

Método de Petrov–Galerkin Não Linear para o Sistema de Água Rasa

Margarete O. Domingues *

CPTEC-INPE

Caixa Postal 515, 12 201 970 São José dos Campos, SP, Brasil

S. M. Gomes †

IMECC-UNICAMP

Caixa Postal 6065, 13081-970 Campinas, SP, Brasil

Fevereiro de 2003

Resumo

Considera-se neste trabalho o método de Galerkin não linear utilizando as bases wavelets bi-ortogonais para um modelo de água rasa. O método Galerkin não linear é um algoritmo numérico para a construção das chamadas *variedades inerciais aproximadas*. Utiliza-se esse algoritmo para a simulação numérica do comportamento das soluções de equações de evolução dissipativas, para tempos suficientemente grandes. Nesse regime, os modos altos possuem pequena quantidade de energia, de tal forma que suas interações podem ser desprezadas nos termos não lineares. Com isso, como a variação temporal desses modos altos é mais lenta do que a dos modos baixos, na prática, eles podem ser considerados em regime quasi-estacionário.

*The work of this author was partially supported by FAPESP-Brasil

†The work of this author was partially supported by CNPq-Brasil

1 Introdução

O método de Galerkin não linear é considerado um algoritmo numérico para a construção das chamadas *variedades inerciais aproximadas*. Este conceito foi introduzido com o objetivo de viabilizar computacionalmente simulações de turbulência (Temam, 1989, 1990, 1992). Tipicamente, esse tipo de formulação aplica-se na simulação numérica do comportamento das soluções de equações de evolução dissipativas, para tempos suficientemente grandes. Nesse regime, os modos altos possuem pequena quantidade de energia, de tal forma que suas interações podem ser desprezadas nos termos não lineares. Além disso, como a variação temporal desses modos altos é mais lenta do que a dos modos baixos, na prática, eles podem ser considerados em regime quasi-estacionário. Portanto, a idéia fundamental é poder separar a solução \mathbb{U} em componentes de diferentes ordens de magnitude e velocidades de evolução

$$\mathbb{U} = \mathbb{U}_b + \mathbb{U}_a,$$

em que os sub-índices a, b indicam os modos associados as altas e baixas frequências, tais que

$$\|\mathbb{U}_a\| \ll \|\mathbb{U}_b\|, \quad \left\| \frac{\partial \mathbb{U}_a}{\partial t} \right\| \ll \left\| \frac{\partial \mathbb{U}_b}{\partial t} \right\|.$$

A componente \mathbb{U}_a , apesar de ser pequena, não pode ser simplesmente desprezada, pois sua contribuição pode afetar significativamente o comportamento da solução após um longo período de integração. A formulação do método está baseada na forma diferenciada com que essas duas componentes são tratadas (Temam, 1992; Dubois et al., 1998; Chehab, 1995; Temam, 1990; Chen e Temam, 1991a,b,c). A idéia básica desse tratamento é que a componente \mathbb{U}_a seja representada em função de \mathbb{U}_b , de tal forma que

$$\mathbb{U} = \mathbb{U}_b + f(\mathbb{U}_b) \in \mathbf{M},$$

em que o símbolo \mathbf{M} representa a variedade. Uma simples ilustração desses conceitos é indicada na Figura 1.

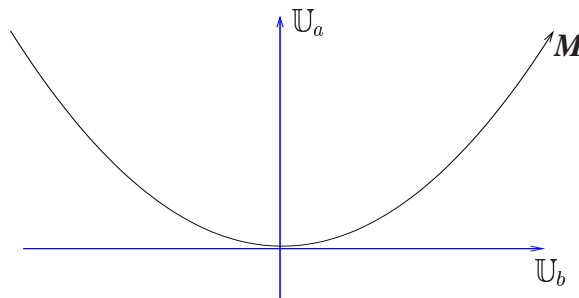


Figura 1: Diagrama esquemático da variedade \mathbf{M} .

O método de Galerkin não linear foi desenvolvido tradicionalmente no contexto de métodos espectrais, entretanto, também pode ser formulado no contextos de elementos finitos, diferenças finitas e de wavelet. Uma vantagem do método de Galerkin não linear é permitir a integração temporal de ondas curtas com grandes passos de tempo. Do ponto de vista prático, isto implica um significativo ganho de tempo computacional, e uma maior estabilidade. Essas vantagens foram detectadas em Sotil

(1999), em que o método de Galerkin não linear espectral é utilizado na discretização do modelo de água rasa.

Uma técnica muito similar ao método de Galerkin não linear foi introduzida no final da década de 70, simultaneamente, por Machenhauer e por Baer e Tribbia, no contexto de inicialização linear por modos normais em modelos meteorológicos (Leith, 1980). Nesse contexto, a condição $\| \mathbb{U}_a \| \ll \| \mathbb{U}_b \|$ não é assumida. O que é considerado é a chamada condição de balanço não linear $\| \frac{\partial \mathbb{U}_a}{\partial t} \| \sim 0$, que conduz a estados $\mathbb{U} = \mathbb{U}_b + \mathbb{U}_p$ pertencentes a variedades chamadas variedades lentas ou de estado não linearmente balanceados. Em Daley (1981) encontra-se um tutorial sobre as técnicas de inicialização em modos normais e uma ampla bibliografia sobre o assunto. Uma aplicação dessa técnica no modelo de água rasa para latitudes tropicais, no caso em que o termo não linear é substituído por uma forçante no campo de massa, é discutida em Silva Dias et al. (1983). A separação dos modos de alta e baixa frequência das ondas do modelo de água rasa é imediata no caso do modelo de água rasa para latitudes médias, em que separam-se as ondas de Rossby (modo alto) das ondas de gravidade (modo baixo). No caso equatorial, essa separação precisa ser feita com mais cuidado, pois, por exemplo, as ondas de Kelvin não se enquadram nesse tipo de separação (Daley, 1981).

Neste trabalho o objetivo é formular o método de Galerkin não linear para as discretizações de Petrov-Galerkin, no contexto de análise multirresolução biortogonal, para as equações de água rasa seguindo as idéias de Sotil (1999).

2 Equações de Água Rasa

O modelo de água rasa é obtido de simplificações nas Equações do Movimento de Newton e na Equação da Continuidade (Pedlosky, 1987). Neste trabalho, considera-se o modelo de água rasa com forçante e termo dissipativo proposto por Lorenz (1986). Em coordenadas cartesianas bidimensionais, na forma adimensional, ele consiste do seguinte sistema :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - v + \bar{g} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \nu \nabla^2 u = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + u + \bar{g} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \nu \nabla^2 v = 0 \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} + (\eta + g_0) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \kappa \nabla^2 \eta = F \quad (1c)$$

em que $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$ são as componentes nas direções x e y , respectivamente, conhecidas como componente zonal e meridional do vetor velocidade, e $\eta = \eta(x, y, t)$ é a altura do fluido ; $F = F(x, y)$ representa uma forçante; ν, κ são constantes de adimensionalização correspondentes ao número de Reynolds; e g_0 é uma constante de adimensionalização correspondente à aceleração gravitacional. No presente trabalho, consideram-se condições de fronteira periódicas e o termo forçante independente do tempo.

Para facilitar a aplicação do método de Petrov-Galerkin não linear, adota-se a notação a seguir para o modelo de água rasa (expresso no Sistema 1)

$$\frac{\partial \mathbb{U}}{\partial t} - \mathbb{A}(\mathbb{U}) + \mathbb{B}(\mathbb{U}) + \mathbb{C}(\mathbb{U}) = \mathbb{F} \quad (2)$$

em que

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{V} \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \mu \nabla^2 \vec{V} \\ \kappa \nabla^2 \eta \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \\ \nabla \cdot (\eta \vec{V}) \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{C}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \vec{k} \times \vec{V} + \nabla \eta \\ g_0 \nabla \cdot \vec{V} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \mathbb{F} \end{pmatrix}.$$

3 Método de Petrov-Galerkin Linear

3.1 Modelo Semi-discreto em um Único Nível

Sejam \mathcal{V} um espaço aproximante de funções periódicas e \mathcal{P} um operador de projeção sobre tal espaço. Na discretização espacial do sistema (2) pelo esquema de Petrov–Galerkin considera-se uma solução aproximada $\mathbb{U} \in \mathcal{V}$ tal que

$$\frac{\partial \mathbb{U}}{\partial t} + \mathcal{P} [-\mathbb{A}(\mathbf{U}) + \mathbb{B}(\mathbf{U}) + \mathbb{C}(\mathbf{U})] = \mathcal{P} \mathbb{F}. \quad (3)$$

Observa-se que no caso específico em que \mathcal{P} é o operador de projeção ortogonal sobre \mathcal{V} , o esquema reduz-se ao tradicional método de Galerkin. No caso de interesse deste artigo, consideram-se esquemas em que $\mathcal{V} = \mathcal{V}^{j+1}$ são espaços aproximantes de uma análise de multirresolução biortogonal (Amrb) que tipicamente ocorrem em análise wavelet e $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{j+1}$ são operadores de projeção biortogonal. O índice j identifica o nível de escala diádica 2^{-j-1} . Uma descrição dos conceitos principais sobre uma Amrb encontra-se no Apêndice A.

