, e o prisma circunscrito (ver figura 10(b)), mantendo-se válida para todo  $n$ .

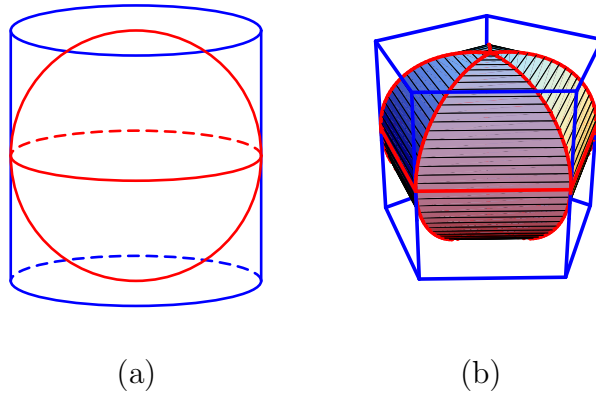


Figura 10: (a) Esfera e cilindro circunscrito, e (b) duplo 5-bolo e prisma circunscrito.

Sem dúvida, os trabalhos de Arquimedes [11] oferecem uma vasta gama de possibilidades para investigação. Com este artigo recuperamos passos da trilha percorrida por este notável geômetra com as ferramentas e a linguagem atualmente disponíveis. Sob os ombros deste gigante, vislumbramos algumas extensões e ampliações de suas descobertas. Ele próprio já acreditava na potencialidade de suas contribuições, conforme ilustra o trecho da carta a Eratóstenes na introdução de seu livro intitulado *O Método* (cf. [2]):

(...) Estou convencido de que ele será valioso para a matemática pois pressinto que outros investigadores da atualidade ou do futuro descobrirão, pelo método aqui descrito, outras proposições que não me ocorreram.

## Referências

- [1] T. M. Apostol, *Calculus*. vol.I e II, 2.ed. New York: John Wiley & Sons, 1969.
- [2] G. Ávila, Arquimedes, o rigor e o método. *Matemática Universitária*, número 4, pp.27-45, 1986.

- [3] S. Costa, M. A. Grou (coord.) *Pela trilha de Arquimedes*. (vídeo) Editora da Unicamp, 2002.
- [4] K. Devlin, *Matemática: A Ciência dos Padrões*, Porto: Porto Editora, 2002.
- [5] C. H. Edwards, Jr. *The Historical Development of the Calculus*, New York: Srpingerverlag, 1979.
- [6] C. H. Edwards, Jr., D. E. Penney, *Calculus with Analytic Geometry*, 5.ed. New Jersey: Prentice Hall, 1998.
- [7] V. L. Figueiredo, S. A. Santos, “Um panorama do Cálculo integral via centros de massa”. Minicurso proferido no XXI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC), Caxambu, MG, setembro de 1998.
- [8] V. L. Figueiredo, M. P. Mello, S. A. Santos, “Com a mão na cumbuca, XXIX Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia - COBENGE 2001, CD-Rom (7 pág.).
- [9] V. L. Figueiredo, S. A. Santos, M. P. Mello, “An Archimedean Ratio Extended”. Submetido
- [10] E. Hairer, G. Wanner, *Analysis by Its History*, New Work: Springer-Verlag, 1995.
- [11] T. L. Heath (ed.), *The works of Archimedes* (with the Method of Archimedes), New York: Dover, 1912.
- [12] D. Nelson (ed.), *The Penguin Dictionary of Mathematics*. 2ed. London: Penguin Books, 1998, 461p.
- [13] D. J. Smith, M. K. Vanamamurthy, How Small Is a Unit Ball?, *Mathematics Magazine* 62(2), pp.101-107, 1989.
- [14] J. Stewart, *Cálculo*. vol. I e II, 4.ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2001.