Equação diferencial com parâmetro fuzzy.

Y. Chalco-Cano[1,2], Marina T. Mizukoshi [3,4]
Laécio Carvalho de Barros[5],Rodney Carlos Bassanezi[6].
IMECC-UNICAMP, CP 6065, 13081-970, Campinas-SP, Brazil.

Resumo

Neste trabalho fazemos um estudo do problema de Cauchy com parâmetro fuzzy e/ou condição inicial fuzzy. Consideramos o problema de duas maneiras distintas: na primeira através das inclusões diferenciais fuzzy e obtemos a solução fuzzy para este caso. Na segunda, obtemos a solução determinística e fuzzificamos esta solução através da extensão de Zadeh. Concluímos que, sob certas condições, os dois métodos propostos produzem a mesma solução.

1 Introdução

Consideremos o problema de valor inicial, ou de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t), u) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{1}$$

onde $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ é uma função contínua, $u \in U \subset \mathbb{R}^k$ é um vetor e $x_0 \in \mathbb{R}^m$.

É bem conhecida a importância do estudo das equações diferenciais do tipo (1) tanto do ponto de vista teórico quanto das aplicações. No entanto, em muitos casos, tais equações parecem ser muito restritivas para descrever sistemas de evolução controlados. Tais restrições são devidas à falta de informações precisas ou conhecimento das leis que governam o controle para os possíveis estados do sistema. Nos modelos matemáticos que descrevem fenômenos biológicos os parâmetros geralmente têm natureza incerta e assim o campo de velocidades f em (1) tem argumentos incertos [2].

Filippov [5] e Wazewski [19] provaram que sob hipóteses de suavidade, a equação dada no sistema (1) é equivalente a uma inclusão diferencial do tipo

$$x'(t) \in F(x) \tag{2}$$

[1]Ph-D Student,supported by FAPESP-Brazil through Project 00/00055-0.
[2]e-mail: katary@ime.unicamp.br
[3]Ph-D Student,supported by PICD/UFG-Brazil.
[4]e-mail: marinam@ime.unicamp.br
[5]e-mail:laeciocb@ime.unicamp.br
[6]e-mail:rodney@ime.unicamp.br

onde $F(x) = \{f(x,u)/u \in U\}$.

Uma razoável generalização do problema (2) é aquela que leva em conta aspectos de graduação, ou seja, a troca do conjunto $F(x)$ por conjuntos fuzzy $\widehat{f}(x)$

$$\begin{cases} x'(t) & \in & \widehat{f}(x(t)) \\ x(0) & \in & X_0, \end{cases} \tag{3}$$

onde X_0 é um conjunto fuzzy e $\widehat{f}$ a extensão de Zadeh [[12], [16]]da função contínua f dada em (1).

Neste contexto, algumas questões surgem naturalmente: como pode ser interpretado o problema (3)? O que é uma solução de (3)?

Recentemente, Hüllermeier [7] sugeriu uma formulação para o problema (3) baseado em uma família de inclusões diferenciais em cada $\alpha-$nível, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Diferentemente das equações diferenciais fuzzy (EDF) clássicas, envolvendo a derivada de Hukuhara [3], [8], [14], a formulação de Hüllermeier permite "caracterizar" as principais propriedades das equações diferenciais ordinárias de maneira natural, tais como periodicidade, estabilidade, bifurcação, etc. Em [4], Diamond formaliza as idéias propostas por Hl̈lermeier.

Por outro lado, podemos obter uma solução para (3) através do Princípio de Extensão utilizando idéia similar a aquela proposta por Oberguggenberger-Pitschmann [11], onde a mesma é a solução de (1) que foi extendida.

No entanto, é conhecido que o problema com parâmetro (1) pode ser reduzido a um problema de valor inicial do tipo

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4}$$

introduzindo-se as variáveis adicionais $x_{m+1}, ..., x_{m+k}$, com $x'_{m+j} = 0, x_{m+j} = u_j, j = 1, ..., k$, cuja dimensão é $n = m + k$.