3.2 Modelo Semi-discreto em Multinível

Suponha que o espaço \mathcal{V} admita decomposições em soma direta de sub-espacos em vários níveis de escala. Para simplificar a exposição, considera-se o caso específico de dois níveis

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_b + \mathcal{V}_a$$

em que \mathcal{V}_b representa as funções de \mathcal{V} com *ondas longas* (frequências baixas) e \mathcal{V}_a contém as funções de \mathcal{V} com *ondas curtas* (frequências altas). Assim, a solução numérica \mathbb{U} pode ser decomposta em suas componentes de baixa e alta frequências

$$\mathbb{U} = \mathbb{U}_a + \mathbb{U}_b = \begin{pmatrix} \vec{V}_b + \vec{V}_a \\ \eta_b + \eta_a \end{pmatrix},$$

De maneira análoga, suponha que a projeção \mathcal{P} possa ser decomposta como

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_b + \mathcal{P}_a,$$

em que \mathcal{P}_b e \mathcal{P}_a são projeções sobre \mathcal{V}_b e \mathcal{V}_a , respectivamente, verificando as seguintes propriedades

$$\mathcal{P}_a \mathbb{U}_b = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_b \mathbb{U}_a = 0.$$

No contexto de Amrb de interesse , em que $\mathcal{V} = \mathcal{V}^{j+1}$, o espaço de ondas longas $\mathcal{V}_b = \mathcal{V}^j$ corresponde ao nível de escala diádica 2^j . Já o espaço de ondas curtas $\mathcal{V}_a = \mathcal{W}^j$ é representado por espaços complementares de wavelet, como descrito no Apêndice A.

De maneira análoga, o operador de projeção biortogonal $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{j+1}$ admite a representação $\mathcal{P}^{j+1} = \mathcal{P}^j + \mathcal{Q}^j$, em que identificam-se $\mathcal{P}_b = \mathcal{P}^j$ e $\mathcal{P}_a = \mathcal{Q}^j$ às projeções biortogonais sobre \mathcal{V}^j e \mathcal{W}^j , respectivamente. Neste contexto biortogonal, o sistema (2) se transforma em dois sub-sistemas

- **Sistema das ondas longas:**

$$\frac{\partial \mathbb{U}_b}{\partial t} + \mathcal{P}_b [-\mathbb{A}(\mathbb{U}_a + \mathbb{U}_b) + +\mathbb{C}(\mathbb{U}_a + \mathbb{U}_b)] = -\mathcal{P}_b [\mathbb{B}(\mathbb{U}_a + \mathbb{U}_b) - \mathbb{F}] \quad (4)$$

- **Sistema das ondas curtas**

$$\frac{\partial \mathbb{U}_a}{\partial t} + \mathcal{P}_a [-\mathbb{A}(\mathbb{U}_a + \mathbb{U}_b) + +\mathbb{C}(\mathbb{U}_a + \mathbb{U}_b)] = -\mathcal{P}_a [\mathbb{B}(\mathbb{U}_a + \mathbb{U}_b) - \mathbb{F}] \quad (5)$$

4 Método de Petrov-Galerkin Não Linear

De forma análoga ao método de Galerkin não linear para espaços de Fourier e de elementos finitos, define-se o método de Petrov-Galerkin não linear por meio das seguintes modificações nos sistemas (4) e (5):

- Desprezam-se as interações entre duas componentes de alta frequência no termo não linear do sistema (4) (i.e., interações de termos com sub-índices a). Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(\mathbb{U}_a + \mathbb{U}_b) &= \left(\begin{array}{c} (\vec{V}_b + \vec{V}_a) \cdot \nabla (\vec{V}_b + \vec{V}_a) \\ \nabla \cdot [(\eta_b + \eta_a) (\vec{V}_b + \vec{V}_a)] \end{array} \right) \\ &\approx \left(\begin{array}{c} (\vec{V}_b + \vec{V}_a) \cdot \nabla \vec{V}_b + \vec{V}_b \cdot \nabla \vec{V}_a \\ \nabla \cdot [(\eta_b + \eta_a) \vec{V}_b] + \nabla \cdot (\eta_b \vec{V}_a) \end{array} \right) = \mathbb{B}_b(\mathbb{U}_b, \mathbb{U}_a). \end{aligned}$$

Define-se

$$\mathbb{S}_b = -\mathcal{P}_b [\mathbb{B}_b(\mathbb{U}_b, \mathbb{U}_a) - \mathbb{F}]. \quad (6)$$

- Desprezam-se todas as interações em que uma das componentes seja de frequência alta no termo não linear do sistema (5). Assim,

$$\mathbb{B}(\mathbb{U}_a + \mathbb{U}_b) \approx \left(\begin{array}{c} \vec{V}_b \cdot \nabla \vec{V}_b \\ \nabla \cdot (\eta_b \vec{V}_b) \end{array} \right) = \mathbb{B}_a(\mathbb{U}_b).$$

Define-se

$$\mathbb{S}_a = -\mathcal{P}_a [\mathbb{B}_a(\mathbb{U}_b) - \mathbb{F}]. \quad (7)$$

- Elimina-se o termo da derivada temporal no sub-sistema de ondas curtas, tornando-o um sistema diagnóstico.

Em resumo, o sistema de água rasa com a aproximação de Petrov–Galerkin não linear é expresso pelos sistemas,

- **Sistema das ondas longas**

$$\frac{\partial \mathbb{U}_b}{\partial t} + \mathcal{P}_b [-\mathbb{A}(\mathbb{U}_a + \mathbb{U}_b) + \mathbb{C}(\mathbb{U}_a + \mathbb{U}_b)] = \mathbb{S}_b. \quad (8)$$

- **Sistema das ondas curtas**

$$\mathcal{P}_a [-\mathbb{A}(\mathbb{U}_a + \mathbb{U}_b) + \mathbb{C}(\mathbb{U}_a + \mathbb{U}_b)] = \mathbb{S}_a. \quad (9)$$

O termo no segundo membro da igualdade do sistema de ondas curtas, depende apenas da componente de onda longa $\mathbb{S}_a = \mathbb{S}_a(\mathbb{U}_b)$, conforme equação (7). Portanto, a componente de ondas curtas \mathbb{U}_a pode ser expressa como uma função da componente de ondas longas \mathbb{U}_b

$$\mathbb{U}_a = \mathbb{D}^{-1} [\mathbb{S}_a - \mathbb{D}] (\mathbb{U}_b), \quad (10)$$

em que $\mathbb{D} = \mathcal{P}_a [-\mathbb{A} + \mathbb{C}]$. Esta é a característica não linear do método, no sentido de que as componentes da solução $\{ \mathbb{U}_b, \mathbb{U}_a \}$ encontram-se na variedade não linear, definida pelo gráfico do operador $\mathbb{D}^{-1} [\mathbb{S}_a - \mathbb{D}]$ sobre \mathcal{V}_b .

4.0.1 Discretização Temporal (em Três Etapas)

Para discretização temporal, são adotados esquemas de diferenças finitas apropriados nos sistemas (9) e (8). Com intuito de desacoplar as equações são introduzidas algumas simplificação como descrito a seguir.

