

# RELATÓRIO DE PESQUISA

## O problema de Apolônio: aspectos históricos e computacionais<sup>1</sup>

Profa. Dra. Sandra Augusta Santos  
Departamento de Matemática Aplicada - IMECC - Unicamp  
<http://www.ime.unicamp.br/~sandra>

André Luis Trevisan - R.A. 015477  
Estudante de Graduação - DMA - IMECC - Unicamp  
[trevisan@ime.unicamp.br](mailto:trevisan@ime.unicamp.br)

### Resumo

Este trabalho combina elementos de história da matemática com o recurso computacional da Geometria Dinâmica (GD) para contextualizar e resolver o *problema de Apolônio* (determinar o círculo tangente a três círculos dados, ou possíveis degenerações). Tem dois objetivos principais. O primeiro é traçar um percurso do problema de Apolônio ao longo da história, o que ilustra a potencialidade de um problema clássico como motivador para novas investigações, além de possibilitar um olhar panorâmico sobre a própria Matemática, e em particular sobre a Geometria. É notável o elenco de pesquisadores conhecidos que se dedicaram a resolver este problema. O segundo objetivo é resolver efetivamente o problema de Apolônio utilizando como ingrediente essencial as cônicas, curvas que consagraram esse geômetra grego. Embora não sejam curvas construtíveis com régua e compasso, os pontos das cônicas podem ser determinados combinando-se técnicas de Desenho Geométrico e propriedades destas curvas planas. Nesta perspectiva, as ferramentas da GD permitem a efetivação da abordagem escolhida para a solução do problema. Aspectos intrínsecos do uso do recurso computacional na solução do problema em questão são discutidos. Uma breve reflexão sobre a repercussão da GD no ensino e aprendizagem da Geometria finaliza este trabalho.

**Palavras-chave** Problema de Apolônio; cônicas; construções geométricas; Geometria Dinâmica.

---

<sup>1</sup>Apoios FAPESP 02/13369-8 e CNPq 300206/96-8.

# 1 Introdução

*Ora com propósitos pacíficos, como utilizado por Newton na determinação da órbita de corpos celestes, ora com fins bélicos, na localização da arma inimiga a partir do som detectado em três pontos diferentes, o problema de Apolônio fez-se presente em diversos momentos e instigou muitas mentes criativas. . .*

(adaptado de [12, p.447])

No período conhecido como ‘Idade Áurea’ da Matemática grega (cerca de 300 a 200 a.C.), Apolônio propõe um problema que viria a ser conhecido pelo seu nome: *Encontrar um círculo tangente a três outros círculos, podendo estes ser degenerados em retas (círculo de raio infinito) ou pontos (círculo de raio zero).*

Desde então, diversos matemáticos têm se empenhado na busca de soluções para o atracente problema de Apolônio. As abordagens dadas ao problema estão ligadas principalmente ao instrumental matemático disponível em cada época, levando-nos a acompanhar a trajetória da geometria ao longo do tempo, e apreciar algumas das descobertas daqueles que foram construindo e trilhando este caminho.

O presente artigo aponta diferentes abordagens empregadas ao longo da história na busca de soluções para o problema de Apolônio, e explora com detalhes o uso das secções cônicas na determinação destas soluções. A sistematização das construções por meio da ferramenta computacional da Geometria Dinâmica (GD) tira proveito deste ambiente para validação dos procedimentos propostos e construção efetiva da solução. Inclui uma breve análise dos resultados obtidos e algumas reflexões acerca das potencialidades e limitações da GD no ensino e aprendizagem de Geometria.

## 2 Panorama histórico do problema de Apolônio

Apolônio, juntamente com Euclides (c. 300-260 a.C.) e Arquimedes (c. 287-212 a.C.), foram matemáticos que “. . . se destacaram a grande distância dos demais de sua época, assim como da maior parte de seus predecessores e sucessores” (cf. Boyer, [5, p.104 §1]). Sugere-se que Apolônio de Perga tenha vivido de 262 a 190 a.C., e pouco se sabe de sua vida, já que a maior parte de suas obras desapareceram. Na verdade, apenas dois de seus diversos trabalhos se preservaram substancialmente: *Dividir segundo uma razão* e *As cônicas*, sendo esta considerada sua obra prima. Este trabalho possui cerca de quatrocentas proposições em seus oito livros, e só os quatro primeiros ainda existem, em grego. Há também uma versão traduzida dos três livros seguintes, feita pelo matemático árabe Tâbit ibn Qorra (826-901). Posteriormente, em 1710, Edmond Halley (1656-1742) traduziu os sete livros para o latim, o que abriu caminhos para futuras traduções em outras línguas. Esta obra extraordinária traz um estudo exaustivo das curvas que a nomeiam, e supera completamente os trabalhos anteriores de Menaecmus (c.380-320 a.C.) e Euclides sobre o assunto. Mais do que isso, afirma-se que Apolônio tenha completado e ampliado a obra *Cônicas* de Euclides, composta de quatro livros, que, juntamente com outros trabalhos perdidos, é conhecida apenas por referências posteriores.

O problema de Apolônio envolve dez configurações possíveis, e é oriundo do tratado *Sobre*

*tangências* (do original *De tactionibus*), do qual temos informações graças às descrições dadas por Pappus<sup>2</sup>. Conforme a combinação dos objetos iniciais pelos quais deve passar o círculo procurado, ponto (P), reta (R) ou círculo (C), as dez configurações possíveis são: (1) PPP; (2) RRR; (3) PPR; (4) PPC; (5) PCC; (6) PCR; (7) PRR; (8) CCR; (9) RRC e (10) CCC.

Os dois primeiros casos, que são os mais fáceis, aparecem no Livro IV dos *Elementos* de Euclides, em conexão com o círculo circunscrito e o inscrito a um triângulo. Os seis casos seguintes foram tratados no Livro I da obra *Sobre tangências*. As configurações restantes (RRC e CCC) ocupavam todo o Livro II desta mesma obra.

É no período do renascimento italiano (séc. XV) que o interesse em restaurar e reconstruir obras gregas perdidas atinge seu auge. Este era o passatempo favorito de muitos matemáticos, e seus trabalhos baseavam-se em trechos, citações, alusões e referências ao material disponível dos autores do período clássico.

Porém, é apenas em meados do século XVII que o tratado *Sobre tangências* é recuperado. François Viète (1540-1603) restaurou e publicou esta obra com o título *Apollonius Gallus*, incluindo a solução do problema de Apolônio. Viète considerou um número de casos especiais nos quais um ou todos os círculos são reduzidos a pontos ou retas<sup>3</sup>. Ele antecipou resultados da teoria dos círculos que seriam sistematizados duzentos anos depois, com a *Geometria Descritiva* de Gaspard Monge (1746-1818) e seus discípulos.

Como um desafio, Viète propôs o problema de Apolônio ao matemático belga conhecido como Adrianus Romanus (1561-1615), que o resolveu determinando o centro do círculo procurado como ponto comum a duas hipérbolas. Viète considerou insatisfatória a solução apresentada por Romanus, alegando o uso de curvas impossíveis de serem construídas apenas com régua e compasso.

Baseando-se na solução apresentada por Romanus, e fazendo uso das propriedades da hipérbole, Isaac Newton (1642-1727) apresentou a solução para o problema em sua famosa obra *Principia*. Na formulação de Newton, a intersecção de uma reta com um círculo substituiu a intersecção das duas hipérbolas do processo de Romanus, contemplando assim a construção com régua e compasso almejada por Viète.

