# Cálculo dos autovalores do operador de Fantappié[1]

E. Capelas de Oliveira
Departamento de Matemática Aplicada
Imecc – Unicamp
13083-970 Campinas (SP) Brasil
e-mail: capelas@ime.unicamp.br

**Resumo**

Apresenta-se e discute-se o estudo dos autovalores associados ao operador momento escalar, introduzido por Fantappié.

We present and discuss the study of the eigenvalues associated with the scalar momentum operator, introduced by Fantappié.

## 1 Introdução

Na Mecânica Quântica é de grande interesse a pesquisa de autovalores e autofunções associados a um operador linear $\mathcal{K}$, que age em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de funções $\Psi : (\vec{x}, t) \mapsto \psi(\vec{x}, t) \in C$, cujo valor esperado é dado pela fórmula

$$< \mathcal{K} >= \int \Psi^*(\mathbf{x}, t)\, \mathcal{K}\, \Psi(\mathbf{x}, t) d^3x$$

onde a integral é efetuada em todo o volume. Aqui $\Psi = \Psi(\mathbf{x}, t)$ é a chamada função de onda, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ são as coordenadas espaciais e $t$ é a coordenada temporal.

Dentre estes operadores lineares, podemos nos perguntar quais são as propriedades gerais que tal operador linear deve satisfazer de modo a ser admitido como um possível candidato para representar uma quantidade (grandeza) física. Então, é necessário que o valor esperado de tal operador linear seja real, uma vez que representa a média dos valores medidos de uma quantidade física. Ora, da expressão acima isto implica que para todo $\Psi$, que pode vir a representar estados possíveis, devemos impor que

$$\int (\mathcal{K}\Psi)^* \Psi d\tau = \int \Psi^* \mathcal{K} \Psi d\tau.$$

[1]Este trabalho está baseado numa nota escrita pelo prof. G. Arcidiacono a quem dedico este trabalho sendo o mais fiel possível ao trabalho original.

Operadores que têm esta propriedade são chamados hermiteanos. Vamos, a partir de agora, nos restringir apenas à pesquisa daqueles operadores $\mathcal{K}$ que representam uma grandeza física.

Tal pesquisa consiste na procura da solução de uma equação diferencial linear e homogênea

$$\mathcal{K}\Psi(\mathbf{x}) = \lambda\Psi(\mathbf{x})$$

a qual, em geral, apresenta um grau de dificuldade matemática nem sempre muito simples. Aqui $\lambda$ são os autovalores e $\Psi(\mathbf{x})$ são as respectivas autofunções.

Há aproximadamente cinqüënta anos atrás, Fantappié, desenvolvendo a chamada Teoria dos Universos Físicos, baseada na teoria de grupos, mostrou que um operador $\mathcal{K}$ associado a um fenômeno físico não pode ser qualquer um, mas deve satisfazer às chamadas condições de *observabilidade* e *objetividade*[1, 2]

$$\mathcal{K}\Psi(\mathbf{x}) = F_\alpha[T_\alpha^{-1}\Psi(\mathbf{x})]$$

e

$$\mathcal{K}T_\alpha\Psi(\mathbf{x}) = T_\alpha\mathcal{K}\Psi(\mathbf{x})$$

de onde segue-se que a indicatriz projetiva[3, 4] do funcional que representa o operador $\mathcal{K}$, deve ser um invariante[2] do dual do grupo adjunto[1, 5]. O operador $\mathcal{K}$ se obtém aplicando um funcional linear *puro* $F_\alpha$ à função $T_\alpha^{-1}\Psi(\mathbf{x})$, isto é, a função $\Psi(\mathbf{x})$ na qual se efetua uma mudança de coordenadas genérica $T_\alpha^{-1}$, e tal função depende apenas dos parâmetros $\alpha_k$ desta transformação de coordenadas e não das coordenadas $x_k$ do ponto. Ainda mais, a segunda expressão anterior diz respeito à invariança do operador $\mathcal{K}$ em relação ao grupo das transformações $T_\alpha$.

Por outro lado, se o operador $\mathcal{K}$ é observável e o grupo base do sistema quântico considerado é compacto, sob hipóteses oportunas encontra-se um resultado de notável interesse, isto é, a pesquisa dos autovalores e das respectivas autofunções é reduzida à solução de um número finito de equações algébricas com um número finito de incógnitas.[6, 7]

Aqui, utilizando os resultados mencionados anteriormente, estudamos os autovalores associados ao operador introduzindo por Fantappié e por ele chamado de operador Momento Escalar e denotado por $M^{m_0}$.

[2] Os invariantes deste grupo são determinados pela matriz característica formada pelas constantes de estrutura do grupo.