- **Sistema das ondas curtas** — Os termos referentes às baixas frequências são avaliados no tempo n e os termos referentes às altas frequências no tempo $n + 1$.
- **Sistema das ondas longas** — Nos termos lineares, o mesmo esquema implícito do caso de Petrov–Galerkin é utilizado. Já no termo não linear, a componente de baixa frequência é avaliada no tempo n e a componente de alta frequência no tempo $n + 1$. Observe que a componente de alta frequência do tempo $n + 1$ é obtida do sistema das ondas curtas.

Mais explicitamente, o esquema de diferenças finitas utilizado está apresentado no quadro a seguir, em que o termo linear L se refere aos termos \mathbb{A} e \mathbb{C} , e o termo não linear NL se refere ao termo \mathbb{B} .

Termos	$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}$	Linear (L)	Não-Linear (NL)
Discretização (ondas longas)	$\frac{\mathcal{U}_b^{n+1} - \mathcal{U}_b^{n-1}}{2\Delta t}$	$\frac{1}{2} [\mathbb{L}(\mathbb{U}_b^{n+1} + \mathbb{U}_a^{n+1}) + \mathbb{L}(\mathbb{U}_b^{n-1} + \mathbb{U}_a^{n-1})]$	$\text{NL}(\mathbb{U}_b^n + \mathbb{U}_a^{n+1})$
Discretização (ondas curtas)		$\mathbb{L}(\mathbb{U}_b^n + \mathbb{U}_a^{n+1})$	$\text{NL}(\mathbb{U}_b^n)$

Posto isso, têm-se que os sistemas discretos podem ser expressos da seguinte forma:

1. Sistema das ondas longas

$$\mathbb{U}_b^{n+1} + \Delta t \mathcal{P}_b \left[-\mathbb{A} (\mathbb{U}_b^{n+1} + \mathbb{U}_a^{n+1}) + \mathbb{C} (\mathbb{U}_b^{n+1} + \mathbb{U}_a^{n+1}) \right] = \mathbb{S}_b^{n-1} + 2 \mathbb{S}_b^{n,n+1},$$

em que

$$\mathbb{S}_b^{n-1} = \mathbb{U}_b^{n-1} - \Delta t \mathcal{P}_b \left[-\mathbb{A} (\mathbb{U}_b^{n-1} + \mathbb{U}_a^{n-1}) + \mathbb{C} (\mathbb{U}_b^{n-1} + \mathbb{U}_a^{n-1}) \right],$$

$$\mathbb{S}_b^{n,n+1} = -2\Delta t \mathcal{P}_b \left[\tilde{\mathbb{B}}_b (\mathbb{U}_b^n + \mathbb{U}_a^{n+1}) - \mathbb{F} \right].$$

2. Sistema das ondas curtas (sistema diagnóstico)

$$\mathcal{P}_a \left[-\mathbb{A} (\mathbb{U}_b^n + \mathbb{U}_a^{n+1}) + \mathbb{C} (\mathbb{U}_b^n + \mathbb{U}_a^{n+1}) \right] = \mathbb{S}_a^n,$$

em que

$$\mathbb{S}_a^n = -\mathcal{P}_a \left[\mathbb{B}_a (\mathbb{U}_b^n) - \mathbb{F} \right].$$

Observa-se que \mathbb{U}_a^{n+1} é uma função de \mathbb{U}_b^n .

A seguir são apresentados as etapas necessárias para se resolver esses sistemas por meio desse método.

★ Algoritmo de Evolução Temporal

1. Dados de Entrada: $(\mathbb{U}_a^{n-1}, \mathbb{U}_b^{n-1})$ e $(\mathbb{U}_a^n, \mathbb{U}_b^n)$.
2. Calcular \mathbb{U}_a^{n+1} , resolvendo o sistema diagnóstico, que é linear.
3. Calcular \mathbb{U}_b^{n+1} , resolvendo o sistema de ondas longas.
4. $n \leftarrow n + 1$; Retorna-se ao passo 1.

5 Comentários Finais

No trabalho de Sotil (1999), a implementação numérica do método de Galerkin não linear para o sistema de água rasa, utilizando bases de Fourier, mostra-se competitiva comparada com a do método de Galerkin tradicional. Esse ganho computacional foi obtido utilizando um "congelamento" da solução do sistema de ondas curtas por um certo número de passos. Em princípio, essa idéia também poderia ser implementada no contexto de Petrov-Galerkin não linear biortogonal, descrito neste artigo. Mas, antes disso, os detalhes da implementação numérica em multinível, tanto dos ternos lineares, quanto dos não lineares, precisam ser melhor avaliados.

No contexto de wavelet, a idéia principal é poder tirar proveito de representações compactas de funções, para desenhar esquemas adaptáveis espacialmente. Nesse sentido, o desafio é tentar combinar as vantagens de uma representação esparsa espacialmente com um esquema adaptável no tempo, como o descrito neste artigo. Isso se torna ainda mais atrativo quando as discretizações espaciais puderem ser alterados de forma automática, de acordo com a evolução do comportamento da solução. Atenção especial aos aspectos da adaptatividade espacial, que é um dos pré-requisitos necessários ao sucesso do método de Petrov–Galerkin não linear no contexto de wavelet, são descritos em Domingues et al. (2002) .

Referências

- Chehab, J. P. A nonlinear adaptative multiresolution methods in finite differences with incremental unknowns. **Mathematical Modelling and Numerical Analysis**, v. 29, n. 4, p. 451–475, 1995.
- Chen, M.; Temam, R. Incremental unknowns for solving partial differential equations. **Numer. Math.**, v. 59, p. 255–271, 1991a.
- . Incremental unknowns method I. **Appl. Math. Lett.**, v. 4, n. 3, p. 73–76, 1991b.
- . Incremental unknowns method II. **Appl. Math. Lett.**, v. 4, n. 3, p. 77–80, 1991c.
- Daley, R. Normal mode inicialization. **Reviews of Geophisics and Space Physics**, v. 9, n. 3, p. 450–468, Aug 1981.
- Domingues, M. O. **Análise wavelet na simulação numérica de equações diferenciais parciais com adaptabilidade espacial**. Campinas, São Paulo. Tese de doutorado em matemática aplicada – Universidade Estadual de Campinas, outubro 2001.
- Domingues, M. O.; Gomes, S. M.; Díaz, L. M. Representation and differentiation in adaptive block-structured grids. **Appl. Numer. Mathem.**, 2002.
- Dubois, T.; Jeanberteau, F.; Temam, R. Incremental unknown, multilevel methods and numerical simulation of turbulence. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 159, p. 123–189, 1998.
- Leith, C. E. Nonlinear normal mode initialization and quasi–geostrophic theory. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 37, p. 958–968, 1980.
- Lorenz, E. On the existence of slow manifolds. **Journal of Atmospheric Sciences**, v. 43, p. 1547–1557, 1986.
- Mallat, S. Multiresolution approximations and wavelets orthonormal bases. **Trans. of Americam Mathematical Society**, v. 315, p. 334–351, 1991.
- Pedlosky, J. **Geophysical fluid dynamics**. 2. ed. New York: Spring-Verlag, 1987. 710 p.
- Silva Dias, P. L.; Schubert, W. H.; DeMaria, M. Large–scale response of tropical atmosphere to transient convection. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 40, p. 2689–2707, 1983.
- Sotil, J. W. C. **Variedades inerciais aproximadas e métodos de galerkin não linear para as equações de Água rasa**. Tese – Instituto de Matemática e Estatística. Universidade de São Paulo, 1999.
- Temam, R. Induced trajectories and approximate inertial manifolds. **Mathematical Modelling and Numerical Analysis**, v. 23, p. 541–561, 1989.
- . Inertial manifolds and multigrid methods. **SIAM Journal Numerical Analisis**, v. 21, n. 1, p. 154–178, Jan 1990.
- . General methods for approximating inertial manifolds. Applications to computing. In: Bromhead, D. S.; Iseiles, A. ed. **The Dynamics of Numerical and the numerics of the dynamics**. Clarudo Press, 1992. v. 1, p. 1–21.