É na perspectiva dos problemas como desencadeadores de descobertas e sistematizações que podemos situar o surgimento da *Geometria Analítica*, em 1637 (cf. [21, p.87], a partir do trabalho de Descartes (1596-1650) com as cônicas<sup>4</sup> e com o problema de Pappus<sup>5</sup>. As ferramentas da Geometria Analítica ofereceram, sem dúvidas, novos recursos na busca de soluções para o problema de Apolônio. Sabe-se que Descartes investigou este problema, não obtendo, porém,

---

<sup>2</sup>Em seu trabalho *Coleção Matemática*, Pappus (c. 300 d.C) apresenta uma compilação da geometria da época, juntamente com comentários, proposições originais e aprimoramentos de muitas das obras perdidas de seus predecessores, principalmente dos grandes matemáticos gregos do século III a.C.

<sup>3</sup>Ver [23] para mais detalhes sobre o trabalho de Viète.

<sup>4</sup>Descartes descobriu um padrão alternativo para a descrição das cônicas. Percebeu que ao introduzir um sistema de coordenadas, estas curvas podem ser descritas por meio de equações de segundo grau envolvendo duas variáveis.

<sup>5</sup>No livro VII da obra *Coleção Matemática*, Pappus discute o problema conhecido como ‘lugar geométrico das quatro retas’, derivado do problema de Apolônio: *Dadas quatro retas, encontrar o lugar geométrico do ponto P tal que o produto das distâncias de P a duas delas é proporcional ao produto das distâncias às outras duas*, cuja solução é uma seção cônica. Pappus generalizou esse problema para  $n$  retas, onde  $n > 4$  (cf. [21, p.343]).

resultados relevantes<sup>6</sup>. Também a princesa Elizabeth (1596-1662), esposa do rei Frederico V da Boêmia, utilizou o sistema cartesiano em seu trabalho com o problema de Apolônio, comunicando seus eventuais progressos ao próprio Descartes. Contudo, a dificuldade em se lidar com as expressões algébricas decorrentes culminou com o fracasso na tentativa de se resolver tal problema por meio de um sistema de coordenadas. Também Leonard Euler (1707-1783) dedicou-se à busca de uma solução algébrica para o problema de Apolônio.

Com a revitalização da geometria sintética<sup>7</sup>, iniciada por Monge, pai da *Geometria Descritiva*, um novo repertório de elementos teóricos para o círculo<sup>8</sup> se consolidava, oferecendo novos olhares para o desafiador problema de Apolônio. Outro ramo da geometria que ampliou as ferramentas disponíveis para se analisar esse problema foi a *Geometria Projetiva*. Os estudos da Geometria Projetiva tiveram início com Girard Desargues (1591-1661), que em 1639 publicou um trabalho sobre seções cônicas, mostrando, entre outros resultados, que a projeção de uma cônica é sempre uma cônica. O célebre teorema de Desargues<sup>9</sup> foi praticamente ignorado até o século XIX, quando Poncelet (1788-1867) formalizou a Geometria Projetiva e introduziu o princípio da dualidade. A teoria dos pólos e das polares da Geometria Projetiva é a mais diretamente aplicável aos círculos, e conseqüentemente ao problema de Apolônio. O próprio Poncelet, ainda estudante, em 1811, encontrou uma solução para o problema de Apolônio (cf. [12, p. 448]). Outro aluno famoso que também se aventurou a considerar este célebre problema foi Augustin L. Cauchy (1789-1857).

Da mesma forma que Newton trabalhou com a solução de Romanus, Carl F. Gauss (1777-1855) simplificou e completou uma solução produzida por Lazare Carnot (1753-1823) para o problema de Apolônio. Embora todas estas soluções tivessem sido produzidas na era ‘moderna’, ainda não atendiam ao almejado novo paradigma: encontrar um método direto, aplicável a todos os casos, e se possível, que permitisse determinar o número de soluções admissíveis para o problema.

A teoria das inversões<sup>10</sup> foi desenvolvida na primeira metade do século XIX. O matemático dinamarquês Julius Pedersen (1839-1910) produziu uma solução bastante elegante para o problema de Apolônio baseada em inversões (cf. [12, p.451]). Resultados da geometria das inversões permitem sistematizar a análise das possíveis configurações dos três objetos dados no problema de Apolônio, classificando-as e determinando o número efetivo de soluções nos diferentes casos. Este detalhamento é feito no artigo de Bruen et. al [9], que simplifica o trabalho notável de Muirhead [20], de 1898, no qual o autor faz uma enumeração exaustiva, porém incompleta, das várias possibilidades.

---

<sup>6</sup>Segundo Court [12], o próprio Descartes considerou insatisfatória a solução que levou a cabo. Algumas das relações obtidas por Descartes são discutidas por Coxeter em seu artigo [13].

<sup>7</sup>Nomenclatura dada em contraposição à geometria analítica, e refere-se à geometria que não se apóia em recursos algébricos para a sua sistematização; o mesmo que geometria axiomática.

<sup>8</sup>Por exemplo, potência de um ponto em relação a um círculo, eixo radical de dois círculos, centros (e eixos) de semelhança para dois círculos, feixe de círculos, entre outros.

<sup>9</sup>*Se as linhas que passam pelos vértices correspondentes a dois triângulos têm um ponto em comum, então as interseções dos prolongamentos dos lados correspondentes dos triângulos estão alinhadas.*

<sup>10</sup>Dados um círculo de raio  $r$  e centro  $O$  e um ponto  $P$  não pertencente ao círculo, a *inversão* é o processo de se determinar o ponto  $P'$  na semi-reta  $\overrightarrow{OP}$  para o qual  $OP \cdot OP' = r^2$ . Diz-se que  $P'$  é o inverso de  $P$  e vice-versa.

Com relação a métodos diretos para o problema de Apolônio, a primeira solução foi publicada por Joseph Gergonne (1771-1859), que a obteve analiticamente. Seu elegante procedimento é descrito no livro de Berger [4, p.317-8], bem como nas construções geométricas de Carvalho [11, p.191], e utiliza elementos mais elaborados da teoria dos círculos, como centro radical, centros de semelhança e polares.

Poncelet, em 1822, também encontrou uma solução direta, apoiando-se em argumentos puramente geométricos, sendo posteriormente revista por Maurice Fouché, em 1892, sob o ponto de vista de círculos isogonais<sup>11</sup>, e complementada com uma discussão detalhada do possível número de soluções em termos das posições relativas dos objetos iniciais.

Vale mencionar o interesse dos matemáticos japoneses do período Edo (1603-1867) por problemas geométricos envolvendo tangências. Gravuras em madeira, denominadas *Sangaku*, eram oferecidas aos deuses em santuários e templos, e apresentavam resultados geométricos por meio de figuras de cunho artístico, acompanhadas de um texto explicativo. A figura 1 contém o Sangaku de Osaka, com alguns problemas relacionados ao de Apolônio. O artigo do professor Arconcher [2] e suas referências oferecem mais detalhes sobre a geometria sagrada dos Sangaku.



Figura 1: Sangaku da cidade de Osaka, imagem extraída de <http://www.wasan.jp/english/>, acessado em 27/05/04.

Conforme afirma Court, “o progresso da geometria não só propiciou novas e admiráveis soluções para o problema de Apolônio, como também transformou e generalizou o próprio problema” (cf. [12, p.451]). O primeiro passo natural para generalizar o problema de Apolônio é estender o contato entre os objetos a interceptos isogonais, reduzindo a tangência ( $0^\circ$  ou  $180^\circ$ ) a um caso particular. Outra possibilidade é supor que os três círculos, ao invés de coplanares, pertencem a uma mesma esfera. Carnot, Gergonne e Charles Dupin, entre outros, analisaram esta extensão. Indo além, a esfera poderia ser substituída por uma superfície quádrlica, e os círculos, por seções planas nesta superfície.

Ainda no século XVII, Pierre Fermat (1601-1665) formulou o seguinte problema tridimensional: construir uma esfera tangente a quatro esferas dadas, que ficou conhecido como *problema de Fermat*. Aparentemente, foi Carnot, em 1803, o primeiro a dar atenção a este problema.

<sup>11</sup>Círculos isogonais são aqueles que se cortam segundo um mesmo ângulo.