Este trabalho está dividido em duas partes: na primeira parte construímos as representações lineares do grupo[3] $Spin(3)$, e as respectivas matrizes infinitesimais. Na segunda parte, utilizando os resultados da primeira parte, calculamos explicitamente os autovalores associados ao operador momento escalar, $M^{m_0}$, bem como fornecemos a sua lei de formação geral. Mostramos também que tais autovalores são todos expressos em termos de números inteiros.

# 2 Representações lineares do grupo $Spin(3)$

Nesta primeira parte do trabalho, visando o cálculo dos autovalores do operador de Fantappié, começamos com as representações lineares de um grupo, em particular do grupo $Spin(3)$, as representações de ordem $p+1$ e as matrizes de Pauli generalizadas.

## 2.1 Representações lineares de um grupo

Dado um grupo $\mathcal{G}$, uma sua representação linear é um conjunto de matrizes (que formam grupo) homomorfo ao grupo $\mathcal{G}$, isto é, tal que a um elemento $s$ do grupo, corresponde uma matriz $D(s)$, e que ao produto $D(s) \cdot D(t)$ corresponde a matriz $D(s \cdot t)$, ou seja

$$D(s) \cdot D(t) = D(s \cdot t).$$

Se as matrizes $D(s)$ são de ordem $p$, então dizemos que tem-se uma representação linear de grau $p$ (ou de ordem $p$). Vamos indicar aqui por $D_p$ a representação linear do grupo $Spin(3)$ de ordem $p+1$.

A representação linear $D_1$, de ordem dois, é dada, como é sabido, pelas matrizes $K$

$$K = \mathrm{e}^H = \frac{\operatorname{sen}\rho}{\rho} H + \cos\rho\, I$$

onde indicamos por $I$ a matriz identidade e $H$ a matriz que fornece os quatérnios puramente imaginários $(xi + yj + zk)$, isto é,

$$H = \begin{bmatrix} -iz & -x+iy \\ x+iy & iz \end{bmatrix}$$

[3]Nas notas do prof. Arcidiacono a notação para este grupo aparece como $Spin_3^3$. O grupo $Spin(3)$ é o grupo de recobrimento universal (representado biunivocamente pelos quatérnios de módulo unitário, isto é, de uma hiperesfera de $S_3$) do grupo das rotações do espaço ordinário. Note-se também que $SU(2) \simeq Spin(3)$.

sendo por isso, a matriz $K$ dada por

$$K = \begin{bmatrix} \cos\rho - \dfrac{\operatorname{sen}\rho}{\rho} iz & \dfrac{\operatorname{sen}\rho}{\rho}(-x+iy) \\ \dfrac{\operatorname{sen}\rho}{\rho}(x+iy) & \cos\rho + \dfrac{\operatorname{sen}\rho}{\rho} iz \end{bmatrix}$$

onde $\rho$ é o módulo do quatérnio e $x, y, z$ são as componentes do vetor que representa a metade do vetor rotação.

Tais componentes nos fornecem também os parâmetros canônicos do elemento $\mathbf{x}$ do grupo $Spin(3)$, grupo topológico[4] da hiperesfera dos quatérnios de módulo um.[1, 2]

Verifica-se que a representação $D_1$ dada pelas matrizes $K$ é uma *representação unitária* porque

$$K(x) = \tilde{K}^*(-x)$$

onde $\tilde{K}^*$ é a matriz transposta da matriz adjunta.

## 2.2 Representações lineares $D_p$ de ordem $p+1$

As representações lineares $D_p$ de ordem $p+1$ podem ser construídas seguindo o método de Van der Waerden[8, 9]. Seja dada a forma binária de grau $p$

$$F_p(u) = \sum_{k=0}^{p} \sqrt{\frac{p!}{k!(p-k)!}} C_k u_1^{p-k} u_2^k. \tag{1}$$

Transformando o vetor $(u_1, u_2)$ com a transformação dual de $D_1$

$$\begin{aligned} u_1 &= g_{11}u_1' + g_{21}u_2' \\ u_2 &= g_{12}u_1' + g_{22}u_2' \end{aligned} \tag{2}$$

onde introduzimos a notação

$$\begin{aligned} g_{11}(x) &= \cos\rho - \frac{\operatorname{sen}\rho}{\rho} iz = a & \qquad g_{12}(x) &= \frac{\operatorname{sen}\rho}{\rho}(-x+iy) = b \\ g_{21}(x) &= \frac{\operatorname{sen}\rho}{\rho}(x+iy) = -\overline{b}^* & \qquad g_{22}(x) &= \cos\rho + \frac{\operatorname{sen}\rho}{\rho} iz = \overline{a}^* \end{aligned}$$

[4] Para cada elemento, ou ponto, estão sempre definidos nos intornos.

com a substituição dada pela eq.(2), a eq.(1), a forma binária, se transforma em

$$F'_p(u') = \sum_{k=0}^{p} \sqrt{\frac{p!}{k!(p-k)!}} C'_k u'^{p-k}_1 u'^k_2$$

sendo

$$C'_k = \sum_{i=0}^{p} \lambda_{ik} C_i$$

onde os $\lambda_{ik}$ formam uma matriz que é a representação linear $D_p$, procurada.

