

COM A MÃO NA CUMBUCA[†]

Vera L.X. Figueiredo

vera@ime.unicamp.br

Margarida P. Mello

margarid@ime.unicamp.br

Sandra A. Santos

sandra@ime.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas
C.P. 6065 IMECC, Campinas, SP

Resumo. *Um resgate da história do Cálculo e a exploração de conceitos importantes são feitos inspirando-se na cumbuca utilizada pelos seringueiros na coleta do látex. O objeto concreto "cumbuca" é apresentado aos alunos de modo a criar uma situação-problema e provocar discussões e perguntas. Por exemplo, como verificar matematicamente a capacidade volumétrica deste objeto, medida de forma experimental? Do questionamento inicial surge logo a necessidade de construir um modelo matemático para a cumbuca. Na caracterização da curva que gera a superfície de revolução, este modelo traz à tona as idéias de superfície de revolução, continuidade e diferenciabilidade. O estudo das propriedades deste modelo matemático específico permite realizar uma viagem pela história do Cálculo à medida em que questões de interesse vão sendo levantadas. As contribuições de Arquimedes, Pappus e Cavalieri são lembradas, acompanhadas dos conceitos e resultados matemáticos relacionados. Uma amostra deste tipo de abordagem, utilizando a ferramenta computacional, pode ser vista em <http://www.ime.unicamp.br/~calculo/modulos/cumbuca/>. Outras investigações matemáticas são possíveis com relação a este e outros objetos, tais como problemas de otimização, cálculo de massa, etc.*

Palavras-chave: *modelagem, recurso computacional, sólido de revolução, Internet.*

[†] Este trabalho teve os apoios PROIN/CAPES/98, FAEP/Unicamp e Pró-Ciência/FAPESP.

1. INTRODUÇÃO

Os recipientes utilizados pelos seringueiros na coleta do látex são objetos concretos que podem desencadear questionamentos ricos do ponto de vista matemático. Por serem modelados como superfícies de revolução, é natural que se investigue a curva geratriz destas superfícies. Um outro aspecto relevante a ser trabalhado é a comprovação analítica do volume, medido experimentalmente. Estes questionamentos motivam a transição da matemática do ensino médio para o Cálculo. Os dois modelos concretos das Fig. 1 e Fig. 2 ilustram esta idéia. O primeiro poderia ser tratado pelo estudante com noções de geometria espacial, enquanto o segundo requer a construção de uma nova ferramenta, que pressupõe o conceito de limite. A modelagem do objeto da Fig. 2 e o estudo de suas propriedades matemáticas ensejam o trabalho com funções definidas por partes, continuidade e diferenciabilidade, além de resgatar, na história do Cálculo, as noções de área e volume, centro de massa, resultados de Arquimedes, teorema de Pappus, princípio de Cavalieri, até a definição de integral.

Nossa abordagem na exploração dos vários conceitos matemáticos presentes nestas questões apóia-se fortemente na ferramenta gráfica computacional. Partindo-se do objeto concreto e tendo os aspectos históricos como suporte, o computador possibilita a visualização de conceitos, por meio de gráficos e animações, ampliando o potencial de novos desdobramentos e favorecendo a descoberta.



Figura 1 Cumbuca em forma de balde



Figura 2 Cumbuca parabólica

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: o objeto concreto “cumbuca” é descrito matematicamente na Seção 2. A Seção 3 trata do cálculo do volume da cumbuca por três métodos clássicos do Cálculo: teorema de Pappus, seções transversas e cascas cilíndricas. Resgata ainda o conceito de centróide de uma região, utilizado no teorema de Pappus. Possíveis extensões e outras abordagens são sugeridas na Seção 4.

2. OBJETO E MODELAGEM

As fotos das Fig. 1 e Fig. 2 mostram cumbucas plásticas utilizadas por seringueiros. Tratam-se de superfícies de revolução, geradas pela rotação de uma curva em torno de um eixo. Portanto modelar tais superfícies se reduz a modelar a sua curva geratriz, sua curva perfil. Obtivemos uma primeira aproximação para o perfil da cumbuca parabólica traçando-se sua sombra em papel milimetrado e localizando-a convenientemente num sistema de coordenadas. A curva foi então modelada como o gráfico de uma função definida por partes: um trecho quadrático e um trecho linear, dada pela fórmula

$$g(x) = \begin{cases} a x^2, & 0 \leq x \leq b \\ m x + p, & b < x \leq c \end{cases}$$

e ilustrado na Fig. 3.