Soluções analíticas e sintéticas para o problema de Fermat foram propostas, respectivamente, por Carnot em 1803 e Dupin em 1831, e por Hachette em 1808 e Français em 1809.

Para uma abordagem consistente para o problema de Fermat, nos mesmos moldes feitos para o problema de Apolônio, foi necessário encontrar na esfera os elementos geométricos que desempenhassem papéis análogos aos do círculo. Assim, os centros de semelhança, planos radicais e feixes de esferas permitiram que os problemas de Apolônio e de Fermat fossem trabalhados simultaneamente.

### 3 Motivação para este trabalho

Segundo Boyer, "... assim como *Os Elementos* de Euclides substituíram textos elementares anteriores (...), o tratado sobre *Cônicas* de Apolônio derrotou todos os rivais no campo das seções cônicas" [5, p.107 §5]. Foi devido à grandiosidade desta obra que o título de 'o Grande Geômetra' foi atribuído a este matemático do século III a.C por seus contemporâneos.

Apesar de não se conhecer exatamente como Apolônio resolveu seu célebre problema, sabe-se que Viète tentou reconstruir a solução de Apolônio com base em resultados de Pappus (cf. [9, p.97]). Heath, em seu livro, procura resgatar o procedimento de Apolônio (cf. [19, p.182]), assumindo dois lemas de Pappus<sup>12</sup> e um problema auxiliar<sup>13</sup>.

Embora Viète tenha criticado a solução não construtível e baseada em cônicas que foi apresentada por Romanus para o problema de Apolônio, neste trabalho retomamos a idéia de Romanus, combinando as curvas que tornaram célebre 'o Grande Geômetra' para construir a solução de seu famoso problema.

Fomos inspirados pelo material do anexo 2 do relatório de iniciação científica de Pécora Jr. & Santos [22], que serviu como ponto de partida para sistematizarmos as construções geométricas necessárias. Com a disponibilidade de programas de *Geometria Dinâmica* (GD), em particular do *software Cabri-Géomètre*<sup>14</sup>, aliamos a construção por técnicas de Desenho Geométrico aos recursos desse *software*, que se mostrou um instrumento essencial para a viabilização da abordagem escolhida.

De qualquer forma, mesmo com todas as facilidades que proporciona, o recurso computacional necessita de instruções precisas para se atingir o objetivo desejado. Além disso, para que o dinamismo dos objetos possa ser efetivado, é necessário que as construções estejam bem definidas e não tenham ambiguidades, para se adequarem ao paradigma '1-construção,  $n$ -testes' (cf. [7, p.28]), de modo a acomodar as diversas possibilidades que a construção estática do papel, do tipo '1-construção, 1-teste', não precisa contemplar. Vemos, portanto, que o ambiente

---

<sup>12</sup>Lema 1. *Se dois círculos se tocam internamente ou externamente, qualquer reta que passe pelo ponto de contato divide os círculos em segmentos respectivamente semelhantes.* Lema 2. *Dados três círculos, seus seis centros de semelhança (externos e internos) pertencem, três a três, a quatro retas.*

<sup>13</sup>Inscrever, em um círculo dado, um triângulo cujos lados, quando prolongados, passem por três pontos colineares dados.

<sup>14</sup>O *Cabri-Géomètre* é um programa computacional educativo desenvolvido por Jean-Marie Laborde e Franck Bellemain no Institut d'Informatique et Mathématiques Appliquées de Grenoble (IMAG), da Université Joseph Fourier em Grenoble, França. Sua primeira versão é de 1985. A palavra *Cabri* é a abreviatura de *Cahier de Brouillon Intéreactif* (caderno de rascunho interativo).

informatizado lança novos desafios aos seus usuários. É preciso planejar construções robustas, identificando as hipóteses de caráter local, subjacentes às construções estáticas e que precisam ser estendidas. Também é desejável sistematizar procedimentos repetitivos na forma de *macroconstruções*. No artigo [7], o professor Brandão discute e exemplifica estes agrupamentos. Finalmente, é essencial que se compreenda e que se saiba justificar os resultados obtidos.

Acreditamos que, assim como as ‘descobertas’ das Geometrias Descritiva e Projetiva, em que novos elementos teóricos acerca dos círculos propiciaram uma revitalização na busca de soluções para o problema de Apolônio, a ferramenta computacional oferece uma ampliação dos recursos disponíveis para esta mesma busca. Faz-se necessário, porém, que o elemento humano criativo e indagador detecte as propriedades essenciais, combine-as com a potencialidade tecnológica e torne-se capaz de produzir suas próprias soluções. É sob esta perspectiva que procuramos encaminhar este trabalho.

## 4 Apolônio e as cônicas

O grego Menaecmus foi o primeiro a estudar as cônicas, identificando-as como seções de diferentes tipos de cones circulares. Também se tem notícia das investigações de Conon de Samos (c. 245 a.C.) acerca destas curvas. Apolônio de Perga, por volta de 225 a.C. produziu um extenso estudo em seu livro *As cônicas*, mostrando que as curvas que dão nome à obra podiam ser obtidas como diferentes seções de qualquer superfície cônica circular. Foi ele, talvez seguindo sugestão de Arquimedes, quem nomeou as seções cônicas com os termos *elipse*, *hipérbole* e *parábola*. Admitindo que a superfície cônica tem duas folhas, Apolônio mostrou que a hipérbole tem dois ramos. Embora à primeira vista as três cônicas possam parecer essencialmente distintas, quer em sua forma, quer pelas propriedades que satisfazem, é o fato de terem sido obtidas como cortes em cones duplos que as reúne em uma mesma família. É interessante notar que apesar das curvas serem planas, o padrão unificador é tridimensional (cf. [10, p.123]).

De acordo com Boyer, Apolônio analisou as propriedades fundamentais das cônicas “mais completamente e com mais generalidade que nos escritos de outros autores” (cf. [5, p.109 §9]). De fato, já no primeiro livro, Apolônio desenvolve a chamada *teoria dos diâmetros conjugados*<sup>15</sup>, usando um par destes equivalentemente aos eixos coordenados oblíquos.

Ainda segundo Boyer, “os métodos de Apolônio, em *As cônicas*, em muitos pontos, são tão semelhantes aos modernos que às vezes se considera seu tratado como uma espécie de geometria analítica, antecipando o trabalho de Descartes em 1800 anos<sup>16</sup>” (cf. [5, p.114 §16]).

Vale destacar, porém, que o sistema de coordenadas utilizado por Apolônio e seus antecessores era sempre considerado *a posteriori* sobre uma curva dada a fim de se estudar suas propriedades. Não parece haver exemplo, na geometria antiga, de um estabelecimento *a priori* do sistema de coordenadas para fins de representação gráfica de uma equação. Podemos assim dizer que na geometria grega as equações eram determinadas pelas curvas, e não o contrário.

---

<sup>15</sup>Apolônio mostrou que os pontos médios de um conjunto de cordas paralelas a um diâmetro de uma elipse ou hipérbole formarão um segundo diâmetro, sendo os dois chamados ‘diâmetros conjugados’.

<sup>16</sup>O tratamento de seções cônicas por meio de coordenadas iniciou-se no século XVII, quando Jan de Witt (1629-1672), e, independentemente, John Wallis (1616-1703), as definem em termos de foco e diretriz.

Os trabalhos de Euclides e Arquimedes, assim como as *Seções cônicas* de Apolônio mantiveram sua utilidade como apoio à pesquisa até o século XVII, quando Johannes Kepler (1571-1630) se dedicou a um estudo profundo dos movimentos dos planetas e suas órbitas (cf. [10, p.122]).

## 5 As cônicas como lugares geométricos

Nosso interesse neste trabalho é descrever as cônicas por meio de suas propriedades geométricas, do mesmo modo que foram introduzidas pelos gregos há mais de dois mil anos.