Assim, inicialmente estudaremos o problema onde a condição inicial X_0 é um conjunto fuzzy. Nos casos em que nos problemas estudados, algum ou todos os parâmetros envolvidos na equação (1) também são fuzzy veremos que podemos fazer duas abordagens: antes de considerar a fuzziness dos parâmetros das mesmas fazer a mudança de variáveis sugerida no parágrafo anterior de tal maneira que possamos considerar as incertezas na nova condição inicial ou simplesmente considerar a fuzzificação direta de (1), tornando o campo fuzzy e também a condição inicial.

É mostrado aqui que a solução de Hl̈lermeier [7] e o obtido pelo princípio de extensão de Zadeh coincidem, tanto no caso onde somente a condição inicial é fuzzy como naquele em que ela e/ou o(s) parâmetro(s) é(são) fuzzy. Em outras palavras, dado o sistema (1) , fuzzificar a mesma e obter uma solução através de uma família de inclusões diferenciais é equivalente a resolver o problema determinístico e fuzzificar a solução depois . Ao nosso ver, embora a abordagem de Hüllermeier seja mais geral, pois trata - se da equações diferencias fuzzy gerais, sua arquitetura matemática é mais complicada que a opção via extensão, pois diferentemente desta o método de Hüllermeier requer conhecimentos sobre a teoria de inclusão diferencial.

2 Conceitos Básicos

Denotaremos por $\mathcal{K}^n$ a família de todos os subconjuntos compactos e não vazios de $\mathbb{R}^n$.

Para $A, B \in \mathcal{K}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ as operações de soma e producto por escalar são definidos por

$$A + B = \{a + b/a \in A, b \in B\} \qquad \lambda A = \{\lambda a/a \in A\}.$$

Um subconjunto fuzzy U de $\mathbb{R}^n$, é definido pelo conjunto de pares ordenados $(u, \mu(u)), u \in \mathbb{R}^n$ onde $\mu_U : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ é uma função chamada grau de pertinência, indicando o grau com que u está em U, onde os graus 0 e 1 representam, respectivamente, a não pertinência e a pertinência máxima ao conjunto fuzzy. Para simplificar a notação indicaremos a função de pertinência μ_U por U.

Para $0 < \alpha \leq 1$ denotaremos por $[U]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ U(x) \geq \alpha\}$ o α-nível de U e $[U]^0 =$supp $U = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n / \ U(x) > 0\}}$, denominado o suporte de U.

Um conjunto fuzzy U é denominado compacto se $[U]^\alpha \in \mathcal{K}^n$, $\forall \alpha \in [0,1]$.

Denotemos por $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ o espaço de todos os conjuntos fuzzy compactos, não vazios.

As operações de soma e produto por escalar sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ são definidas por

$$(U + V)(x) = \sup_{y \in X}\{U(y) \wedge V(x - y)\} \quad e \quad (\lambda U)(x) = \begin{cases} U(\frac{x}{\lambda}) & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}} & \text{se } \lambda = 0. \end{cases}$$

É conhecido também que as seguintes operações são verdadeiras para os níveis de conjuntos fuzzy

$$[U + V]^\alpha = [U]^\alpha + [V]^\alpha \ e \ [\lambda U]^\alpha = \lambda [U]^\alpha \ \forall \alpha \in [0,1].$$

Para o nosso estudo precisamos do conceito e de algumas propriedades do Princípio de Extensão de Zadeh.

O Princípio de Extensão de Zadeh é um método que nos permite obter a imagem de um conjunto fuzzy através de uma função crisp [16]. Abaixo ilustraremos o método.

Suponha que $f : X \longrightarrow Y$ e que $A : X \longrightarrow [0,1]$ é um subconjunto fuzzy de X. A extensão de Zadeh $\widehat{f}$ de f aplicada em A é um subconjunto fuzzy $\widehat{f}(A)$ de Y cuja função de pertinência é

$$\widehat{f}(A)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{a \in f^{-1}(y)} A(a) & \text{se} \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \text{se} \quad f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases} \tag{5}$$

e se $f : X \times Y \longrightarrow Z$, com A e B subconjuntos fuzzy de X e Y, respectivamente, então a extensão de Zadeh $\widehat{f}$ de f aplicada em A e B é um subconjunto fuzzy $\widehat{f}(A,B)$ de Z cuja função de pertinência é

$$\widehat{f}(A,B)(z) = \begin{cases} \sup\limits_{f(a,b)=z} min\{A(a), B(b)\}, & \text{se} \quad f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0, & \text{se} \quad f^{-1}(z) = \emptyset. \end{cases} \tag{6}$$

Também precisaremos de algumas informações e técnicas de inclusões diferenciais para construir a solução de Hüllermeier para o problema (3) de equações diferenciais fuzzy.