A partir das coordenadas dos pontos $(b, g(b))$ e $(c, g(c))$ foram calculados os parâmetros a , m e p que aparecem na definição de $g(x)$, de modo que a função interpolasse estes pontos e fosse, portanto, contínua. Inicialmente pensamos em exigir também a diferenciabilidade de $g(x)$, porém a curva resultante não retratava fielmente o perfil esboçado. O modelo (ver Fig. 4) que melhor aproximou o esboço corresponde a uma função não-diferenciável no ponto $(b, g(b))$. Somente após a modelagem passamos a enxergar a falta de suavidade nesta altura da superfície.

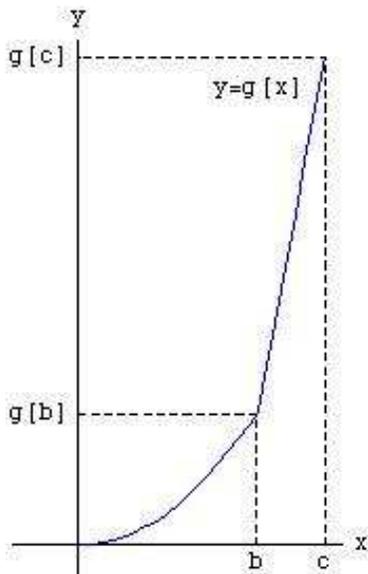


Figura 3 Modelo da curva geratriz

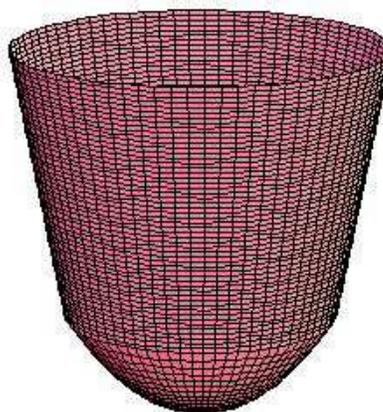


Figura 4 Superfície obtida rotacionando a curva geratriz

3. EXPLORANDO O VOLUME DA CUMBUCA

A natureza do objeto, sua principal função como coletor de um líquido, sugere que investiguemos seu volume. Na tentativa de comprovar matematicamente a medida experimental,

de aproximadamente 1,5 litros, percebemos a riqueza de conceitos que podem ser explorados neste cálculo. Além disso, com a experiência prática de medir e depois calcular o volume, o estudante adquire confiança no ferramental matemático. Embora neste caso seja desnecessário lançar mão deste ferramental para o cálculo do volume, pois podemos medi-lo. Porém, tal recurso é essencial na concepção de outros objetos, existentes apenas na mente do projetista.

Três métodos clássicos do Cálculo podem ser utilizados para obter o volume da cumbuca: o teorema de Pappus, o método das seções transversas e o método de cascas cilíndricas, descritos em livros texto, como, por exemplo, Stewart [1].

Relembramos o resultado de Pappus (ca 290–350 d.C.): o volume de um sólido de revolução obtido pela rotação de uma região R em torno do eixo vertical y que não a intercepte pode ser calculado pela fórmula:¹

$$V = 2\pi x_c A,$$

onde x_c é a abscissa do centróide CE da região R , de área A , conforme indicado na Fig. 5.

No caso da cumbuca, a região cuja rotação produz o interior do recipiente (o “sólido” sob consideração) é delimitada pela curva geratriz, pelo eixo y e pela reta $y = g(x)$. A região da semi-seção longitudinal do sólido, ilustrada na Fig. 6, é formada por dois triângulos, um retângulo e um *segmento parabólico* (região delimitada por um arco de parábola e uma corda). A geometria desta região permite resgatar um pouco da história do Cálculo. O centróide, ou centro geométrico, desta região pode ser calculado como uma média ponderada dos centróides de suas subregiões, conforme detalharemos a seguir. Tais problemas foram tratados por Arquimedes (287–212 a.C.). Em particular, o conceito de limite subjacente ao método de exaustão² de Eudoxus (ca 370 a.C.), utilizado no cálculo do centróide do segmento parabólico, é o germe do Cálculo integral.