Com o propósito de caracterizar estas curvas planas como lugares geométricos<sup>17</sup> de pontos do plano, convém utilizar definições que dependem de pontos especiais desse plano, pré-fixados e chamados *focos*. Estas definições são apresentadas a seguir.

- A **elipse** é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante.
- A **hipérbole** é o lugar geométrico dos pontos do plano para os quais o valor absoluto da diferença das distâncias a dois pontos fixos é constante.
- A **parábola** é o lugar geométrico dos pontos cujas distâncias a um ponto fixo e a uma reta fixa, denominada *diretriz*, é constante.

Em outras palavras, a elipse, a hipérbole e a parábola correspondem a trajetórias de pontos no plano que se movem de modo a manter constante, respectivamente, a soma de suas distâncias a dois pontos fixos, o valor absoluto da diferença entre as distâncias a dois pontos fixos, ou a distância entre um ponto e uma reta, ambos fixos.

## 6 Cônicas e o problema de Apolônio: indo além da solução de Romanus

A solução do problema de Apolônio utilizando as curvas planas que o consagraram, empregada por Romanus para o caso CCC, baseia-se em tomar dois dos objetos dados (pontos, retas ou círculos), determinar o lugar geométrico (LG) dos pontos equidistantes a eles e fazer o mesmo para o par formado por um destes dois objetos e o terceiro. A interseção destes dois LG's será o centro do círculo solução. A partir do centro determina-se os possíveis pontos de tangência ou contato: o próprio ponto, quando este é um dos três objetos, o pé da perpendicular à reta dada passando pelo centro obtido, ou ainda, os pontos em que as semi-retas com origem no centro que foi determinado e que passam pelo centro do círculo dado interceptam tal círculo. Finalmente, com os pontos de contato estabelecidos, pode-se traçar a solução desejada.

---

<sup>17</sup>Uma figura é um *lugar geométrico* se, e somente se, todos os pontos dessa figura, e somente eles, têm uma propriedade característica comum.



Buscando ampliar a idéia de Romanus para os demais casos, descrevemos a seguir os procedimentos utilizados para determinação dos objetos correspondentes ao LG dos pontos equidistantes a pontos, retas e círculos combinados entre si. Utilizando técnicas de desenho geométrico, encaminhamos a construção de pontos pertencentes a estas curvas, denominados *pontos interessantes* (PI's).

### 6.1 Pontos equidistantes a dois pontos não coincidentes

Traça-se a mediatriz do segmento cujas extremidades são os dois pontos dados. Este será o LG dos pontos equidistantes.

### 6.2 Ponto equidistante a duas retas não coincidentes

1. Retas paralelas: Traça-se uma perpendicular às duas retas dadas, que as cruza em dois pontos  $A$  e  $B$ . A seguir, traça-se a mediatriz do segmento  $\overline{AB}$ . Esta reta é o LG procurado.
2. Retas concorrentes: Traçam-se as bissetrizes dos ângulos formados pelas duas retas, que comporão o LG dos pontos equidistantes.

### 6.3 Pontos equidistantes a uma reta $r$ e um ponto $A$

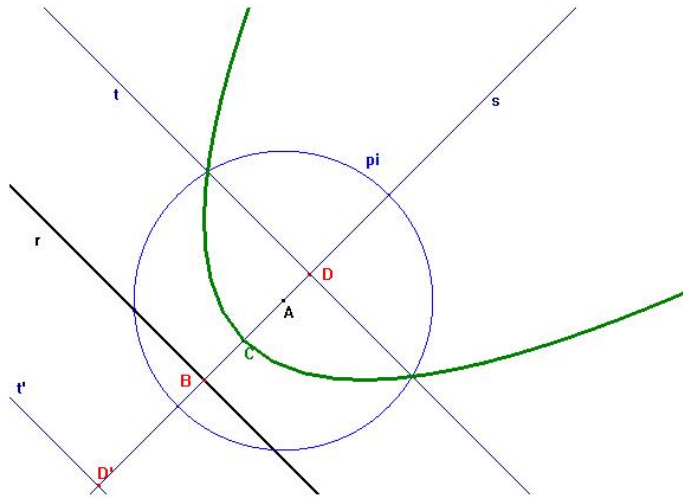


Figura 2: Parábola como LG dos pontos equidistantes a um ponto  $A$  e uma reta  $r$ .

1. Traça-se a perpendicular ( $s$ ) à reta  $r$  passando pelo ponto  $A$ . Se  $A \in r$ , a reta  $s$  é o LG procurado. Caso contrário, a reta  $s$  cruza  $r$  em um ponto que denominaremos  $B$ ;
2. Chamemos de  $C$  o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ , sendo tal ponto um PI;
3. Traça-se um círculo  $\pi$  com centro em  $A$  e raio  $\rho > AC = \frac{AB}{2}$ ;

4. Seja  $D$  o ponto que dista  $\rho$  de  $B$  e pertence à reta  $s$  e ao interior de  $\pi$ ;
5. Por  $D$  traça-se uma perpendicular  $t$  à  $s$  (tal reta será paralela à reta  $r$ );
6. Os pontos em que a reta  $t$  cruza o círculo  $\pi$  são PI's.

Repetimos o procedimento descrito para diferentes valores de  $\rho$ . A curva obtida pela união dos PI's será uma *parábola* com foco no ponto  $A$  e reta diretriz  $r$  (ver figura 2). No caso em que o ponto  $A$  está sobre a reta, a parábola se degenera na reta  $s$ , perpendicular a  $r$  passando por  $A$ .

#### 6.4 Pontos equidistantes a uma reta $r$ e um círculo $\pi$ com centro $C_1$

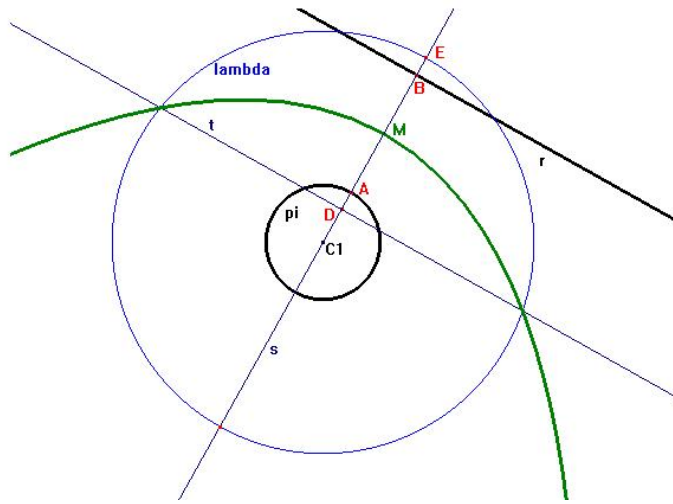


Figura 3: Parábola como LG dos pontos equidistantes a uma reta  $r$  e um círculo  $\pi$ .

1. Se a reta  $r$  e o círculo  $\pi$  se interceptam, ou se tangenciam, o(s) ponto(s) comum(ns) é (são) PI(s).
2. Traça-se a perpendicular ( $s$ ) à reta  $r$  passando pelo centro  $C_1$ , que cruzará  $r$  em um ponto  $B$ ;
3. A reta  $s$  cruza o círculo  $\pi$  em dois pontos, sendo o mais próximo de  $r$  designado por  $A$ . Caso os pontos  $C_1$  e  $B$  coincidam, as intersecções entre a reta  $s$  e o círculo  $\pi$  serão denominadas  $A_1$  e  $A_2$ . O ponto médio  $M$  do segmento  $\overline{AB}$  é um PI. Se  $C_1$  e  $B$  coincidem, os pontos médios dos segmentos  $\overline{A_1B}$  e  $\overline{A_2B}$  são PI's, cada um pertencente a uma curva;
4. Com um raio  $\rho > \frac{AB}{2} + \text{raio de } \pi$ , traça-se um círculo  $\lambda$  com centro em  $C_1$ ;
5. O círculo  $\lambda$  cruza a reta  $s$  em dois pontos, sendo o mais próximo de  $r$  chamado  $E$ , quando  $B$  é distinto de  $C_1$ . Chamaremos as intersecções de  $E_1$  e  $E_2$  no caso em que  $C_1$  e  $B$  coincidem;

6. Encontra-se um ponto  $D$  pertencente à semi-reta  $\overrightarrow{BC_1}$  tal que  $AE = BD$ ;
7. Por  $D$  traça-se uma paralela  $t$  à reta  $r$ , que cruza  $\lambda$  em dois PI's. Caso  $B$  e  $C_1$  coincidam, traçam-se paralelas  $t_1$  e  $t_2$ , por  $E_1$  e  $E_2$ , respectivamente. Cada reta traçada cruza  $\lambda$  em dois PI's.