3 Inclusões Diferenciais

Consideremos a inclusão diferencial,

$$\begin{cases} x'(t) & \in & F(t, x(t)) \\ x(t_0) & \in & X_0 \end{cases} \tag{7}$$

onde $F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{K}^n$ é uma multifunção e $X_0 \in \mathcal{K}^n$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

A função $y(t)$ é uma solução de (7) no intervalo $[0,T]$ se for absolutamente contínua, $y(0) = x_0, x_0 \in X_0$ e satisfaz (7) para quase todo $t \in [0,T]$. A função F permite modelar algum tipo de incerteza [9], pois para cada par $(t,x) \in [t_0,T] \times \mathbb{R}^n$, a derivada pode não ser precisamente conhecida, mas sabe-se que é um elemento do conjunto $F(t,x)$.

Uma generalização do problema (7), sugerida por Hüllermeier [7], para modelar sistemas dinâmicos fuzzy é obtida substituindo o conjunto $F(t,x)$ em (7) por um conjunto fuzzy, isto é, considerando o problema de valor inicial fuzzy (PVIF)

$$\begin{cases} x'(t) & \in & \tilde{F}(t, x(t)) \\ x(t_0) & \in & \tilde{X}_0 \end{cases} \tag{8}$$

onde $\tilde{F} : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$ é uma multifunção fuzzy e $X_0 \in \mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$, onde $\mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$ é um conjunto normal, semicontínuo superior, fuzzy convexo e de suporte compacto.

Sob a interpretação de Hüllermeier o (PVIF)(8), é a família de inclusões diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) & \in & \left[\tilde{F}(t, x(t))\right]^\alpha \\ x(t_0) & \in & [\tilde{X}_0]^\alpha \end{cases} \tag{9}$$

onde $[\tilde{F}(.,.)]^\alpha$ é o α-nível do conjunto fuzzy $\tilde{F}(t, x(t))$.

Para α fixado, $\alpha \in [0,1]$, denotaremos por $\sum_\alpha(X_0, T)$ solução de (9) e por $\mathcal{A}_\alpha(X_0, t), 0 \leq t \leq T$ o conjunto atingível no instante t de (9).

Agora, diremos que uma função $x : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma α-solução para (8) se ele e absolutamente contínua, $\forall t \in [0,T]$ e denotaremos por $\sum(X_0, T)$ o conjunto fuzzy solução de (8) e por $\mathcal{A}(X_0, t) = \{x(t) \;/\; x(.) \in \sum(x_0, T)\} \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto atingível em t de (8)

A seguir estudaremos o problema do valor inicial de sistemas autonômos com a condição inicial e/ou parâmetro(s) fuzzy segundo abordagem de Hüllermeier via inclusões diferenciais fuzzy e a outra através da utilização do Princípio de Extensão de Zadeh na solução determinística.

4 Equações diferenciais com condição inicial fuzzy

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' & = & f(x) \\ x(0) & = & x_0 \end{cases} \tag{10}$$

onde $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é uma função contínua e $x_0 \in R^m$.

Observação 1 *Segundo o teorema da dependência diferenciável [10], a solução além de ser função em* t*, ela pode ser vista como função de* x_0 *e da própria* f *e será da mesma classe que a* f *num aberto de um certo espaço de Banach.*

Supondo que a condição inicial x_0 seja fuzzy, à equação diferencial dada em (10), podemos associar:

$$\begin{cases} x'(t) & = & f(x) \\ x(0) & \in & X_0, \end{cases} \tag{11}$$

onde X_0 é um conjunto fuzzy compacto não vazio.

Notemos que (11) é uma representação simbólica, cuja interpretação pode ser dada de formas diferenciadas, pois poderíamos considerar que a fuzziness da condição inicial poderia tornar o campo fuzzzy e assim estudá-la utilizando a derivada de Hukuhara como foi proposto por vários autores, como Kaleva e Seikkala [8],[17], ou através daquelas que não utilizam a derivada de Hukuhara. Considerando a segunda opção, faremos as duas abordagens propostas na introdução para (11). Além disso mostraremos que, sob certas condições, estas interpretações são equivalentes no sentido de terem as mesmas soluções.