Aplicando o procedimento exposto acima, podemos calcular as matrizes das várias representações. A representação $D_2$ é dada pelas matrizes de ordem três

$$G^{(2)} = \begin{bmatrix} a^2 & \sqrt{2}ab & b^2 \\ -\sqrt{2}a\overline{b} & a\overline{a} - b\overline{b} & \sqrt{2}\overline{a}b \\ \overline{b}^2 & -\sqrt{2}\overline{a}\overline{b} & \overline{a}^2 \end{bmatrix}$$

enquanto que a representação $D_3$ é dada pelas matrizes de ordem quatro

$$G^{(3)} = \begin{bmatrix} a^3 & \sqrt{3}a^2b & \sqrt{3}ab^2 & b^3 \\ -\sqrt{3}a^2\overline{b} & a(a\overline{a} - 2b\overline{b}) & b(2a\overline{a} - b\overline{b}) & \sqrt{3}\overline{a}b^2 \\ \sqrt{3}a\overline{b}^2 & -b(2a\overline{a} - b\overline{b}) & a(a\overline{a} - 2b\overline{b}) & \sqrt{3}\overline{a}^3 b \\ -\overline{b}^3 & \sqrt{3}\overline{a}\overline{b}^2 & -\sqrt{3}\overline{a}^2\overline{b} & \overline{a}^3 \end{bmatrix}.$$

Da matriz acima escrita, $G^{(3)}$, podemos ver que

$$g_{ik}(a, \overline{a}, b, \overline{b}) = g_{ki}(a, \overline{a}, -\overline{b}, -b)$$

bem como verifica-se que dois elementos simétricos em relação ao centro se obtêm permutando

$$a \quad \text{em} \quad \overline{a} \qquad \text{e} \qquad b \quad \text{em} \quad -\overline{b}.$$

Por outro lado, dois elementos simétricos em relação à coluna central são obtidos trocando

$$a \quad \text{em} \quad b \qquad \text{e} \qquad \overline{b} \quad \text{em} \quad -\overline{a}$$

e dois elementos simétricos em relação à linha central se obtêm trocando[5]

$$a \quad \text{em} \quad -\overline{b} \qquad \text{e} \qquad b \quad \text{em} \quad \overline{a}.$$

[5] Regras análogas valem para as matrizes de ordem ímpar.

Em base ao anteriormente exposto, as matrizes $G^{(4)}$ podem ser construídas a partir dos seguintes elementos

$$\begin{array}{lll} a^4 & & \\ -2a^3\overline{b} & a^2(a\overline{a}-3b\overline{b}) & \\ \sqrt{6}a^2\overline{b}^2 & -\sqrt{6}a\overline{b}(a\overline{a}-b\overline{b}) & a^2\overline{a}^2-4a\overline{a}b\overline{b}+b^2\overline{b}^2 \end{array}$$

enquanto que as matrizes $G^{(5)}$ são construídas a partir dos elementos

$$\begin{array}{lll} a^5 & & \\ -\sqrt{5}a^4\overline{b} & a^3(a\overline{a}-4b\overline{b}) & \\ \sqrt{10}a^3\overline{b}^2 & \sqrt{2}a\overline{b}^2(3a\overline{a}-2b\overline{b}) & -\overline{b}(3a\overline{a}-6a\overline{a}b\overline{b}+b^2\overline{b}^2). \end{array}$$

## 2.3 As matrizes de Pauli generalizadas

Uma vez calculadas as matrizes $G^{(m)}$, destas se podem deduzir as "matrizes infinitesimais", do seguinte modo. Observamos que

$$G^{(m)} = [g_{ik}^{(m)}]\mathrm{e}^{H^{(m)}(x)}$$

e levando em conta que as matrizes $H^{(m)}$ podem ser decompostas em

$$H^{(m)}(x) = xH_1^{(m)} + yH_2^{(m)} + zH_3^{(m)}$$

obtemos para as matrizes infinitesimais

$$H_s^{(m)} = [\partial_s G^{(m)}]_{x_s=0}$$

onde $s = 1, 2, 3$.