A Análise de Multirresolução Biortogonal

Neste apêndice apresentam-se as definições e as propriedades de interesse sobre o contexto de análise de multirresolução (Amr) de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$. Na definição de uma Amr o principal ingrediente é uma função a $\phi(x)$, conhecida como função escala, satisfazendo uma relação de escala

$$\phi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) \phi(2x - k). \quad (11)$$

No domínio da frequência, a relação de escala é expressa como

$$\hat{\phi}(\xi) = H(\xi/2) \hat{\phi}(\xi/2), \quad (12)$$

em que $H(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{-ik\xi}$ é um filtro de escala do tipo passa-baixa, i.e., $H(0) = 1$ e $H(\pi) = 0$. Tipicamente, os coeficientes $h(k)$ são diferentes de zero apenas para um número finito de índices, o que implica que o suporte de $\phi(x)$ é um intervalo finito. Tendo uma função de escala $\phi(x)$, pode-se definir uma Amr bidimensional por meio de produto tensorial. Assim, para cada inteiro j , considera-se o sub-espaço $\mathcal{V}^j \subset \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ gerado por funções básicas do tipo

$$\Phi_{k,\ell}^j(x, y) = 2^j \phi(2^j x - k) \phi(2^j y - \ell), \quad k, \ell \in \mathbb{Z}. \quad (13)$$

Além disso, pela relação de escala apresentada na Equação 11, tem-se que $\mathcal{V}^{j-1} \subset \mathcal{V}^j$. A grande contribuição da teoria wavelet é a caracterização de representações em multinível,

$$\mathcal{V}^j = \mathcal{V}^{j_0} + \mathcal{W}^{j_0} + \dots + \mathcal{W}^{j-1}. \quad (14)$$

Para tal propósito, em um contexto biortogonal, considera-se uma outra Amr $\mathcal{V}^{*j} \subset \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$, associada a uma função de escala $\phi^*(x)$, satisfazendo a relação de biortogonalidade

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x - k) \phi^*(x - \ell) dx = \delta_{k,\ell}. \quad (15)$$

Conseqüentemente, também é verdadeira a relação

$$\langle \Phi_{k,\ell}^j, \Phi_{k',\ell'}^{*j} \rangle := \int \int_{\mathbb{R}^2} \Phi_{k,\ell}^j(x, y) \Phi_{k',\ell'}^{*j}(x, y) dx dy = \delta_{k,k'} \delta_{\ell,\ell'}. \quad (16)$$

Para a definição dos espaços intermediários \mathcal{W}^m , consideram-se funções wavelet básicas ψ e ψ^* como

$$\psi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k) \phi(2x - k), \quad \psi^*(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} g^*(k) \phi^*(2x - k) \quad (17)$$

em que $g(k) = (-1)^{k+1} h^*(-k + 1)$ e $g^*(k) = (-1)^{k+1} h(-k + 1)$. Desta forma, constroem-se os espaços

$$\mathcal{W}^m = \mathcal{W}^{m(1)} + \mathcal{W}^{m(2)} + \mathcal{W}^{m(3)}$$

gerados por três famílias de wavelets,

$$\Upsilon_{k,\ell}^{m(1)}(x, y) = 2^m \phi(2^m x - k) \psi(2^m y - \ell), \quad (18a)$$

$$\Upsilon_{k,\ell}^{m(2)}(x, y) = 2^m \psi(2^m x - k) \phi(2^m y - \ell), \quad (18b)$$

$$\Upsilon_{k,\ell}^{m(3)}(x, y) = 2^m \psi(2^m x - k) \psi(2^m y - \ell). \quad (18c)$$

De forma similar, definem-se funções $\Upsilon_{k,\ell}^{*m(1)}(x, y)$, $\Upsilon_{k,\ell}^{*m(2)}(x, y)$ e $\Upsilon_{k,\ell}^{*m(3)}(x, y)$ e resultam as seguintes relações de biortogonalidade:

$$\left\langle \Phi_{k,\ell}^m, \Upsilon_{k',\ell'}^{*m(\nu)} \right\rangle = 0 \quad (19a)$$

$$\left\langle \Phi_{k,\ell}^{*m}, \Upsilon_{k',\ell'}^m(\nu) \right\rangle = 0, \quad (19b)$$

$$\left\langle \Upsilon_{k,\ell}^m(\nu), \Upsilon_{k',\ell'}^{*m'(\nu')} \right\rangle = \delta_{m,m'} \delta_{k,k'} \delta_{\ell,\ell'} \delta_{\nu,\nu'}. \quad (19c)$$

Sendo assim, uma função $f \in \mathcal{V}^j$ pode ser representada de duas maneiras, como apresentado a seguir.

a) Em um único nível

$$f(x, y) = \sum_k \sum_l f_{k,\ell}^j \Phi_{k,\ell}^j(x, y) \quad (20)$$

em que os valores discretos $f^j = \mathcal{D}^j f$ são obtidos pela ação de funcionais lineares duais

$$f_{k,\ell}^j = \langle f, \Phi_{k,\ell}^{*j} \rangle := (\mathcal{D}^j f)_{k,\ell}. \quad (21)$$

b) Em associação com a representação em multinível apresentada na Equação 14, tem-se que

$$f(x, y) = \sum_k \sum_\ell f_{k,\ell}^{j_0} \Phi_{k,\ell}^{j_0}(x, y) + \sum_{m=j_0}^{j-1} \sum_{\nu=1}^3 \sum_k \sum_\ell f_{k,\ell}^{m(\nu)} \Upsilon_{k,\ell}^{m(\nu)}(x, y), \quad (22)$$

em que os chamados coeficientes wavelet $f^{m(\nu)} = \mathcal{G}^{m(\nu)} f$ são obtidos pela ação de funcionais lineares duais

$$f_{k,\ell}^{m(\nu)} = \left\langle f, \Upsilon_{k,\ell}^{*m(\nu)} \right\rangle := (\mathcal{G}^{m(\nu)} f)_{k,\ell} \quad (23)$$

Para as transformações

$$\{f_{k,\ell}^j\} \leftrightarrow \{f_{k,\ell}^{j_0}\} \cup \{f_{k,\ell}^{j_0(\nu)}\} \cup \dots \cup \{f_{k,\ell}^{j-1(\nu)}\} \quad (24)$$

correspondentes à mudança de base

$$\{\Phi_{k,\ell}^j\} \leftrightarrow \{\Phi_{k,\ell}^{j_0}\} \cup \{\Upsilon_{k,\ell}^{j_0(\nu)}\} \cup \dots \cup \{\Upsilon_{k,\ell}^{j-1(\nu)}\}, \quad (25)$$

são utilizados os Algoritmos de Mallat, que possuem uma estrutura de banco de filtros Mallat (1991).

A.1 Aproximação

Funções $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$ podem ser aproximadas por funções em \mathcal{V}^j por meio da projeção biortogonal $\mathcal{P}^j f$. Para facilitar a exposição que se segue, adota-se a representação da projeção biortogonal como uma composição de dois operadores $\mathcal{P}^j = \mathcal{R}^j \mathcal{D}^j$. \mathcal{D}^j é o operador de discretização que associa a cada função $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$ os seus coeficientes de escala $f_{k,\ell}^j$, definidos na Equação 21, e $\mathcal{R}^j(x, y; f^j)$ é o operador de prolongamento que a cada seqüencia $f^j \in \ell^2$ associa uma função em \mathcal{V}^j definida em termos da expansão

$$\mathcal{R}^j(x, y; f^j) = \sum_k \sum_\ell f_{k,\ell}^j \Phi_{k,\ell}^j(x, y). \quad (26)$$

Analogamente, a projeção biortogonal também pode ser representada pela composição de dois operadores em multinível $\mathcal{P}^j = \mathcal{R}_{\text{MN}}^j \mathcal{D}_{\text{MN}}^j$. $\mathcal{D}_{\text{MN}}^j$ denota o operador de discretização que associa a cada função em $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$ os seus coeficientes em multinível $f_{\text{MN}}^j = \{f_{k,\ell}^{j_0}\} \cup \{f_{k,\ell}^{j_0^{(\nu)}}\} \cup \dots \cup \{f_{k,\ell}^{j_0^{-1}(\nu)}\}$. O operador de prolongamento $\mathcal{R}_{\text{MN}}^j$ corresponde à expansão em termos da base em multinível

$$\mathcal{R}^j(x, y; f_{\text{MN}}^j) = \sum_k \sum_\ell f_{k,\ell}^{j_0} \Phi_{k,\ell}^{j_0}(x, y) + \sum_{m=j_0}^{j-1} \sum_{\nu=1}^3 \sum_k \sum_\ell f_{k,\ell}^{j(\nu)} \Upsilon_{k,\ell}^{m(\nu)}(x, y). \quad (27)$$

Observa-se que a diferença de informação entre uma aproximação no nível m e outra em no nível $m + 1$ é expressa pela projeção biortogonal $Q^m f(x, y)$ sobre \mathcal{W}^m , que tem a forma

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}^{m+1} - \mathcal{P}^m) f(x, y) &= Q^m f(x, y) \\ &= Q^{m(1)} f(x, y) + Q^{m(2)} f(x, y) + Q^{m(3)} f(x, y), \end{aligned} \quad (28)$$

em que $Q^{m(\nu)} f(x, y)$ são as projeções biortogonais sobre as respectivas componentes $\mathcal{W}^{m(\nu)}$.