A curva obtida é uma *parábola*, com foco  $C_1$  e reta diretriz  $m$ , paralela à reta  $r$  que dista (raio de  $\pi$ ) unidades de  $r$  e que não cruza o segmento  $\overline{C_1B}$  (figura 3). Sempre que a reta  $r$  interceptar o círculo  $\pi$  teremos duas parábolas com concavidades contrárias. No caso em que os pontos  $C_1$  e  $B$  coincidem, elas serão simétricas. Quando a reta  $r$  é tangente ao círculo  $\pi$ , uma das parábolas degenera-se em uma semi-reta. Ao tentarmos obter esta configuração, simplesmente movendo-se o círculo  $\pi$  para que tangencie a reta  $r$ , notamos que a parábola não se converte semi-reta esperada, já que não conseguimos um único ponto de tangência, conforme ilustra a figura 4.

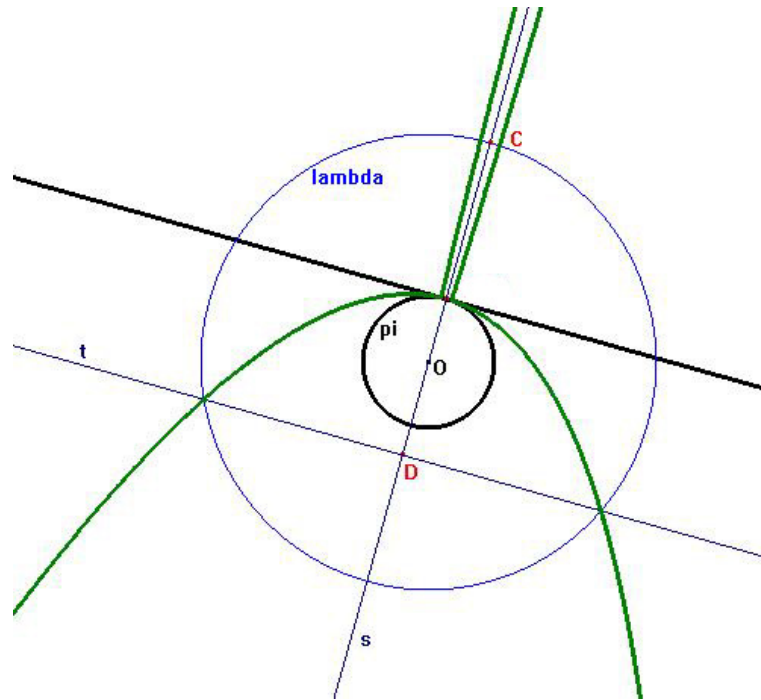


Figura 4: A menor abertura conseguida para a parábola ao tentarmos encontrar ‘manualmente’ o ponto de tangência entre o círculo  $\pi$  e a reta  $r$ .

### 6.5 Pontos equidistantes a dois círculos $\pi$ e $\lambda$ , com centros $C_1$ e $C_2$ , respectivamente

1. Se os círculos se interceptam, os pontos de intersecção são PI's;
2. Sejam as semi-retas  $r$  e  $s$  traçadas cada uma a partir dos centros  $C_1$  e  $C_2$  respectivamente, em qualquer direção;

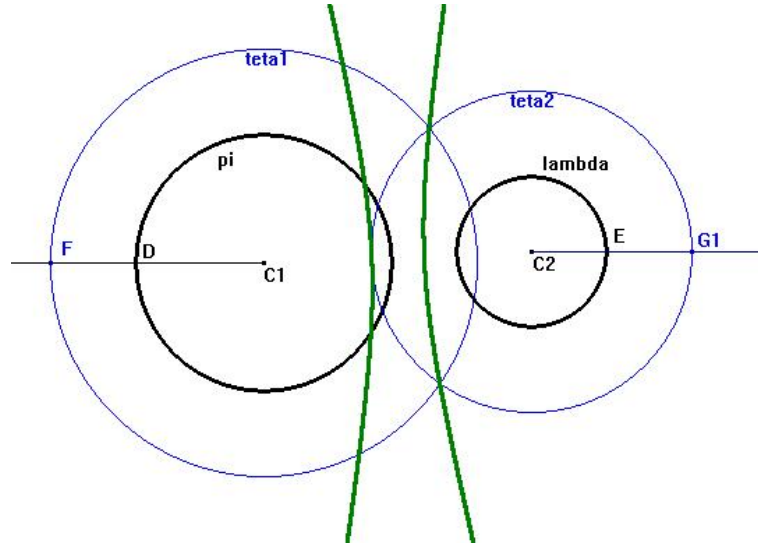


Figura 5: Hipérbole cujo ramo é o LG dos pontos equidistantes a dois círculos disjuntos  $\pi$  e  $\lambda$ .

3. Sejam  $D$  e  $E$  os pontos em que  $r$  e  $s$  cortam  $\pi$  e  $\lambda$ , respectivamente;
4. Encontra-se o ponto  $F$  pertencente à reta  $r$  tal que  $C_1F = \rho$ , onde  $\rho$  é uma distância qualquer;
5. Encontra-se o ponto  $G$  pertencente à reta  $s$  tal que  $EG = DF$  (se  $\rho < \text{raio de } \lambda$ , teremos dois pontos  $G_1$  e  $G_2$ );
6. Traçam-se os círculos  $\theta_1$ , com centro em  $C_1$  e raio  $C_1F$ ,  $\theta_2$ , com centro em  $C_2$  e raio  $C_2G_1$  e, caso exista  $G_2$ , o círculo  $\theta_3$ , com centro em  $C_2$  e raio  $C_2G_2$ ;
7. Os pontos nos quais  $\theta_1$  e  $\theta_2$  ou  $\theta_1$  e  $\theta_3$  se cruzam são PI's. Caso os círculos não se cruzem, deve-se mudar o valor de  $\rho$ .

Suponha que os círculos  $\pi$  e  $\lambda$  sejam tais que um deles não esteja totalmente contido no outro. Seja  $P$  um ponto qualquer da curva procurada  $\mu$  e sejam  $r_1$  e  $r_2$  os raios de  $\pi$  e  $\lambda$ , respectivamente. Denotando por  $x$  a distância de  $P$  a qualquer um dos círculos, temos  $C_1P = r_1 + x$  e  $C_2P = r_2 + x$ . Logo  $C_1P - C_2P = r_1 - r_2 = cte$ , ou seja  $P$  é um ponto da *hipérbole* de focos  $C_1$  e  $C_2$ . Este processo construtivo gera somente um ramo da hipérbole, que é curva dos PI's, já que o outro ramo não equidista dos círculos dados. No caso dos dois círculos terem o mesmo raio, a hipérbole se degenera em uma reta.

Se, no entanto, um dos círculos for interior ao outro (suponhamos  $r_2 > r_1$ ), obtém-se que  $C_1P = r_1 + x$  e  $C_2P = r_2 - x$ , onde  $x$  é a distância do ponto  $P$ , na curva procurada, a qualquer um dos círculos. Logo  $C_1P + C_2P = r_1 + r_2 = cte$ , e portanto  $P$  é um ponto da *elipse*, também com focos  $C_1$  e  $C_2$ . Caso os círculos se interceptem, a elipse e a hipérbole coexistirão, conforme ilustra a figura 6.