Então, seguindo Fantappié podemos introduzir as matrizes de Pauli generalizadas no seguinte modo

$$\sigma_k^{(m)} = iH_k^{(m)}$$

que, para $m = 1$ fornece as três matrizes de Pauli

$$\sigma_1^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

enquanto que para $m = 2$ temos as matrizes

$$\sigma_1^{(2)} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2^{(2)} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3^{(2)} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Visto que tais matrizes são conhecidas, nos limitamos a fornecer a sua lei geral de formação

$$\begin{aligned} [\sigma_1^{(m)}]_{k+1,k} &= [\sigma_1^{(m)}]_{k,k+1} = \sqrt{k(m-k+1)} \\ [\sigma_2^{(m)}]_{k,k+1} &= -[\sigma_2^{(m)}]_{k+1,k} = i\sqrt{k(m-k+1)} \\ [\sigma_3^{(m)}]_{k,k} &= m-2(k-1) \end{aligned} \tag{3}$$

com $k = 1, 2, \ldots, m+1$ e todos os outros elementos destas matrizes sendo nulos.

# 3 Estudo do operador de Fantappié

Nesta segunda parte do trabalho vamos estudar o operador momento escalar, introduzido por Fantappié e denotado por $M^{m_0}$. Começamos com a definição do operador momento escalar e a decomposição do sistema em sistemas parciais.[10] Ao final concluímos com o cálculo dos autovalores associados ao operador de Fantappié (momento escalar), operador este representando um observável do grupo $Spin(3)$.

## 3.1 Definição do momento escalar $M^{m_0}$

Consideremos o operador $P_i$ (momento vetorial) definido por

$$P_i\varphi(x) = [\partial_i \varphi(tx)]_{t_i=0}$$

com $\partial_i = \partial/\partial t_i$ e tendo presente que temos

$$G^{(k)}(tx) = G^{(k)}(t) \cdot G^{(k)}(x)$$

enquanto que, como vimos na seção 2.3

$$H_i^{(m)} = [\partial_i G^{(m)}]_{x_i=0}$$

com $i = 1, 2$ e 3.

Então, vemos, com base na definição do operador momento vetorial que

$$P_i G^{(k)}(x) = H_i^{(k)} G^{(k)}(x) \tag{4}$$

e por isso, a aplicação do operador $P_i$, momento vetorial, à matriz $G^{(k)}(x)$ da representação $k^{ma}$, se obtém simplesmente multiplicando à esquerda a matriz $G^{(k)}(x)$ pela matriz infinitesimal $H_i^{(k)}(x)$ que é constante.

A eq.(4) escrita para um elemento genérico $g_{rs}^{(k)}(x)$ da matriz se torna

$$P_i g_{rs}^{(k)}(x) = \sum_{\ell=1}^{k+1} h_{i,r\ell}^{(k)}\, g_{\ell s}^{(k)}(x)$$

onde os $h_{i,r\ell}^{(k)}$ são os elementos da matriz infinitesimal da representação $k^{ma}$, isto é,

$$H_i^{(k)} = [h_{i,r\ell}^{(k)}].$$

Mais em geral, podemos introduzir o operador observável do grupo $Spin(3)$, chamado por Fantappié de momento escalar $M^{m_0}$, que é um operador espinorial, aplicado a um espinor

$$\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m+1})^t$$

onde $^t$ denota a transposta, de grau $m+1$, assim definido

$$M^{(m)}\vec{\varphi} = \sum_{i=1}^{3} H_i^{(m)} P_i \vec{\varphi}.$$

Para determinar seus autovalores e as respectivas autofunções, devemos resolver a equação homogênea

$$M^{(m)}\vec{\varphi} = \lambda\vec{\varphi}. \tag{5}$$

Fantappié[6, 7] mostrou que se pode resolver tal equação tomando como componentes $\varphi_\beta$ de $\vec{\varphi}$ das combinações lineares com coeficientes constantes de uma coluna $(s^{ma})$ de uma representação $G^{(k)}$, isto é,

$$\varphi_\beta(x) = \sum_{r=1}^{k+1} C_{\beta r}\, g_{rs}^{(k)}$$

com $\beta = 1, 2, \ldots, m+1$.

Substituindo tal valor na eq.(5) e simplificando, encontramos que para a pesquisa dos autovalores e das respectivas autofunções, devemos obter a solução do seguinte sistema algébrico linear e homogêneo nas $C_{\beta\lambda}$

$$\sum_{\beta',r'}^{m,k} h^{(m,k)}_{\beta\ell,\beta' r'} C_{\beta' r'} = \lambda C_{\beta\ell} \tag{6}$$

com $\beta = 1, 2, \ldots, m+1$ e $\ell = 1, 2, \ldots, k+1$, onde introduzimos

$$h^{(m,k)}_{\beta\ell,\beta' r'} = \sum_{i=1}^{3} h^{(m)}_{i,\beta\beta'}\, h^{(k)}_{i,r'\ell}. \tag{7}$$