Ou seja,

$$Q^{m(\nu)} f(x, y) = \sum_k \sum_\ell f_{k,\ell}^{m(\nu)} \Upsilon_{k,\ell}^{m(\nu)}(x, y). \quad (29)$$

A.2 Dupla Localização

De modo geral, aproximações em multirresolução possuem duas características fundamentais:

- **Localização Física:** Tipicamente, a função de escala $\phi(x)$ tem suporte em um intervalo finito, com comprimento Δx . Desta forma, à medida que j aumenta, as funções básicas $\Phi_{k,\ell}^j(x, y)$ ficam localizadas em quadrados de lado cada vez menores, de escala $\Delta^j = O(2^{-j})$. Os índices k, ℓ indicam a translação $(k2^{-j}, l2^{-j})$ efetuada. Assim, em cada nível de escala j , todas as funções escala $\Phi_{k,\ell}^j(x, y)$ possuem a mesma forma, só mudando a posição em que estão localizadas. Este comportamento é similar para as e as funções wavelets $\Upsilon_{k,\ell}^{j(\nu)}(x, y)$, bem como para as funções duais correspondentes. Na Figura 2(a) e (b) estão os gráficos de uma função escala e a wavelet associada. Este é um dos exemplos da família de wavelets ortogonais de Daubechies. Observa-se que, neste caso, o suporte de $\phi(x)$ é o intervalo $[0, 3]$ e $\psi(x)$ se anula fora de $[-1, 2]$.

- **Localização em Frequência:** Como visto anteriormente, as funções escala são construídas em termos de um filtro passa-baixa $H(\xi)$. Em conseqüência dessa construção, a transformada de Fourier $\hat{\phi}(\xi)$ está localizada simetricamente em uma região centrada em torno de $\xi = 0$. O caso das wavelets é diferente. Tipicamente, $\hat{\psi}(\xi)$ também é uma função simétrica, mas que se anula em $\xi = 0$. Para $\xi > 0$, concentra-se em uma região de comprimento $\Delta\xi$. Na Figura 3(a) e (b) estão os gráficos das transformadas de Fourier $|\hat{\phi}(\xi)|$ e $|\hat{\psi}(\xi)|$ correspondentes ao exemplo de Daubechies.

De forma análoga, no caso bi-dimensional, segue que $\hat{\Phi}(\xi, \omega) = \hat{\phi}(\xi)\hat{\phi}(\omega)$ funciona como um filtro passa baixa, com localização em uma região Ω_b centrada em $(0, 0)$. Para as wavelets, $\hat{\Upsilon}^{(1)}(\xi, \omega) = \hat{\phi}(\xi)\hat{\psi}(\omega)$, $\hat{\Upsilon}^{(2)}(\xi, \omega) = \hat{\psi}(\xi)\hat{\phi}(\omega)$ e $\hat{\Upsilon}^{(3)}(\xi, \omega) = \hat{\psi}(\xi)\hat{\psi}(\omega)$ se anulam em $(0, 0)$ e funcionam como filtros passa-banda, cujas localizações compõem um anel retangular Ω_a ao redor da origem.

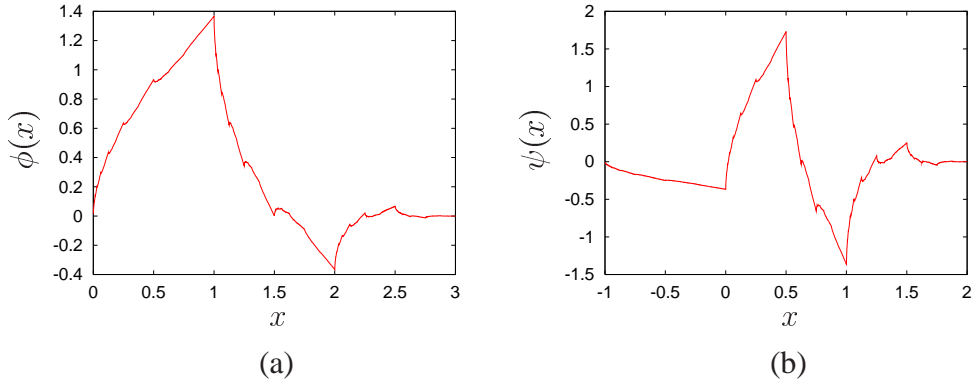


Figura 2: Gráficos de uma função escala e wavelet de Daubechies.

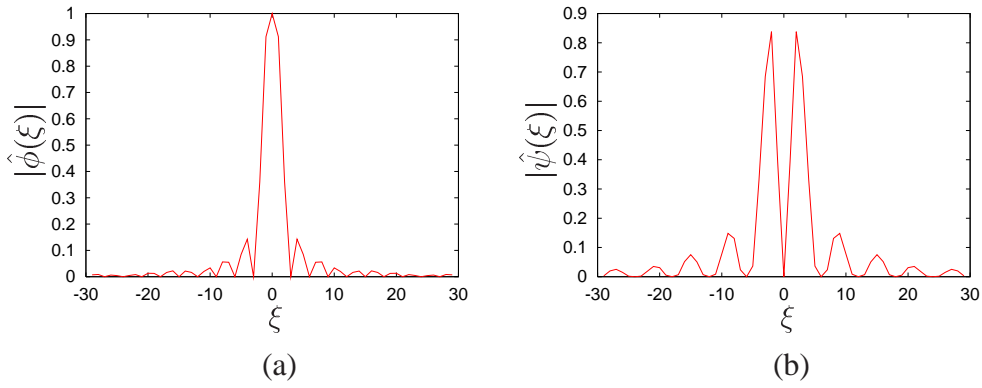


Figura 3: Gráficos do espectro da função escala e wavelet de Daubechies, referentes à Figura 2.

Com a mudança de escala 2^{-j} , $j > 0$, estas regiões se ampliam para Ω_b^j , no caso de $\hat{\Phi}_{k,l}^j$, e para Ω_a^j , no caso das wavelets $\hat{\Upsilon}_{k,\ell}^{j(\nu)}$, com um fator inversamente proporcional à escala (independentemente dos parâmetros de translação k, ℓ). Portanto, combinando as propriedades de dupla localização, tanto no domínio espacial quanto no domínio das frequências, percebe-se que os coeficientes de escala $f_{k,\ell}^j$ são uma medida do conteúdo frequencial de f associado às frequências $(\xi, \omega) \in \Omega_b^j$ que ocorrem no suporte de $\Phi_{k,\ell}^{*j}(x, y)$. Analogamente, os coeficientes wavelet $f_{k,\ell}^{j(\nu)}$ são uma medida do conteúdo frequencial de f associado às frequências $(\xi, \omega) \in \Omega_a^j$ que ocorrem no suporte de $\Upsilon_{k,\ell}^{*j(\nu)}(x, y)$. Tais fatos justificam a interpretação da transformada wavelet como sendo do tipo *local em tempo-frequência*. Sendo assim, a representação em soma direta apresentada na Equação 14 pode ser interpretada como uma decomposição de funções de \mathcal{V}^{j+1} , cujo espectro se encontra em Ω_b^{j+1} , na soma de uma componente de baixa frequência pertencente a \mathcal{V}^j , cujo espectro localiza-se em Ω_b^j , com outra componente de alta frequência pertencente a \mathcal{W}^j , cujo espectro localiza-se em Ω_a^j . Portanto, pode-se identificar \mathcal{V}^j a um espaço de ondas longas e \mathcal{W}^j a um espaço de ondas curtas, como requerido nas aplicações do método de Petrov-Galerkin não linear. As mesmas idéias podem ser estendidas a vários níveis de escala.