Supondo que para cada x_0 (10) tem uma solução única $x(t, x_0)$ no intervalo $[0, T]$, fixado $t \in [0, T]$, podemos definir o operador:

$$L_t : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

da seguinte maneira, $L_t(x_0) = x_t(x_0)$ e esta será contínua na variável x_0.

Aplicando o princípio de extensão de Zadeh para L_t, obtemos

$$\widehat{L}_t : \mathcal{F}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^m).$$

Agora, temos que

$$\widehat{L}_t : \mathcal{F}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^m).$$

está bem definida, contínua em X_0 e que [ver [16]]

$$\left[\widehat{L}_t(X_0)\right]^\alpha = L_t([X_0]^\alpha).$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$. Logo, o conjunto atingível no instante t para o problema (11) é o conjunto fuzzy $\widehat{L}_t(X_0)$.

Agora, segundo a interpretação de Hüllermeier, podemos escrever (11) como uma família de inclusões diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(0) &\in [X_0]^\alpha, \end{cases} \tag{12}$$

pois $[\widehat{f}(x(t))]^\alpha = f(x(t))$.

Isto nos leva ao seguinte resultado.

Teorema 1 *Suponha que para cada $x_0 \in \mathbb{R}^m$ tenhamos uma solução única determinística $x(.)$ de (10) no intervalo $[0, T]$. Então, existem os conjuntos $\mathcal{A}(X_0, t)$, $\hat{L}_t(X_0)$ do problema do valor inicial fuzzy e,*

$$\hat{L}_t(X_0) = \mathcal{A}(X_0, t)$$

para todo $0 < t \leq T$, isto é, os conjuntos atingíveis são iguais.

Prova:

Como para cada x_0 (10) tem uma solução única $x(.)$, para cada $t \in [0,T]$, então temos que $L_t : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ que associa a cada t e x_0 $L_t(x_0) = x_t(x_0)$ é contínua em x_0 pelo teorema da dependência diferenciável. Sendo assim, $\widehat{L}_t : \mathcal{F}(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ é contínua e existe o conjunto fuzzy $\widehat{L}_t(X_0)$. Além disso,

$$[\widehat{L}_t(X_0)]^\alpha = L_t([X_0]^\alpha).$$

Portanto, dado $\alpha \in [0,1]$, temos

$$\left[\widehat{L}_t(X_0)\right]^\alpha = L_t\left([X_0]^\alpha\right) = \{x_t(x_0)/x_0 \in [X_0]^\alpha, t \in [0,T]\} \tag{13}$$

Por outro lado, para cada $x_0 \in [X_0]^\alpha$ e para $\alpha \in [0,1]$ de (12) temos o seguinte problema clássico de equações diferenciais ordinárias associado [1],

$$\left\{\begin{array}{rcr} x'(t) & = & f(x(t)) \\ x(0) & = & x_0. \end{array}\right.$$

Logo o conjunto atingível associado à (12) será dado por

$$\bigcup_{x_0 \in [X_0]^\alpha} \mathcal{A}_\alpha(x_0,t) = \mathcal{A}_\alpha\left([X_0],t\right) = \{x_t(x_0)/x_0 \in [X_0]^\alpha\}, \tag{14}$$

o qual é o $\alpha-$nível do conjunto atingível de (11).

De (13) e (14) segue o resultado.

Exemplo: Dado o problema malthusiano

$$\left\{\begin{array}{l} x' = -ax \\ x(0) = x_0, x_0 > 0, x_0 \in \mathbb{R}, \end{array}\right. \tag{15}$$

suponhamos que a condição inicial seja fuzzy e que tenhamos o seguinte conjunto fuzzy associado à mesma

$$X_0(x_0) = \left\{\begin{array}{ccc} 1-x_0 & , & x_0 \in [0,1] \\ 0 & , & c.c \end{array}\right.$$

Logo, o problema (23) pode ser reescrito como o seguinte problema do valor inicial fuzzy

$$\left\{\begin{array}{rcr} x'(t) & = & -ax(t) \\ x(0) & \in & [0,1-\alpha], \end{array}\right. \tag{16}$$

com $\alpha \in [0,1]$, pois $[-ax]^\alpha$ é um conjunto clássico. Agora para cada $\alpha \in [0,1]$ temos que o conjunto atingível de (pmf1) é dado por

$$\mathcal{A}_\alpha(X_0,t) = \left[0,(1-\alpha)e^{-at}\right]$$

para todo $t \in [0,\infty)$.