Lembrando as expressões explícitas eq.(3) dos elementos da representação infinitesimal, tal sistema assume uma forma mais simples. De fato, em base a equação

$$\sigma^{(m)}_k = iH^{(m)}_k$$

temos

$$\begin{aligned} h^{(m)}_{1;k+1,k} &= h^{(m)}_{1;k,k+1} = -i\sqrt{k(m-k+1)} \\ -h^{(m)}_{2;k+1,k} &= h^{(m)}_{2;k,k+1} = \sqrt{k(m-k+1)} \\ h^{(m)}_{3;k,k} &= -i[m-2(k+1)] \end{aligned}$$

sendo todos os demais $h$ nulos. Substituindo tais expressões na eq.(7) e efetuando os cálculos, resulta que todos os coeficientes desta equação são nulos, exceto aqueles do tipo

$$\begin{aligned} h^{(m,k)}_{\beta\ell,\beta\ell} &= -[m-2(\beta-1)][k-2(\ell-1)] \\ h^{(m,k)}_{\beta+1,\ell+1;\beta,\ell} &= h^{(m,k)}_{\beta,\ell;\beta+1,\ell+1} = -2\sqrt{\beta\ell(m-\beta+1)(k-\ell+1)}. \end{aligned}$$

Em conseqüência, o sistema dado pela eq.(6) assume a seguinte forma

$$h_{\beta,\ell;\beta-1,\ell-1}\, C_{\beta-1,\ell-1} + h_{\beta,\ell;\beta,\ell}\, C_{\beta\ell} + h_{\beta,\ell;\beta+1,\ell+1}\, C_{\beta+1,\ell+1} = \lambda C_{\beta\ell} \tag{8}$$

com $\beta = 1, 2, \ldots, m+1$ e $\ell = 1, 2, \ldots, k+1$.

Então fixado o par de índices $\beta\beta'$ podemos escrever a correspondente equação, lembrando que $C_{\beta\ell} = 0$ toda vez que os índices estão fora do campo de sua variabilidade.

## 3.2 Decomposição do sistema em $m+k-1$ sistemas parciais

As eqs.(8) constituem um sistema de $(m+1)(k+1)$ equações e $(m+1)(k+1)$ incógnitas. Uma equação de tal sistema será indicada com o símbolo $(\beta, \ell)$ e é a equação que corresponde a uma tal escolha dos índices no segundo membro da eq.(8). Ora este sistema eq.(8) tem uma estrutura bastante simples quando escolhidos os índices $\beta$ e $\ell$, as incógnitas que aparecem na equação correspondendo a tal escolha.

Segue-se que tal sistema pode ser decomposto em sistemas parciais dos quais nos propomos a fornecer a lei de formação. Suponhamos que $k > m$ e introduzimos $k - m = \delta$ então é fácil convencer-se que o sistema dado pode ser *quebrado* em outros sistemas no seguinte modo:

1. Um sistema de $m+1$ equações a $m+1$ incógnitas

$$(1,1), (2,2), (3,3), \ldots, (m+1, m+1)$$

2. $\delta$ sistemas de $m+1$ equações a $m+1$ incógnitas

$$\begin{array}{cccc} (1,2), & (2,3), & \cdots & (m+1, m+2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (1, \delta+1), & (2, \delta+2), & \cdots & (m+1, k+1) \end{array}$$

3. $m$ sistemas, respectivamente a $m, m-1, \ldots, 2, 1$ equações e outras tantas incógnitas

$$\begin{array}{cccc} (1, \delta+2), & (2, \delta+3), & \cdots & (m, k+1) \\ (1, \delta+3), & (2, \delta+4), & \cdots & (m-1, k+1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (1, k+1) & & & \end{array}$$

4. $m$ sistemas, respectivamente de $m, m-1, \ldots, 2, 1$ equações e outras tantas incógnitas

$$\begin{array}{cccc} (2,1), & (3,2), & \cdots & (m+1, m) \\ (3,1), & (4,2), & \cdots & (m+1, m-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (m+1, 1) & & & \end{array}$$

Obtemos de tal modo, somando,

$$(m+1)+(k-m)(m+1)+m(m+1)+m(m+1)=(m+1)(k+1)$$

equações, isto é, escrevemos todas as equações do sistema dado. Este assim, se *quebra* em

$$1+\delta+m+m=1+(k-m)+m+m=m+k+1$$

sistemas, isto é, em $\sigma$ sistemas, com $\sigma$ dado por

$$\sigma=(m+1)(k+1)-mk=m+k+1.$$

Como demonstrou Fantappié[1, 2], os autovalores do operador momento escalar $M^{m_0}$ são exatamente $m+1$ e variam ao variar $k$. Por isso, das $(m+1)(k+1)$ equações do sistema eq.(8) basta considerar somente $m+1$ que formam um sistema. É conveniente agora escolher para o sistema próprio aquele dado no item 1, acima, e para escrever as respectivas equações, basta colocar nas equações do sistema eq.(8) $\ell=\beta$. Obtemos assim as $m+1$ equações