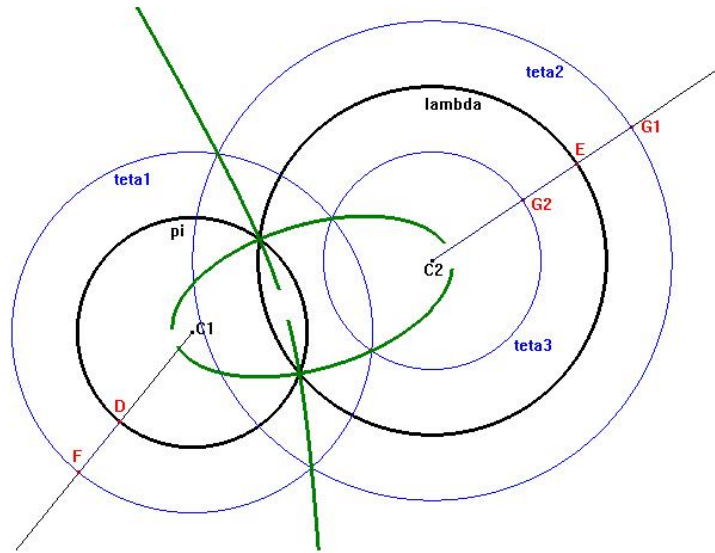


Figura 6: LG dos pontos equidistantes a dois círculos  $\pi$  e  $\lambda$  que possuem interseção.

**6.6** Pontos equidistantes a um círculo  $\pi$ , com centro  $C_1$  e raio  $r_1$ , e um ponto  $A$  não interior a  $\pi$

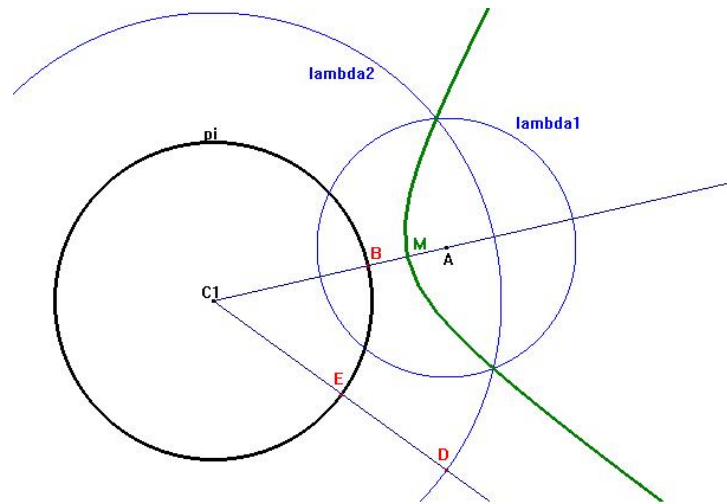


Figura 7: Um dos ramos da hipérbole que é o LG dos pontos equidistantes a um círculo  $\pi$  e um ponto  $A$ , externo a  $\pi$ .

1. Traça-se a semi-reta  $\overrightarrow{C_1A}$ . Se o ponto  $A$  pertence a  $\pi$ , esta semi-reta é o LG procurado. Caso contrário, a semi-reta cruza  $\pi$  em um ponto que denominaremos  $B$ ;
2. O ponto médio ( $M$ ) entre  $A$  e  $B$  é um PI;

3. Traça-se uma outra semi-reta  $r$  partindo de  $C_1$ , que cruza  $\pi$  em um ponto  $E$ ;
4. Com centro em  $A$  traça-se um círculo  $\lambda_1$  com raio  $\rho > \frac{AB}{2}$ ;
5. Com mesmo raio  $\rho$  e centro em  $E$ , constrói-se um círculo que cruza  $r$  em um ponto  $D$ , exterior a  $\pi$ ;
6. Com centro em  $C_1$  e raio  $C_1D$  traça-se um círculo  $\lambda_2$ ;
7. Os PI's são as intersecções entre  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ;

Repetem-se os procedimentos anteriores para diferentes valores de  $\rho$  até que se obtenha um número suficiente de pontos para se determinar a curva procurada, que neste caso é um ramo da *hipérbole* com focos nos pontos  $C_1$  e  $A$  (ver figura 7).

### 6.7 Pontos equidistantes a um círculo $\pi$ , com centro $C_1$ e raio $r_1$ , e um ponto $A$ interior a $\pi$

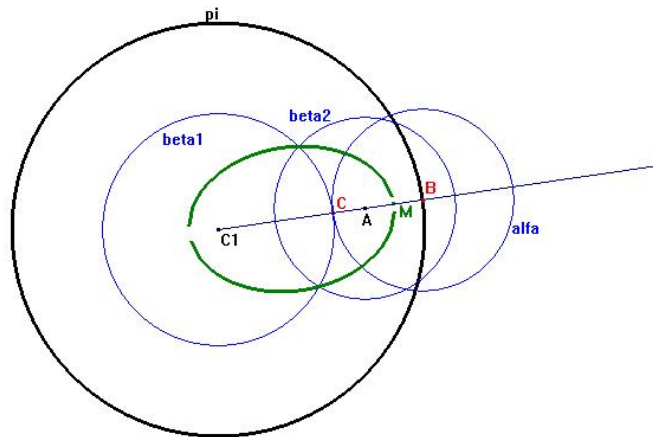


Figura 8: Elipse como LG dos pontos equidistantes a um círculo  $\pi$  e um ponto  $A$  no interior de  $\pi$ .

1. Se  $A$  coincide com  $C_1$ , então a curva procurada  $\mu$  é um círculo de centro  $C_1$  e raio  $\frac{r_1}{2}$ . Caso contrário:
2. Traça-se uma semi-reta  $r$  partindo de  $C_1$ , que cruza  $\pi$  em um ponto  $B$ ;
3. O ponto médio ( $M$ ) entre  $A$  e  $B$  é um PI;
4. Com centro em  $B$  e raio  $\rho < r_1$  traça-se um círculo  $\alpha$ , que cruza  $r$  em dois pontos. O ponto interno ao círculo  $\pi$  será denominado  $C$ ;

5. Com centro em  $C_1$  e raio  $C_1C$  traça-se o círculo  $\beta_1$ ;
6. Com centro em  $A$  e raio  $CB$  traça-se um círculo  $\beta_2$ ;
7. Os PI's são as intersecções entre  $\beta_1$  e  $\beta_2$ ;

A curva representada pela união dos PI's é uma *elipse*, como focos nos pontos  $C_1$  e  $A$  (ver figura 8).

## 7 Resolução do problema de Apolônio: alguns resultados

Utilizando os procedimentos de construção ponto a ponto descritos na seção anterior, e os recursos da GD, obtivemos as cônicas correspondentes aos lugares geométricos dos pontos equidistantes aos objetos dados no problema de Apolônio, combinados dois a dois.