Agora, a solução determinística de (23) é

$$x(t) = x_0 e^{-at}$$

Como $x(t)$ é contínua em relação à x_0, o conjunto atingível do problema fuzzy (**??**) é o conjunto fuzzy $\widehat{L}(X_0)$, cujos níveis são dados por

$$[\widehat{L}_t(X_0)]^\alpha = L_t([X_0]^\alpha) = [0,(1-\alpha)e^{-at}] = \mathcal{A}_\alpha(X_0,t),$$

para todo $t \in [0,\infty)$ e $\alpha \in [0,1]$.

4.1 Equações diferenciais com parâmetros fuzzy

Nesta seção discutiremos as equações diferenciais fuzzy geradas por uma equação diferencial determinística com incerteza dada no parâmetro e/ou condição inicial fuzzy.

Consideremos o problema de valor inicial com parâmetro

$$\begin{cases} x' &= f(x,u) \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \tag{17}$$

onde $f:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ é contínua , $x_0 \in R^m$, $u \in U \subset \mathbb{R}^k$ é um vetor de parâmetros(coeficientes).

Observação 2 *Se f é contínua em um aberto $\omega \subset \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k$, então a solução de (17) é contínua em ω.*

Notemos que o problema (17) pode ser tratado de duas maneiras distintas quando o parâmetro e/ou condição inicial é fuzzy. Poderíamos considerar a fuzzificação direta, isto é, considerarmos o seguinte problema

$$\begin{cases} x'(t) &\in \widehat{f}(x(t),U) \\ x(0) &\in X_0, \end{cases} \tag{18}$$

onde $\widehat{f}$ é a extensão de Zadeh da função f, em relação ao parâmetro u, ou seja, $\widehat{f}(x,.):\mathcal{F}(\mathbb{R}^k) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^k)$ onde o campo é um conjunto fuzzy ou, fazer $y=(x,u)$ no problema (17) e considerarmos o seguinte sistema a $n=m+k$ equações

$$\begin{cases} y' &= F(y) \\ y(0) &= y_0, \end{cases} \tag{19}$$

onde $y' = (x', u'), y(0) = (x(0), u(0)) \in \mathbb{R}^n$ e $F(y) = (f(x, u), 0)$. Neste caso, supondo que a condição inicial y_0 dado em (19) seja fuzzy, temos o seguinte problema fuzzy associado ao mesmo

$$\begin{cases} y' &= F(y) \\ y(0) &\in Y_0, \end{cases} \tag{20}$$

onde Y_0 é um conjunto fuzzy compacto não vazio de $\mathbb{R}^n$, ou seja, o problema fuzzy dado em (20) é do mesmo tipo dado em (11).

Notemos que (18) é equivalente à (20), pois (17) é equivalente a (19).

Agora, segundo a interpretação de Hüllermeier,podemos escrever (20) como uma família de inclusões diferenciais

$$\begin{cases} y'(t) &= F(y(t)) \\ y(0) &\in [Y_0]^\alpha \end{cases} \tag{21}$$

e (18) será dado por

$$\begin{cases} x'(t) &\in [\widehat{f}(x(t), U)]^\alpha \\ x(0) &\in [X_0]^\alpha, \end{cases} \tag{22}$$

Primeiramente analisemos o caso em que (17) pode ser reduzido a um problema do tipo (10). Supondo que X_0 e U_0 sejam conjuntos fuzzy distintos temos que o problema (21) pode ser reescrito pela formulação de inclusões diferenciais

$$\begin{cases} y'(t) &= F(y(t)) \\ y(0) &\in [Y_0]^\alpha, \end{cases}$$

onde $[Y_0]^\alpha = ([X_0]^\alpha, [U_0]^\alpha]$.

Agora, supondo que para cada x_0 e u_0 tenhamos uma solução única para (19) e utilizando a mesma argumentação dada ao problema com condição inicial fuzzy e (6), temos para $\alpha \in [0, 1]$ que

$$[\widehat{L}_t(X_0, U_0)]^\alpha = L_t([X_0]^\alpha, [U_0]^\alpha)$$

Isto nos leva ao seguinte resultado.