$$2(\beta-1)\sqrt{(m-\beta+2)(k-\beta+2)}C_{\beta-1,\beta-1}+[m-2(\beta-1)][k-2(\beta-1)]C_{\beta,\beta}+$$

$$+2\beta\sqrt{(m-\beta+1)(k-\beta+1)}C_{\beta+1,\beta+1}=-\lambda C_{\beta,\beta}$$

com $\beta=1,2,\ldots,m+1$. Igualando a zero o determinante dos coeficientes do sistema anterior obtemos uma equação de grau $m+1$ em $\lambda$ a qual nos fornecerá os $m+1$ autovalores.

A soma de tais autovalores é dada pelo traço da matriz dos coeficientes, para $\lambda=0$ (soma dos elementos da diagonal principal)

$$S=-\sum_{\beta=1}^{m+1}[m-2(\beta-1)][k-2(\beta-1)]$$

e é por isso dada por um número inteiro. Ora, é interessante observar que *A soma dos autovalores depende de $k$ mas não de $m$.*

De fato, desenvolvendo a soma da equação precedente encontramos

$$mk+(m-2)(k-2)+(m-4)(k-4)+\cdots-(m-4)[k-2(m-2)]-$$

$$-(m-2)[k-2(m-1)]-m(k-2m)$$

de onde, simplificando entre elas os termos equidistantes dos extremos, obtemos

$$S = -2[m^2 + (m-2)^2 + (m-4)^2 + \cdots].$$

A soma entre colchetes vale $2^2 + 4^2 + \cdots + m^2$ para $m$ par, enquanto que para $m$ ímpar $1^2 + 3^2 + \cdots + m^2$, isto é,

$$S = -2 \left( \begin{array}{c} m+2 \\ 3 \end{array} \right)$$

como se pode verificar.

### 3.3 Cálculo dos autovalores para $m$ par

Vamos agora calcular os autovalores do operador de Fantappié. Começamos por observar que entre estes autovalores se encontra aquele mais simples, dado por

$$\lambda = mk.$$

De fato, das duas últimas equações dadas em 3 e 4 acima, as quais podem ser escritas como

$$mkC_{1,k+1} = \lambda C_{1,k+1} \quad \text{e} \quad mkC_{m+1,1} = \lambda C_{m+1,1}$$

segue que $\lambda = mk$.

Para o cálculo efetivo dos autovalores do operador momento escalar, começamos por examinar o caso em que $m$ é par. Para $m = 0$ temos de imediato que $\lambda = 0$. Para $m = 2$ temos, a partir do sistema de equações eq.(8)

$$\begin{array}{rcl} \lambda C_{11} & = & -2kC_{11} - 2\sqrt{2k}C_{22} \\ \lambda C_{22} & = & -2\sqrt{2k}C_{11} - 4\sqrt{k-1}C_{33} \\ \lambda C_{33} & = & -4\sqrt{k-1}C_{22} + 2(k-4)C_{33} \end{array}$$

de onde resulta a seguinte equação algébrica na variável $\lambda$

$$\left| \begin{array}{ccc} \lambda + 2k & 2\sqrt{2k} & 0 \\ 2\sqrt{2k} & \lambda & 4\sqrt{k-1} \\ 0 & 4\sqrt{k-1} & \lambda - 2k + 8 \end{array} \right| = \lambda^3 + 8\lambda^2 - 4\lambda(k^2 + 2k - 4) - 16k(k+2) = 0.$$

Dividindo os dois membros por $k+2$ obtemos a equação do terceiro grau

$$(\lambda - 2k)[\lambda^2 + (2k+8)\lambda + 8(k+2)] = 0$$

cujas raízes (autovalores) são

$$\lambda_1 = 2k; \qquad \lambda_2 = -(2k+4); \qquad \lambda_3 = -4.$$

Para $m = 4$ obtemos a seguinte equação algébrica na variável $\lambda$

$$\begin{vmatrix} \lambda+4 & 2\sqrt{4k} & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{4k} & \lambda+2k-4 & 4\sqrt{3(k-1)} & 0 & 0 \\ 0 & 4\sqrt{3(k-1)} & \lambda & 6\sqrt{2(k-2)} & 0 \\ 0 & 0 & 6\sqrt{2(k-2)} & \lambda-2k+12 & 8\sqrt{k-3} \\ 0 & 0 & 0 & 8\sqrt{k-3} & \lambda-4k+32 \end{vmatrix} = 0.$$