B Esquema de Petrov-Galerkin

Neste apêndice, descrevem-se os principais conceitos sobre aproximações \mathcal{L}^j de operadores diferenciais \mathcal{L} , no contexto de uma Amrb $\{\mathcal{V}^j, \mathcal{V}^{*j}\}$. São de interesse dois tipos de operadores.

a) Operadores lineares de derivadas parciais $\mathcal{L}u = \frac{\partial^s u}{\partial x^s}$ ou $\mathcal{L}u = \frac{\partial^s u}{\partial y^s}$. Nestes casos, define-se $\mathcal{L}^j u \in \mathcal{V}^j$ pela fórmula

$$\mathcal{L}^j u = \mathcal{P}^j \mathcal{L} \mathcal{P}^j u. \quad (30)$$

b) Operadores bilineares do tipo $\mathcal{L}(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x} v$ ou $\mathcal{L}(u, v) = \frac{\partial u}{\partial y} v$. Nestes casos, define-se

$$\mathcal{L}^j(u, v) = \mathcal{P}^j \mathcal{L}(\mathcal{P}^j u, \mathcal{P}^j v). \quad (31)$$

Tendo em vista que a projeção biortogonal \mathcal{P}^j pode ser representada em um único nível ou em multinível, também existem duas maneiras de representar as aproximações de operadores diferenciais, em um nível \mathcal{L}^j e em multinível \mathcal{L}_{MN}^j . Em ambos casos, as representações ficam determinadas pelo resultado dos respectivos operadores de discretização aplicados sobre $\mathcal{L} \mathcal{P}^j u$, no caso linear, ou sobre $\mathcal{L}(\mathcal{P}^j u, \mathcal{P}^j u)$, no caso bilinear. Por exemplo, a aproximação em um nível

$$\mathcal{L}^j u = \sum_{p,q} (\mathcal{D}^j \mathcal{L} \mathcal{P}^j u)_{p,q} \Phi_{p,q}^j \quad (32)$$

fica determinada uma vez calculados os valores discretos $(\mathcal{D}^j \mathcal{L} \mathcal{P}^j u)_{p,q}$. Por outro lado, uma aproximação em multinível

$$\mathcal{L}_{MN}^j u = \sum_{p,q} (\mathcal{D}^{j_0} \mathcal{L} \mathcal{P}^j u)_{p,q} \Phi_{p,q}^{j_0} + \sum_{m=j_0}^{j-1} \sum_{\nu=1}^3 \sum_{p,q} (\mathcal{G}^{m(\nu)} \mathcal{L} \mathcal{P}^j u)_{p,q} \Upsilon_{p,q}^{m(\nu)} \quad (33)$$

requer o cálculo dos valores discretos $(\mathcal{D}^{j_0} \mathcal{L} \mathcal{P}^j u)_{p,q}$, do nível menos refinado, e os coeficientes wavelet $(\mathcal{G}^{m(\nu)} \mathcal{L} \mathcal{P}^j u)_{p,q}$, dos níveis superiores.

B.1 Representação em um único nível

B.1.1 Caso linear

Sendo $\mathcal{P}^j u(x, y) = \sum_k \sum_\ell u_{k,\ell}^j \Phi_{k,\ell}^j(x, y)$, em que $u^j = \mathcal{D}^j u$ é a discretização de u no nível j , obtém-se

$$\mathcal{L} \mathcal{P}^j u = \sum_{k,\ell} u_{k,\ell}^j \mathcal{L} \Phi_{k,\ell}^j(x, y). \quad (34)$$

Sendo $\mathcal{L}u = \frac{\partial^s u}{\partial x^s}$, em que $s = 1$ ou 2 , é a ordem da derivada, tem-se que

$$(\mathcal{D}^j \mathcal{L} \mathcal{P}^j u)_{p,q} = 2^{sj} \sum_k u_{k,q}^j \Gamma_{(0,0)}^{(s)}(k-p), \quad (35)$$

em que $\Gamma^{(s)}$ é o símbolo da derivada em questão

$$\Gamma_{(0,0)}^{(s)}(m) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d^s \phi}{dz^s}(z-m) \phi^*(z) dz. \quad (36)$$

Com raciocínio análogo, para $\mathcal{L}u = \frac{\partial^s u}{\partial y^s}$, conclui-se que

$$(\mathcal{D}^j \mathcal{L} \mathcal{P}^j u)_{p,q} = 2^{sj} \sum_{\ell} u_{p,\ell}^j \Gamma_{(0,0)}^{(s)}(\ell - q). \quad (37)$$

B.1.2 Caso bilinear

Seja

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u, v) &= \frac{\partial u}{\partial x} v, \\ \mathcal{P}^j u(x, y) &= \sum_{k,\ell} u_{k,\ell}^j \Phi_{k,\ell}^j(x, y), \\ \mathcal{P}^j v(x, y) &= \sum_{k',\ell'} v_{k',\ell'}^j \Phi_{k',\ell'}^j(x, y), \end{aligned}$$

em que $u^j = \mathcal{D}^j u$ e $v^j = \mathcal{D}^j v$ são as discretizações de u e v no nível j , segue que

$$\mathcal{L}(\mathcal{P}^j u, \mathcal{P}^j v) = \sum_{k,\ell} u_{k,\ell}^j \frac{\partial \Phi_{k,\ell}^j}{\partial x}(x, y) \sum_{k',\ell'} v_{k',\ell'}^j \Phi_{k',\ell'}^j(x, y).$$

Portanto,

$$[\mathcal{D}^j \mathcal{L}(\mathcal{P}^j u, \mathcal{P}^j v)]_{p,q} = 2^j \sum_{\substack{k,\ell \\ k',\ell'}} u_{k,\ell}^j v_{k',\ell'}^j \gamma^{(o)}(\ell - q, \ell' - q) \dot{\gamma}^{(o)}(k - p, k' - p), \quad (38)$$

em que

$$\gamma^{(o)}(m, n) = \int \phi(z - m) \phi(z - n) \phi^*(z) dz \quad (39)$$

$$\dot{\gamma}^{(o)}(m, n) = \int \frac{d\phi}{dz}(z - m) \phi(z - n) \phi^*(z) dz. \quad (40)$$

e a discretização expressa na Equação 32 fica determinada. Em Domingues (2001), descreve-se uma metodologia para o cálculo dos coeficientes Γ e γ e apresentam-se alguns exemplos para a família de splines biortogonais $\phi = \phi_{N,N^*}$, $\phi^* = \phi_{N^*}$

B.2 Representação em multinível

Para facilitar a exposição, consideram-se representações em dois níveis. Neste caso, a projeção biortogonal se expressa como

$$\mathcal{P}^j u(x, y) = \sum_{k,\ell} u_{k,\ell}^{j-1} \Phi_{k,\ell}^{j-1}(x, y) + \sum_{\nu=1}^3 \sum_{k,\ell} u_{k,\ell}^{j-1(\nu)} \Upsilon_{k,\ell}^{j-1(\nu)}(x, y) \quad (41)$$

$$= \mathcal{P}_b u(x, y) + \mathcal{P}_a u(x, y) \quad (42)$$

em que $u^{j-1} = \mathcal{D}^{j-1} u$ e $u^{j-1(\nu)} = \mathcal{G}^{j-1(\nu)} u$ correspondem à discretização de u no nível $j - 1$ e aos seus coeficientes wavelet no nível $j - 1$, respectivamente. Portanto, o operador \mathcal{L}_{MN}^j pode ser expresso por

$$\mathcal{L}_{MN}^j u = \mathcal{P}_b \mathcal{L} \mathcal{P}^j u + \mathcal{P}_a \mathcal{L} \mathcal{P}^j u \quad (43)$$

$$= \sum_{p,q} (\mathcal{D}^{j-1} \mathcal{L} \mathcal{P}^j u)_{p,q} \Phi_{p,q}^{j-1} + \sum_{\nu=1}^3 \sum_{p,q} (\mathcal{G}^{j-1(\nu)} \mathcal{L} \mathcal{P}^j u)_{p,q} \Upsilon_{p,q}^{j-1(\nu)} \quad (44)$$