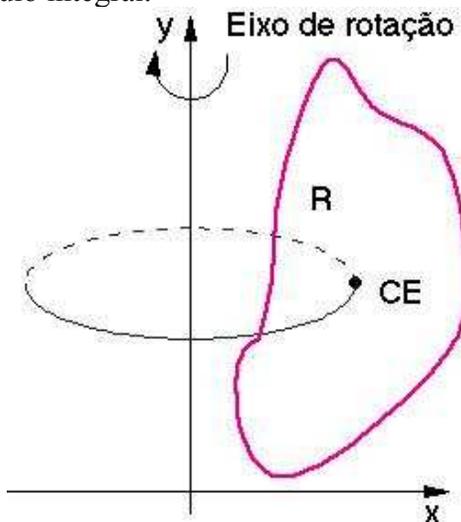


Figura 5 Ilustração para o teorema de Pappus

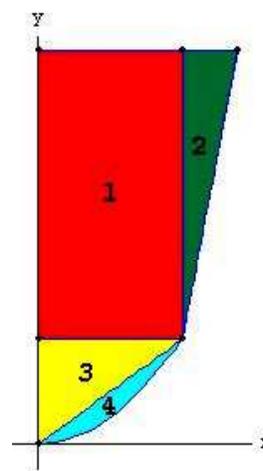


Figura 6 Seção longitudinal da cumbuca parabólica

¹ Este resultado se encontra no livro VII da obra principal de Pappus, a *Coleção Matemática*, e é às vezes creditado a P. Guldin (1577–1642).

² *Se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada de mesma espécie* (Eves [2], pág. 419).

3.1. Centróide da região de interesse e cálculo do volume da cumbuca por Pappus

Um corpo rígido possui um ponto especial denominado *centro de massa*, CM , também chamado *centro de gravidade*. Para analisar o efeito de uma força atuando sobre o corpo, este pode ser substituído, para fins de cálculo, por uma massa pontual igual à do corpo original, situada no CM deste corpo. Se um corpo é apoiado em seu centro de massa, estará em equilíbrio e não haverá tendência a mover ou girar em qualquer direção, ver, por exemplo, Gamow e Cleveland [3]. A determinação do CM de um corpo rígido pode ser feita particionado-o convenientemente. Se um corpo é decomposto em duas partes de massas M_1 e M_2 , com centros de massa CM_1 e CM_2 , respectivamente, então o CM do corpo é dado pela média ponderada:

$$CM = \frac{CM_1 * M_1 + CM_2 * M_2}{M_1 + M_2}$$

O centro de massa de um corpo homogêneo, isto é, com densidade constante, depende apenas da geometria deste corpo. Neste caso, o CM é denominado *centróide* do corpo, CE . Se o corpo homogêneo é plano, sua massa é proporcional à sua área e neste caso a fórmula de decomposição do CM reduz-se à fórmula análoga para o CE , onde as massas são substituídas pelas áreas correspondentes e os centros de massa pelos centróides.

A determinação dos centróides de regiões planas que possuem simetrias pode ser simplificada, como no caso de retângulos e discos. O centróide de um triângulo é determinado utilizando-se a propriedade de equilíbrio de que gozam os centros de massa. Pendurar um triângulo por um vértice V é equivalente a pendurar um corpo pontual por uma haste rígida, sem massa, fixada em V . A posição de equilíbrio da haste é vertical. Para que haja equilíbrio nesta posição, é necessário que esta linha vertical divida o triângulo em dois outros de mesma área. Portanto, no equilíbrio, a vertical coincide com a mediana. Concluímos que o CE está localizado na interseção das medianas do triângulo. Este procedimento para aferição concreta do centróide de um triângulo está ilustrado com animações na Internet [4].