Teorema 2 *Suponhamos que para cada $y_0 = (x_0, u_0)$ tenhamos uma única solução determinística $y(.)$ do problema (19) no intervalo $[0, T]$. Então, existem os conjuntos $\mathcal{A}_t(Y_0)$, $\hat{L}_t(Y_0)$ do problema do valor inicial fuzzy (20) e,*

$$\hat{L}_t(Y_0) = \mathcal{A}_t(Y_0)$$

para todo $0 < t \leq T$, isto é, os conjuntos atingíveis são iguais.

Prova:

Segue análoga a demonstração do teorema 1.

A interpretação dada por 18) é mais complexa, pois na interpretação através das inclusões diferenciais teríamos de obter todas as edo's correspondentes a escolha nos conjuntos do campo e da condição inicial e esta dificuldade aumentará consideravelmente quando considerarmos campos não lineares. Por exemplo no caso logístico, precisamos obter todas $f(x) \in [Rx(1-x)]^\alpha$ e $x_0 \in [X_0]^\alpha, \alpha \in [0,1]$, onde R e X_0 são conjuntos fuzzy, tais que as soluções de

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

nos darão o conjunto atingível em um instante $t \in [0,T]$.

Além disso, (22) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} x'(t) &\in f(x(t),[U]^\alpha) \\ x(0) &\in [X_0]^\alpha, \end{cases} \tag{23}$$

pois $[\widehat{f}(x(t),U)]^\alpha = f(x(t),[U]^\alpha) = \{f(x(t),u)/u \in [U]^\alpha\}$, ou seja resolver (23) é equivalente a obter a solução de uma família de equações diferenciais ordinárias do tipo (17). Portanto a análise de (11) pode ser reduzido à de (20) e o resultado se reduz ao que foi estabelecido no teorema 2.

Exemplo: Consideremos o problema de expectativa de vida dos elementos de A, supondo que a pobreza seja um fator que contribui para o aumento da taxa de mortalidade dos indivíduos.

Para modelar a "pobreza", utilizaremos o salário (renda) como fator de incerteza na taxa de mortalidade

$$x'(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2.u(r))x(t),$$

Neste caso, o conjunto fuzzy que avalia o grau de pertinência da pobreza foi definido por

$$u(r) = \begin{cases} [1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2]^k & se \quad 0 < r < r_0 \\ 0 & se \quad r \geq r_0 \end{cases}$$

onde, k é um parâmetro que fornece alguma característica do grupo, r é um parâmetro proporcional à renda do indivíduo e r_0 é a renda mínima a partir da qual os indivíduos não são mais diferenciados quanto à pobreza e portanto, não mais influênciam na taxa de mortalidade.

Consideremos

$$\begin{cases} x'(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2.u(r))x(t) \\ x(0) = x_0, x_0 > 0, x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{24}$$

e façamos a mudança $y = (x, u)$ em (24). Então, temos

$$\begin{cases} y'(t) = F(y) \\ y(0) = y_0, y_0 \ > \ 0, y_0 \ \in \ \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{25}$$

onde $F(y) = (f(x, u), 0)$, cuja solução é dada por $y(t) = (x_0 e^{-(\lambda_1 + \lambda_1 u_0)t}, u_0)$.

Supondo que a condição inicial em (25) seja fuzzy devido a fuzzyness do parâmetro u_0, então sob o ponto de vista de Hullermeier temos,

$$\begin{cases} y'(t) & = & F(y(t)) \\ y(0) & \in & [0, r_0\sqrt{1 - \alpha^k}], \end{cases} \tag{26}$$

para $\alpha \in [0, 1]$.

Logo o conjunto atingível de (26) é

$$\mathcal{A}_\alpha(Y_0, t) = \{y(t) = (x_0 e^{-(\lambda_1 + \lambda + 2u_0)t}, u_0), u_0 \in [0, r_0\sqrt{1 - \alpha^k}]\}$$

para todo $t \in [0, \infty)$.