O *Cabri* dispõe da ferramenta **Lugar Geométrico** para a construção de LG's gerais. No nosso caso, a curva que representa o LG procurado é uma cônica, e pode ser definida como um 'objeto' efetivo por meio da opção **Cônica**. Repetindo o procedimento de construção apenas duas ou três vezes, temos os dados necessários para obter a cônica por cinco pontos. Além disso, também podemos determinar o(s) ponto(s) de intersecção desta curva com outras, o que não é possível quando a cônica é construída via **Lugar Geométrico**. Com este último recurso podemos obter o LG dos PI's em relação ao valor arbitrário ( $\rho$ ) utilizado. Por exemplo, para se determinar os pontos equidistantes a uma reta e um ponto dados (§ 6.3) é necessário que  $\rho > AC = \frac{AB}{2}$ . Neste caso, basta tomar  $\rho$  como a hipotenusa de um triângulo retângulo que tem como um dos catetos o valor  $AC$  fixo e determinar o LG dos PI's em relação ao vértice livre. Já na obtenção dos pontos equidistantes a um círculo de raio  $r_1$  e um ponto em seu interior (§ 6.7) é preciso que  $\rho < r_1$ . Neste caso, construímos um segmento  $\overline{ST}$  de medida  $r_1$  e tomamos um ponto  $U$  sobre este segmento. A medida de  $\overline{SU}$  será o raio  $\rho$  desejado, bastando, portanto, determinar o LG dos PI's em relação ao ponto  $U$ . A ferramenta **Lugar Geométrico** foi utilizada para produzir as figuras 6 e 8, nas quais podemos observar pequenas falhas, possivelmente em decorrência da estratégia empregada pelo *software* para construção das curvas.

A exploração dos LG's dinamicamente auxiliou a validação dos roteiros propostos e a ampliação do repertório de possíveis configurações, que dificilmente seriam perceptíveis com o trabalho estático com lápis e papel.

A partir dos elementos trabalhados e da análise desenvolvida, investigamos alguns dos casos do problema de Apolônio via LG utilizando as **Cônicas** do *Cabri*. Estes casos são ilustrados nas figuras 9 a 12, nas quais encontramos diversas possibilidades e também variação no número de soluções obtidas, dependendo dos objetos iniciais e das posições relativas entre eles.

Bruen et al. [9] analisam em seu artigo as diversas configurações entre os três objetos dados, explicitando também o número de soluções do problema para cada uma delas. Dessa forma, poderíamos pensar em 'dezenas' de problemas de Apolônio, que corresponderiam às diferentes combinações entre as posições relativas dos objetos iniciais, sendo este número muito maior que os dez casos anteriormente apresentados.

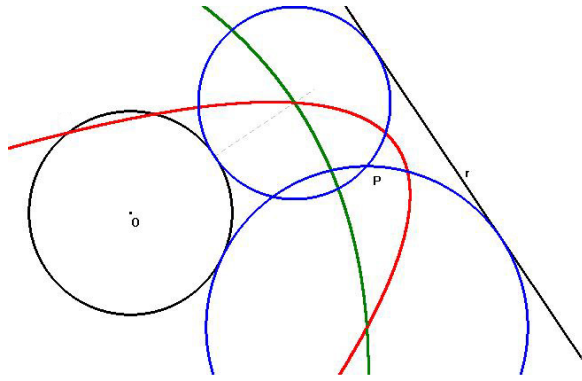


Figura 9: Duas soluções para o problema de Apolônio no caso em que objetos iniciais são o ponto  $P$ , a reta  $r$  e o círculo centrado em  $O$ .

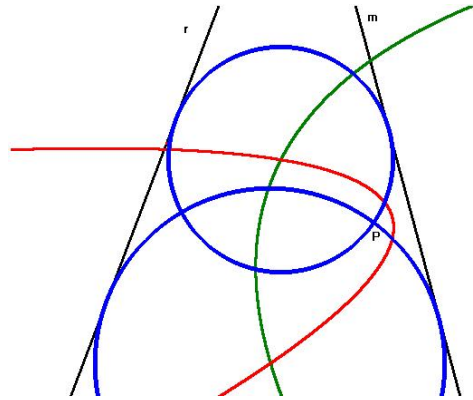


Figura 10: O ponto  $P$  e as retas  $r$  e  $m$  ilustram o caso  $PRR$ .

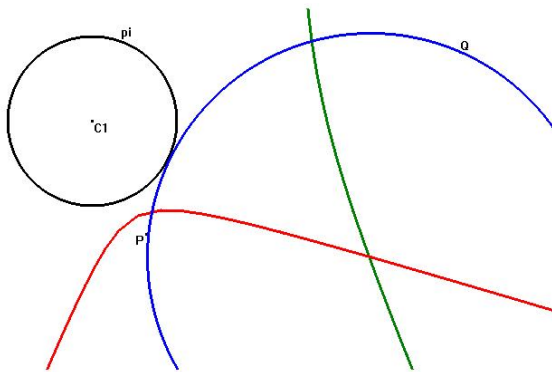


Figura 11: Solução para o caso  $PPC$ , dados os pontos  $P$  e  $Q$  e o círculo centrado em  $C_1$ .

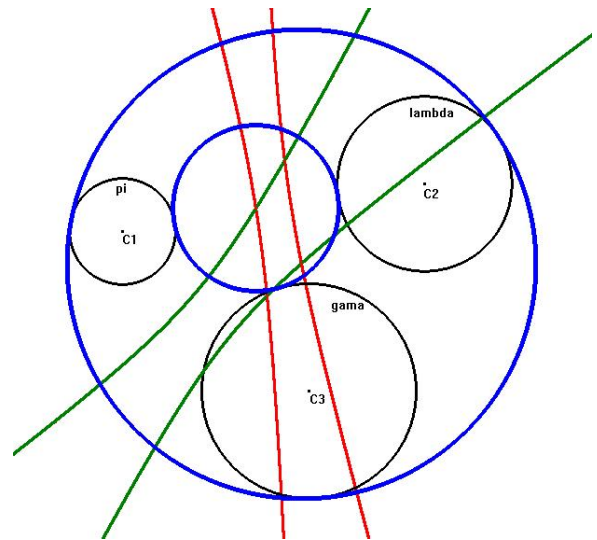


Figura 12: O caso  $CCC$  do problema de Apolônio, resolvido com o mesmo enfoque de Romanus.

Com a utilização de um *software* de GD, esperávamos que as construções associadas pudessem ser bastante reduzidas, pois acreditávamos que o dinamismo proporcionado pelo ambiente computacional permitisse englobar diversas configurações em uma única construção. Entretanto, a combinação dos objetos iniciais e suas posições relativas, em conjunto com as construções auxiliares e suas hipóteses intrínsecas, ampliaram as possibilidades a serem analisadas. Com a movimentação dos objetos, percebemos instabilidades para a solução obtida, decorrentes da própria sequência da construção: obtenção de cinco pontos pertencentes à cônica, determinação da cônica propriamente dita, dos ponto(s) de interseção e dos pontos de contato.



Dessa forma, se por um lado a GD facilita e sistematiza as diversas construções, por outro lado surgem novos desafios decorrentes do trabalho em ambientes informatizados. Embora nas investigações decorrentes da busca de solução do problema de Apolônio tenhamos ampliado nossas perspectivas, tanto no repertório da Geometria quanto no domínio do recurso computacional, deixamos em aberto a apresentação de uma ‘solução geral’, inicialmente almejada, com círculos tangentes aos objetos iniciais em quaisquer posições no plano em estudo. Talvez seja essa uma característica do próprio problema de Apolônio: instigar descoberta, pesquisa e criação, e mobilizar novas indagações.

## 8 Considerações finais

Para finalizar este trabalho, gostaríamos de refletir sobre o uso de tecnologias existentes, em particular dos programas de geometria dinâmica, como forma de auxiliar ou até mesmo superar dificuldades inerentes à compreensão do raciocínio geométrico. É notável o interesse crescente de pesquisadores e educadores na exploração das potencialidades dos programas de GD. Iniciativas recentes, genuinamente nacionais, como o *i-Geom*<sup>18</sup> e o *Tabulae*<sup>19</sup> ampliam o repertório de material de trabalho. No artigo [8], os autores apontam as características principais da GD como recurso didático no ensino da Geometria.

De acordo com Gravina & Santarosa [17], essas ferramentas “... trazem em seus projetos recursos em consonância com a concepção de aprendizagem dentro de uma abordagem construtivista, a qual tem como princípio que o conhecimento é construído a partir de percepções e ações do sujeito, constantemente mediadas por estruturas mentais já construídas ou que vão se construindo ao longo do processo”.