Dado o cansativo trabalho no cálculo deste determinante, nos limitamos ao cálculo da soma e do produto das raízes (autovalores). Da equação

$$S = -2\begin{pmatrix} m+2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

para $m = 4$ obtemos $S = -40$ enquanto que o produto $P$ é obtido calculando o determinante para $\lambda = 0$. Efetuando os cálculos, encontramos

$$P = -12 \cdot 64k(k^3 + 2k^2 - 20k - 48) = 3 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8k(k+2)(k+6)(k-4).$$

Considerando alguns casos particulares podemos concluir que os autovalores têm a seguinte forma

$$\lambda_1 = 4k; \quad \lambda_2 = -4(k+2); \quad \lambda_3 = -2(k+6); \quad \lambda_4 = -12; \quad \lambda_5 = 2(k-4)$$

os quais satisfazem a soma e o produto dados anteriormente, como podemos verificar.

## 3.4 Cálculo dos autovalores para $m$ ímpar

Vejamos agora quais são os autovalores quando $m$ é um número ímpar. Para $m = 1$ temos a equação

$$\begin{vmatrix} \lambda+k & 2\sqrt{k} \\ 2\sqrt{k} & \lambda+2-k \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - (k+2)k = 0$$

de onde segue que os autovalores são dados por

$$\lambda_1 = k \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = -(k+2).$$

Para $m = 3$ obtemos a equação

$$\begin{vmatrix} \lambda + 3k & 2\sqrt{3k} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3k} & \lambda - 2 + k & 4\sqrt{2(k-1)} & 0 \\ 0 & 4\sqrt{2(k-1)} & \lambda + 4 - k & 6\sqrt{k-2} \\ 0 & 0 & 6\sqrt{k-2} & \lambda + 18 - 3k \end{vmatrix} = 0.$$

A soma das raízes é $S = -20$ enquanto que o produto é

$$P = 9k(k+2)(k-6)(k+8).$$

Em particular para $k = 3$ obtemos a equação

$$\begin{vmatrix} \lambda + 9 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & \lambda + 1 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & \lambda + 1 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & \lambda + 9 \end{vmatrix} = 0,$$

ou ainda as equações

$$\lambda^2 + 2\lambda - 99 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 9 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -11$$

$$\lambda^2 + 18\lambda + 45 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_3 = -3 \quad \text{e} \quad \lambda_4 = -15.$$

Podemos inferir que os autovalores são do tipo

$$\lambda_1 = 3k; \quad \lambda_2 = -3(k+2); \quad \lambda_3 = -(k+8); \quad \lambda_4 = k - 6.$$

Para tratar o caso em que $m = 5$, e dado o estafante trabalho nos cálculos, nos limitamos ao valor $k = 5$ de onde obtemos a equação

$$\begin{vmatrix} \lambda + 25 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & \lambda + 9 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & \lambda + 1 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & \lambda + 1 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & \lambda + 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & \lambda + 25 \end{vmatrix} = 0$$

que pode ser escrita na seguinte forma

$$\begin{vmatrix} 18\alpha & \alpha(\lambda+1) - 16\beta \\ 16\beta - \alpha(\lambda+1) & -18\alpha \end{vmatrix} = 0$$

sendo $\alpha = (\lambda + 25)(\lambda + 9) - 100$ e $\beta = 16(\lambda + 25)$ de onde segue que

$$[\alpha(\lambda + 19) - 16\beta][\alpha(\lambda - 17) - 16\beta] = 0$$

e os autovalores são dados por

$$\lambda_1 = 25; \quad \lambda_2 = -35; \quad \lambda_3 = -31; \quad \lambda_4 = -23; \quad \lambda_5 = -11; \quad \lambda_6 = 5$$

cuja soma é $S = -70$ e o produto é $P = 5^4 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 31$.

Enfim, para $m = 7$, tomando $k = 7$, com cálculos que aqui não explicitamos, obtemos que a soma das raízes é $S = -168$ enquanto que o produto é

$$P = -3^6 \cdot 7^4 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 59.$$

## 3.5 Lei de formação dos autovalores

Neste ponto temos todos os elementos para poder escrever a lei geral de formação dos autovalores do operador de Fantappié.

Examinando atentamente os autovalores obtidos, nos damos conta que existe uma simples relação entre os autovalores e os números que se obtêm na linha paralela à diagonal principal, para $k = m$. Tais números são obtidos para $\beta = 1, 2, 3, \ldots$ a partir da fórmula $2\beta(m - \beta + 1)$.