Como a solução de (24) é

$$y(t) = (x_0 e^{-(\lambda_1 + \lambda + 2u_0)t}, u_0)$$

a qual é contínua em relação à (x_0, u_0) pelo teorema 3.1 em [18], então o conjunto atingível no tempo t é dado por

$$\begin{aligned} [\widehat{L}_t(Y_0)]^\alpha &= L_t([Y_0]^\alpha) = L_t(x_0, [u_0]^\alpha) \\ &= \{y(t) = (x_0 e^{-(\lambda_1 + \lambda + 2u_0)t}, u_0), u_0 \in [0, ro\sqrt{1 - \alpha^k}]\} \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, \infty)$.

Portanto os conjuntos atingíveis via Hullermeier e através do princípio de estensão coincidem.

Conclusão: O método de Hüllermeier é mais geral que o da extensão da solução clássica via Princípio de Extensão de Zadeh,pois esta último permite o estudo de equações diferenciais com parâmetros fuzzy, enquanto que o primeiro considera equações diferenciais com o campo fuzzy e esta é estudada através de uma família de inclusões diferenciais clássicas. No entanto, a extensão permite a avaliação do grau de pertinência da solução atravês da utilização da definição da extensão de Zadeh para cada condição inicial. Além disso, podemos observar que quando o parâmetro é fuzzy, o problema de obtermos a solução do problema fuzzy através da fuzzificação direta do problema determinístico poderá se tornar muito mais difícel através da teoria de inclusões diferenciais fuzzy.

Referências

[1] Aubin, J.P. and A. Cellina, Differential Inclusions, Springer- Verleg, New york Tokyo, 1984.

[2] Bassanezi, R.C. and L.C. Barros, A simples model of life expectancy with subjetive parameters, Kibernetes: Inter, Journal of Systems and Cybernetics 24, vol. 9, 91-98 (1995).

[3] D. Dubois, H. Prade, Towards a fuzzy differential calculus-Part3: Differentiation, Fuzzy Sets Systems, vol.8, pp. 225-233, 1982.

[4] Diamond, P., Time-dependent differential inclusions, cocycle attractors and fuzzy diferential equation, IEEE Trans.Fuzzy Syst. vol. 7, No 6, december 1999.

[5] Filippov, A.F., On certain questions in the theory of optimal control, SIAM J. Control(1),76-84, 1962.

[6] Fullér, R., T. Keresztfalvi, On generalization of Nguyen's theorem, Fuzzy Sets Syst., vol.41, 1990, pp. 371-374.

[7] Hüllermeier, E., An approach to modeling and simulation of uncertain dynamical systems, Int. Journal Uncertainty, fuxxiness, Knowledge-Bases Syst. vol. 5, 117-137, 1997.

[8] Kaleva, O., Fuzzy differential equations, Fuzzy Sets Systems, vol. 24, pp. 301-317, 1987.

[9] Krivan, V. and Colombo, G., A non-stochastic approach for modelling uncertainty in population dinamics, Bulletin of Mathematical Biology, 60, 721-751, 1998.

[10] Mello, A.A.H., Júnior, M.B. - Equações Diferenciais - Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos, IME/USP, São Paulo, 1979.

[11] Oberguggenberger, M. and Pittschmann, S., Differential equations with fuzzy parameters,

[12] Nguyen, H.T., A note on the extension principle for fuzzy sets, J. Math. Analysis and Applications, 64, 369-380, 1978.

[13] Puri, M.L., D.A. Ralescu, Differentials for fuzzy functions, J. Math. Anal. Appl. 114 (1986), 409-422.

[14] Puri, M.L., D.A. Ralescu, Differentials for fuzzy functions, J. Math. Anal. Appl. 91 (1983), 552-558.

[15] Puri, M.L., D.A. Ralescu, Convergence theorem of fuzzy Martinzales, J. Math. Anal. Appl., 160, 107-122(1991).

[16] Román-Flores E., Barros L.C. and Bassanezi R.C., A note on Zadeh extensions, Fuzzy sets and systems 117, 327-331, 2001.

[17] S. Seikkala, On the fuzzy initial value problem, Fuzzy Sets System, vol. 24, pp. 319-330, 1987.

[18] Sotomayor, J. - Lições de equações Diferenciais Ordinárias, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[19] Wazewski, T. On an optimal control problems, Proc. Conference Differential equations and their applications, 229-242, Praga (1962).