B.2.1 Caso linear

Sendo \mathcal{L} um operador de derivadas parciais $\mathcal{L} = \frac{\partial^s}{\partial x^s}$ e utilizando as relações de biortogonalidade, expressas na Equação 18, os seguintes termos se anulam:

- $\mathcal{G}^{j-1(\nu)} (\mathcal{L}\Phi_{k,\ell}^{j-1})$ e $\mathcal{D}^{j-1} (\mathcal{L}\Upsilon_{k,\ell}^{j-1(\nu)})$, para $\nu = 1$ e $\nu = 3$
- $\mathcal{G}^{j-1(1)} (\mathcal{L}\Upsilon_{k,\ell}^{j-1(2)})$, $\mathcal{G}^{j-1(2)} (\mathcal{L}\Upsilon_{k,\ell}^{j-1(1)})$, $\mathcal{G}^{j-1(2)} (\mathcal{L}\Upsilon_{k,\ell}^{j-1(3)})$ e $\mathcal{G}^{j-1(3)} (\mathcal{L}\Upsilon_{k,\ell}^{j-1(2)})$.

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}^{j-1} \mathcal{L}\mathcal{P}^j u)_{p,q} &= \sum_{k,\ell} u_{k,\ell}^{j-1} (\mathcal{D}^{j-1} \mathcal{L}\Phi_{k,\ell}^{j-1})_{p,q} + \sum_{k,\ell} u_{k,\ell}^{j-1(2)} (\mathcal{D}^{j-1} \mathcal{L}\Upsilon_{k,\ell}^{j-1(2)})_{p,q} \\
&= 2^{j-1} \sum_k \left[u_{k,q}^{j-1} \Gamma_{(0,0)}^{(s)}(k-p) + u_{k,q}^{j-1(2)} \Gamma_{(0,1)}^{(s)}(k-p) \right], \\
(\mathcal{G}^{j-1(1)} \mathcal{L}\mathcal{P}^j u)_{p,q} &= \sum_{k,\ell} u_{k,\ell}^{j-1(1)} (\mathcal{G}^{j-1(1)} \mathcal{L}\Upsilon_{k,\ell}^{j-1(1)})_{p,q} + \sum_{k,\ell} u_{k,\ell}^{j-1(3)} (\mathcal{G}^{j-1(1)} \mathcal{L}\Upsilon_{k,\ell}^{j-1(3)})_{p,q} \\
&= 2^{j-1} \sum_k \left[u_{k,q}^{j-1(1)} \Gamma_{(0,0)}^{(s)}(k-p) + u_{k,q}^{j-1(3)} \Gamma_{(0,1)}^{(s)}(k-p) \right], \\
(\mathcal{G}^{j-1(2)} \mathcal{L}\mathcal{P}^j u)_{p,q} &= \sum_{k,\ell} u_{k,\ell}^{j-1} (\mathcal{G}^{j-1(2)} \mathcal{L}\Phi_{k,\ell}^{j-1})_{p,q} + \sum_{k,\ell} u_{k,\ell}^{j-1(2)} (\mathcal{G}^{j-1(2)} \mathcal{L}\Upsilon_{k,\ell}^{j-1(2)})_{p,q} \\
&= 2^{j-1} \sum_k \left[u_{k,q}^{j-1} \Gamma_{(1,0)}^{(s)}(k-p) + u_{k,q}^{j-1(2)} \Gamma_{(1,1)}^{(s)}(k-p) \right], \\
(\mathcal{G}^{j-1(3)} \mathcal{L}\mathcal{P}^j u)_{p,q} &= \sum_{k,\ell} u_{k,\ell}^{j-1(1)} \mathcal{G}^{j-1(3)} (\mathcal{L}\Upsilon_{k,\ell}^{j-1(1)}) + \sum_{k,\ell} u_{k,\ell}^{j-1(3)} \mathcal{G}^{j-1(3)} (\mathcal{L}\Upsilon_{k,\ell}^{j-1(3)}) \\
&= 2^{j-1} \sum_k \left[u_{k,q}^{j-1(1)} \Gamma_{(1,0)}^{(s)}(k-p) + u_{k,q}^{j-1(2)} \Gamma_{(1,1)}^{(s)}(k-p) \right]
\end{aligned}$$

em que

$$\Gamma_{(0,0)}^{(s)}(m) = \int \frac{d^s \phi}{dz^s} (z-m) \phi^*(z) dz,$$

$$\Gamma_{(0,1)}^{(s)}(m) = \int \frac{d^s \psi}{dz^s} (z-m) \phi^*(z) dz,$$

$$\Gamma_{(1,0)}^{(s)}(m) = \int \frac{d^s \phi}{dz^s} (z-m) \psi^*(z) dz,$$

$$\Gamma_{(1,1)}^{(s)}(m) = \int \frac{d^s \psi}{dz^s} (z-m) \psi^*(z) dz.$$

Resumindo, segue que a discretização em dois níveis do operador de derivada parcial $\mathcal{L} = \frac{\partial^s}{\partial x^s}$ pode expressa em forma matricial da seguinte maneira

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D}^{j-1} \mathcal{L} \mathcal{P}^j u \\ \mathcal{G}^{j-1(2)} \mathcal{L} \mathcal{P}^j u \\ \mathcal{G}^{j-1(1)} \mathcal{L} \mathcal{P}^j u \\ \mathcal{G}^{j-1(3)} \mathcal{L} \mathcal{P}^j u \end{bmatrix}_{p,q} = 2^{j-1} \sum_k \Gamma^{(s)}(p-k) \begin{bmatrix} u_{k,q}^{j-1} \\ u_{k,q}^{j-1(2)} \\ u_{k,q}^{j-1(1)} \\ u_{k,q}^{j-1(3)} \end{bmatrix} \quad (45)$$

em que

$$\Gamma^{(s)}(m) = \begin{bmatrix} \Gamma_{(0,0)}^{(s)}(m) & \Gamma_{(0,1)}^{(s)}(m) & 0 & 0 \\ \Gamma_{(1,0)}^{(s)}(m) & \Gamma_{(1,1)}^{(s)}(m) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{(0,0)}^{(s)}(m) & \Gamma_{(0,1)}^{(s)}(m) \\ 0 & 0 & \Gamma_{(1,0)}^{(s)}(m) & \Gamma_{(1,1)}^{(s)}(m) \end{bmatrix}$$

Por outro lado, sendo \mathcal{L} um operador de derivadas parciais $\mathcal{L} = \frac{\partial^s}{\partial y^s}$ e utilizando as relações de biortogonalidade, expressas na Equação 18, as seguintes discretizações da Equação 44 se anulam:

- $\mathcal{G}^{j-1(\nu)} (\mathcal{L} \Phi_{k,\ell}^{j-1})$ e $\mathcal{D}^{j-1} (\mathcal{L} \Upsilon_{k,\ell}^{j-1(\nu)})$, para $\nu = 2$ e $\nu = 3$
- $\mathcal{G}^{j-1(1)} (\mathcal{L} \Upsilon_{k,\ell}^{j-1(2)})$, $\mathcal{G}^{j-1(2)} (\mathcal{L} \Upsilon_{k,\ell}^{j-1(1)})$, $\mathcal{G}^{j-1(1)} (\mathcal{L} \Upsilon_{k,\ell}^{j-1(3)})$ e $\mathcal{G}^{j-1(3)} (\mathcal{L} \Upsilon_{k,\ell}^{j-1(1)})$.