Desta maneira, podemos dizer que a aprendizagem depende de ações que se oponham ao papel passivo do aprendiz frente à apresentação formal do conhecimento, baseada essencialmente na transmissão ordenada de ‘fatos’, geralmente na forma de definições e propriedades. Ao contrário, é proposta uma aprendizagem baseada em ações que caracterizam o ‘fazer matemática’: experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar. Assim, segundo Fainguelernt [15] “... é fundamental que se ofereçam ambientes verdadeiramente interessantes nos quais (...) se possa explorar, usar e brincar com a Matemática”.

Conforme afirma Gravina [16], “... se pensarmos em Geometria como processo de interiorização e apreensão intelectual de experiências espaciais, o aprendizado passa por um domínio das bases de construção deste ramos do conhecimento, onde a abstração desempenha papel fundamental”. Assim, ao analisarmos os processos de formação do conceito de objeto geométrico e da transição entre o experimental e o abstrato, evidenciamos o quanto os *softwares* com recurso de ‘desenho em movimento’ podem ser ferramentas ideais na superação das dificuldades. Surge, dessa forma, um novo auxílio na aprendizagem de Geometria, onde, a partir da exploração experimental viável apenas em ambientes informatizados, é possível que se façam conjecturas e,

---

<sup>18</sup>Programa gratuito de Geometria Interativa na Internet, desenvolvido pelo professor Leônidas Oliveira Brandão (IME-USP), disponível em <http://www.matematica.br/igeom>.

<sup>19</sup>Programa desenvolvido pelo grupo dos professores Luiz Carlos Guimarães e Elizabeth Belfort (IM-UFRJ).

com o *feedback* constante oferecido pela máquina, sejam corrigidas ou refinadas, chegando-se à fase abstrata de argumentação e demonstração matemática.

Dentro desta perspectiva, classificamos os *softwares* de GD como ferramentas de construção, com as quais desenhos de objetos e configurações geométricas são feitos a partir das propriedades que os definem. Por meio de deslocamentos aplicados aos elementos que compõem o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que o caracterizam. Assim, para um dado objeto, temos associada uma coleção de ‘desenhos em movimento’, e os invariantes que aí aparecem correspondem às propriedades geométricas intrínsecas da situação em análise.

De acordo com Baldin e Villagra [3], várias são as possibilidades que o uso da informática, em particular programas de GD, pode trazer ao cenário de ensino e aprendizagem. Dentre elas destacamos a linguagem visual, que estimula um novo meio de comunicação de conceitos abstratos, tornando a tarefa de compreensão da linguagem matemática mais agradável, e a interatividade, que permite a investigação de propriedades, conjecturas de novas propriedades, confirmação de resultados, etc.

Em suma, compartilhando das opiniões de Guimarães, Belfort & Bellemain[18], defendemos uma Geometria que envolva um amplo espectro de atividades, iniciando-se pela exploração concreta e experimentação, passando pelo ato de conjecturar e chegando até as provas formais. Sua importância vai muito além da simples aquisição de conteúdos predeterminados. Envolve o desenvolvimento da compreensão, não apenas em Matemática, mas na ciência em geral. Sob este ponto de vista, *softwares* de Geometria Dinâmica têm uma contribuição específica a dar, oferecendo novas representações de objetos geométricos que, de alguma forma, ‘concretizam’ a figura formal. O trabalho com estes programas oferece formas alternativas de aprender Geometria e, como consequência, novas formas de ensiná-la.

## Referências

- [1] ANTON, Howard; RORRES, Chris. *Álgebra Linear com aplicações*. 8 ed., trad. Claus Ivo Doering. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- [2] ARCONCHER, Cláudio. Sangaku - a geometria sagrada. *Revista do Professor de Matemática* 49 (2002) 3-10.
- [3] BALDIN, Yuriko Y.; VILLAGRA, Guillermo A.L. *Atividades com Cabri-Géomètre II para cursos de Licenciatura em Matemática e professores do Ensino Fundamental e Médio*. São Carlos (SP): EdUFSCar, 2002.
- [4] BERGER, Marcel. *Geometry I*. 2.ed.rev. trad. M.Cole e S. Levy. New York: Springer Verlag, 1994.
- [5] BOYER, Carl B. *História da Matemática*. trad. Elza F.Gomide, São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1974.
- [6] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *A History of Mathematics*. 2.ed, New York: John Wiley, 1989.

- [7] BRANDÃO, Leônidas O. Algoritmos e fractais com programas de GD. *Revista do Professor de Matemática* 49 (2002) 27-34.
- [8] BRAVIANO, Gilson; RODRIGUES, Maria Helena W. L. Geometria Dinâmica: uma nova geometria? *Revista do Professor de Matemática* 49 (2002) 22-26.
- [9] BRUEN, A.; FISHER, J.C.; WILKER, J.B. Apollonius by inversion. *Mathematics Magazine*, 56(2) (1983) 97-103.
- [10] DEVLIN, Keith. *Matemática: A Ciência dos Padrões*, Porto: Porto Editora, 2002.
- [11] CARVALHO, Benjamin A. *Desenho Geométrico*, Rio de Janeiro: Editora ao Livro Técnico, 1958.
- [12] COURT, Nathan Altshiller. The problem of Apollonius. *Math. Teacher* 54 (1961) 444-452.
- [13] COXETER, H.S.M. The problem of Apollonius. *Amer. Math. Monthly* 75 (1968) 5-15. Reprinted in the *Canad. Math. Bull.* 11 (1968) 1-17.
- [14] EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. 2 ed., trad. Hygino H. Domingues, Campinas (SP): Editora da Unicamp, 1997.
- [15] FAINGUELERNT, Estela K. *Educação Matemática - Representação e Construção em Geometria*, Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.
- [16] GRAVINA, Maria A. *Geometria Dinâmica - Uma Nova Abordagem para o aprendizado da geometria*, publicado nos *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, Belo Horizonte: 1996. Disponível em [www.mat.ufrgs.br/~edumatec/artigos](http://www.mat.ufrgs.br/~edumatec/artigos), acessado em 01/12/03.
- [17] GRAVINA, Maria A.; SANTAROSA, Lucila M. *A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados*, Brasília: IV Congresso RIBIE, 1998. Disponível em [www.mat.ufrgs.br/~edumatec/artigos](http://www.mat.ufrgs.br/~edumatec/artigos), acessado em 01/12/03.
- [18] GUIMARÃES, Luiz C.; BELFORT, Elizabeth; BELLEMAIN, Franck. *Geometria: Uma volta ao futuro via tecnologia?*, São Paulo: II SIPEM, Santos (SP), outubro 2003. Trabalho completo em CD-Room, 14p.
- [19] HEATH, Sir Thomas. *A History of Greek Mathematics*, Vol.II from Aristarchus to Diophantus, Oxford: Oxford University Press, 1921.
- [20] MUIRHEAD, R. F. On the number and nature of solutions of the Apollonius contact problem. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 14 (1896) 135-147.
- [21] NELSON, David. *The Penguin Dictionary of Mathematics*. 2 ed. London: Penguin Books, 1998.

- [22] PÉCORA Jr, José E.; SANTOS, Sandra A. *O polinômio de Taylor em coordenadas polares*. Relatório de Iniciação Científica, IMECC, Unicamp, Bolsa SAE-Unicamp, período: 01/05/96 a 30/10/96.
- [23] VIÉTE, François. *Opera Mathematica*, recognita: Francisci a Schooten, vorwort und Register von Joseph E. Hofmann, New York: G. Olms, 1970.
- [24] VILLAREAL, Mônica E. O problema das retas tangentes: a sua resolução na História da Matemática de Euclides a Barrow. *Proceedings do II Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática e II Seminário Nacional de História da Matemática*. Sérgio Nobre (ed.). Rio Claro(SP): Cruzeiro Editora e Artes Gráficas, 1997, 287-299.