Temos, de fato, para $m$ um número par:

- $m = 2$

Aqui os números na paralela à diagonal principal são $(4, 4)$, a soma dos autovalores $S = -8$ e os autovalores dados por

$$2k; \qquad -2(k+2); \qquad -4.$$

- $m = 4$

Os números na paralela à diagonal são $(8, 12, 12, 8)$, a soma das raízes é $S = -40$ enquanto que os autovalores são

$$4k; \quad -2(k+4); \quad -2(k+6); \quad -12; \quad 2(k-4).$$

- $m = 6$

Neste caso os número são $(12, 20, 24, 24, 20, 12)$ enquanto que os autovalores são

$$6k; \quad -(6k+12); \quad -(4k+20); \quad -(2k+24); \quad -24; \quad (2k-20); \quad (4k-12)$$

e assim por diante.

Por outro lado, no caso em que $m$ é um número ímpar, podemos escrever, separadamente:

- $m = 1$

O único número na paralela à diagonal principal é $(2)$, a soma dos autovalores é $S = -2$ e os autovalores são

$$k \qquad \text{e} \qquad -(k+2)$$

- $m = 3$

Neste caso os números são $(6, 8, 6)$, a soma é igual a $S = -20$ enquanto que os autovalores são

$$3k; \quad -(3k+6); \quad -(k+8); \quad (k-6)$$

- $m = 5$

Os números são $(10, 16, 18, 16, 10)$, a soma $S = -70$ e os autovalores são dados por

$$5k; \quad -(5k+10); \quad -(3k+16); \quad -(k+18); \quad (k-16); \quad (3k-10)$$

- $m = 7$

Aqui os números são $(14, 24, 30, 32, 30, 24, 14)$, a soma $S = -168$ e os autovalores dados por

$$7k; \ -(7k+14); \ -(5k+24); \ -(3k+30); \ -(k+32); \ (k-30); \ (3k-24); \ (5k-14).$$

Os resultados precedentes podem ser sintetizados através de uma fórmula simples, que nos fornece os autovalores do operador momento escalar, isto é, a seguinte expressão:

$$\lambda_s = mk - 2s(k + m + 1 - s)$$

com $s = 0, 1, 2, \ldots, m$ e $k = 1, 2, \ldots, m + 1$.

Lembrando que $\sigma = m + k + 1$ podemos escrever

$$\lambda_s = mk - 2s(\sigma - s). \tag{9}$$

Para $s = 0$ obtemos $\lambda_0 = mk$ enquanto que para $s = m$ obtemos o autovalores $\lambda_m = -m(k + 2)$.

Enfim, observamos que, se $m$ é um número par, entre os autovalores existe um e um só que não depende de $k$ e é obtido para $s = m/2$ de onde

$$\lambda_{\frac{m}{2}} = -m\left(1 + \frac{m}{2}\right).$$

Finalmente, observamos que a eq.(9) pode ser escrita na forma

$$\lambda_{s+1} = \lambda_s - 2(k + m - 2s)$$

ou ainda

$$\lambda_{s+1} = \lambda_s + 2(2s + 1 - \sigma)$$

que é uma relação de recorrência envolvendo os autovalores do operador momento escalar.

## Agradecimento

Agradeço ao prof. W. A. Rodrigues Jr. por ter lido e feito vários comentários pertinentes durante a elaboração deste manuscrito.

# Referências


[1] L. Fantappié, *Caratterizzazione analitica delle grandezze della meccanica quantica*, Rend. Accad. Linc., **12**, 285-290, (1952).

[2] L. Fantappié, *Determinazione di tutte le grandezza fisiche possibili in un universo quantico*, Rend. Accad. Lincei, **12**, 553-558, (1952).

[3] L. Fantappié, *I funzionali analiciti*, Memorie Acc. Lincei, s.6, vol.3, fasc. 11, (1930).

[4] L. Fantappié, *Sui fondamenti gruppali nella fisica*, Collec. Math., **6**, 75-135, (1959).

[5] L. Fantappié, *L'indicatrice proiettiva dei funzionali lineari e i prodotti funzionali proiettivi*, Ann. di Mat., s.4, vol.22, 181-289, (1943).

[6] L. Fantappié, *Calcolo degli autovalori e autofunzioni degli operatori "fisici"su un gruppo topologico compatto*, Proc. Int. Math. Congress Amsterdan, (1954).

[7] *Calcolo degli autovalori e delle autofunzioni degli operatori osservabili su un gruppo compatto*, Arch. Math., **5**, 292-300, (1954).

[8] L. Van der Waerden, *Die Gruppenthcoretische Methode in der Quantunmecchanik*, Springer, Berlin, (1932).

[9] G. Racah, *Sulla caratterizzazione delle rappresentazioni irriducibili dei gruppi semisemplici di Lie*, Lincei – Rend. Sc. fis. mat. e nat, **8**, 108-112, (1950).

[10] G. Arcidiacono and L. Chiatti, *On the determination of quantum-mechanical observables*, H. Journal, **12**, 253-262, (1989).