Então, a discretização em dois níveis do operador de derivada parcial $\mathcal{L} = \frac{\partial^s}{\partial y^s}$ pode expressa como

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D}^{j-1} \mathcal{L} \mathcal{P}^j u \\ \mathcal{G}^{j-1(2)} \mathcal{L} \mathcal{P}^j u \\ \mathcal{G}^{j-1(1)} \mathcal{L} \mathcal{P}^j u \\ \mathcal{G}^{j-1(3)} \mathcal{L} \mathcal{P}^j u \end{bmatrix}_{p,q} = 2^{j-1} \sum_\ell \Gamma^{(s)}(\ell-q) \begin{bmatrix} u_{p,\ell}^{j-1} \\ u_{p,\ell}^{j-1(2)} \\ u_{p,\ell}^{j-1(1)} \\ u_{p,\ell}^{j-1(3)} \end{bmatrix}. \quad (46)$$

B.2.2 Caso bilinear

Seja

$$\mathcal{L}(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x} v$$

Então,

$$\mathcal{L}_{MN}^j(u, v) = \sum_{p,q} (\mathcal{D}^{j-1} \mathcal{L} (\mathcal{P}^{j-1} u, \mathcal{P}^{j-1} v))_{p,q} \Phi_{p,q}^{j-1} + \sum_{\nu=1}^3 \sum_{p,q} (\mathcal{G}^{j-1(\nu)} \mathcal{L} (\mathcal{P}^{j-1} u, \mathcal{P}^{j-1} v))_{p,q} \Upsilon_{p,q}^{j-1(\nu)}. \quad (47)$$

em que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^j u(x, y) &= \sum_{k, \ell} \left[u_{k, \ell}^{j-1} \Phi_{k, \ell}^{j-1}(x, y) + \sum_{\nu=1}^3 u_{k, \ell}^{j-1(\nu)} \Upsilon_{k, \ell}^{j-1(\nu)}(x, y) \right], \\ \mathcal{P}^j v(x, y) &= \sum_{k', \ell'} \left[v_{k', \ell'}^{j-1} \Phi_{k', \ell'}^{j-1}(x, y) + \sum_{\nu=1}^3 v_{k', \ell'}^{j-1(\nu)} \Upsilon_{k', \ell'}^{j-1(\nu)}(x, y) \right].\end{aligned}$$

Portanto

$$\mathcal{L}(\mathcal{P}^j u, \mathcal{P}^j v) = (I) + (II) + (III) + (IV)$$

em que

$$(I) = \sum_{\substack{k, \ell \\ k', \ell'}} u_{k, \ell}^{j-1} v_{k', \ell'}^{j-1} \frac{\partial \Phi_{k, \ell}^{j-1}}{\partial x}(x, y) \Phi_{k', \ell'}^{j-1}(x, y)$$

$$(II) = \sum_{\nu=1}^3 \sum_{\substack{k, \ell \\ k', \ell'}} u_{k, \ell}^{j-1} v_{k', \ell'}^{j-1(\nu)} \frac{\partial \Phi_{k, \ell}^{j-1}}{\partial x}(x, y) \Psi_{k', \ell'}^{j-1(\nu)}(x, y)$$

$$(III) = \sum_{\nu=1}^3 \sum_{\substack{k, \ell \\ k', \ell'}} v_{k', \ell'}^{j-1} u_{k, \ell}^{j-1(\nu)} \frac{\partial \Psi_{k, \ell}^{j-1(\nu)}}{\partial x}(x, y) \Phi_{k', \ell'}^{j-1}(x, y),$$

e

$$(IV) = \sum_{\substack{k, \ell \\ k', \ell'}} \sum_{\nu=1}^3 \sum_{\nu'=1}^3 v_{k', \ell'}^{j-1(\nu')} u_{k, \ell}^{j-1(\nu)} \frac{\partial \Psi_{k, \ell}^{j-1(\nu)}}{\partial x}(x, y) \Psi_{k', \ell'}^{j-1(\nu')}(x, y)$$

Portanto,

$$[\mathcal{D}^{j-1} \mathcal{L}(\mathcal{P}^j u, \mathcal{P}^j v)]_{p, q} = 2^{j-1} \sum_{k, \ell} \sum_{k', \ell'} (i) + (ii) + (iii) + (iv)$$

em que

$$(i) = u_{k,\ell}^{j-1} \left(v_{k',\ell'}^{j-1} \dot{\gamma}_{k-p,k'-p}^{(o)} \gamma_{\ell-q,\ell'-q}^{(o)} + v_{k',\ell'}^{j-1(1)} \dot{\gamma}_{k-p,k'-p}^{(o)} \gamma_{\ell-q,\ell'-q}^{(1)} + v_{k',\ell'}^{j-1(2)} \dot{\gamma}_{k-p,k'-p}^{(1)} \gamma_{\ell-q,\ell'-q}^{(o)} + v_{k',\ell'}^{j-1(3)} \dot{\gamma}_{k-p,k'-p}^{(1)} \gamma_{\ell-q,\ell'-q}^{(1)} \right)$$

$$(ii) = u_{k,\ell}^{j-1(1)} \left(v_{k',\ell'}^{j-1} \dot{\gamma}_{k-p,k'-p}^{(o)} \gamma_{\ell-q,\ell'-q}^{(3)} + v_{k',\ell'}^{j-1(1)} \dot{\gamma}_{k-p,k'-p}^{(o)} \gamma_{\ell-q,\ell'-q}^{(2)} + v_{k',\ell'}^{j-1(2)} \dot{\gamma}_{k-p,k'-p}^{(1)} \gamma_{\ell-q,\ell'-q}^{(3)} + v_{k',\ell'}^{j-1(3)} \dot{\gamma}_{k-p,k'-p}^{(1)} \gamma_{\ell-q,\ell'-q}^{(2)} \right)$$

$$(iii) = u_{k,\ell}^{j-1(2)} \left(v_{k',\ell'}^{j-1} \dot{\gamma}_{k-p,k'-p}^{(3)} \gamma_{\ell-q,\ell'-q}^{(o)} + v_{k',\ell'}^{j-1(1)} \dot{\gamma}_{k-p,k'-p}^{(3)} \gamma_{\ell-q,\ell'-q}^{(1)} + v_{k',\ell'}^{j-1(2)} \dot{\gamma}_{k-p,k'-p}^{(2)} \gamma_{\ell-q,\ell'-q}^{(o)} + v_{k',\ell'}^{j-1(3)} \dot{\gamma}_{k-p,k'-p}^{(2)} \gamma_{\ell-q,\ell'-q}^{(1)} \right)$$

$$(iv) = u_{k,\ell}^{j-1(3)} \left(v_{k',\ell'}^{j-1} \dot{\gamma}_{k-p,k'-p}^{(3)} \gamma_{\ell-q,\ell'-q}^{(1)} + v_{k',\ell'}^{j-1(1)} \dot{\gamma}_{k-p,k'-p}^{(3)} \gamma_{\ell-q,\ell'-q}^{(2)} + v_{k',\ell'}^{j-1(2)} \dot{\gamma}_{k-p,k'-p}^{(2)} \gamma_{\ell-q,\ell'-q}^{(1)} + v_{k',\ell'}^{j-1(3)} \dot{\gamma}_{k-p,k'-p}^{(2)} \gamma_{\ell-q,\ell'-q}^{(2)} \right)$$

sendo

$$\gamma^{(0)}(m, n) = \int \phi(z-m) \phi(z-n) \phi^*(z) dz \quad \dot{\gamma}^{(0)}(m, n) = \int \frac{d\phi}{dz}(z-m) \phi(z-n) \phi^*(z) dz$$

$$\gamma^{(1)}(m, n) = \int \phi(z-m) \psi(z-n) \phi^*(z) dz \quad \dot{\gamma}^{(1)}(m, n) = \int \frac{d\phi}{dz}(z-m) \psi(z-n) \phi^*(z) dz$$

$$\gamma^{(2)}(m, n) = \int \psi(z-m) \psi(z-n) \phi^*(z) dz \quad \dot{\gamma}^{(2)}(m, n) = \int \frac{d\psi}{dz}(z-m) \psi(z-n) \phi^*(z) dz$$

$$\gamma^{(3)}(m, n) = \int \psi(z-m) \phi(z-n) \phi^*(z) dz \quad \dot{\gamma}^{(3)}(m, n) = \int \frac{d\psi}{dz}(z-m) \phi(z-n) \phi^*(z) dz$$

Os termos $[\mathcal{G}^{j-1(\nu)} \mathcal{L}(\mathcal{P}^j u, \mathcal{P}^j - 1v)]_{p,q}$ podem ser obtidos de forma similar.