Para aplicar o teorema de Pappus no cálculo da capacidade volumétrica da cumbuca, precisamos calcular o centróide da região plana R esboçada na Fig. 6. Torna-se evidente a vantagem conferida pela possibilidade de decomposição da região, pois o centróide de três de seus constituintes, o retângulo e os dois triângulos, são conhecidos. Além disso, esta mesma abordagem, aliada ao método de exaustão de Eudoxus, permite calcular o centróide da parte restante: o segmento parabólico. Uma descrição detalhada deste procedimento está disponível em [4]. Um aspecto que vale a pena destacar é o cálculo da área do segmento, necessária na determinação do centróide da região R . Neste cálculo recupera-se o resultado de Arquimedes, que estabelece a razão, $4/3$, entre as áreas do segmento e do maior triângulo nele inscrito, ver Fig. 7. Este resultado pode ser atingido resolvendo-se um problema de otimização e explorando outros conceitos do Cálculo, como o teorema do valor médio, conforme ilustrado em [4]. As coordenadas do centróide do segmento são $(b/2, 2ab^2/5)$. Estas informações encontram-se resumidas na Tabela 1.

Tabela 1 Áreas e centróides das subregiões de R

Região	Área	Centróide
1	$b(g(c) - g(b))$	$(b/2, (g(b) + g(c))/2)$
2	$(c - b)(g(c) - g(b))/2$	$((2b + c)/3, (g(b) + 2g(c))/3)$
3	$b g(b)/2$	$(b/3, 2 g(b)/3)$
4	$b g(b)/6$	$(b/2, 2 g(b)/5)$

A partir das informações da Tabela 1 calculamos as coordenadas do centróide da região R , cuja posição relativamente à região é ilustrada na Fig. 8. A capacidade volumétrica da cumbuca, aplicando-se o teorema de Pappus, é

$$V = \frac{\pi}{6}((b^2 - 2bc - 2c^2)g(b) + 2(b^2 + bc + c^2)g(c)).$$

Substituindo-se os valores, em centímetros, obtidos graficamente $b = 5,5$; $c = 7$; $g(b) = 4,2$; $g(c) = 15,5$ na fórmula acima obtemos a estimativa 1,59 litros para o volume da cumbuca, que difere menos de 10% do valor medido experimentalmente. As coordenadas do centróide da região, em centímetros, são (2,95 , 8,72).

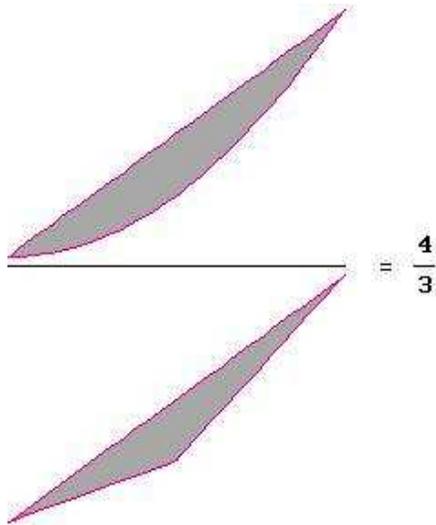


Figura 7 A razão de Arquimedes

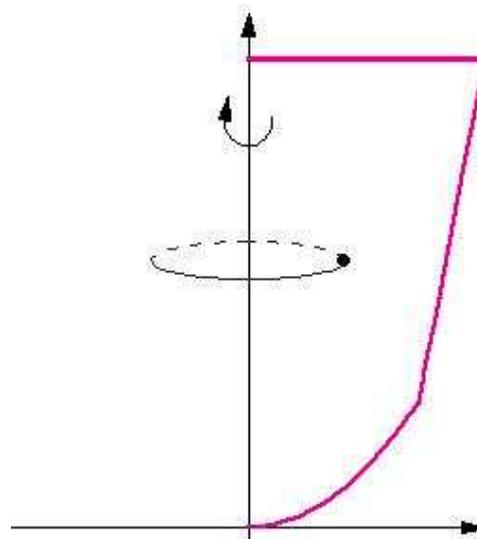


Figura 8 Localização do centróide de R

3.2 Cálculo do volume da cumbuca por seções transversas e cascas cilíndricas

O conceito de integração, que permite o cálculo do volume de sólidos delimitados por superfícies de revolução quaisquer, além de resgatar resultados conhecidos pelo aluno, fornece uma valiosa ferramenta para explorar formas mais gerais. A superfície da cumbuca, composta por um tronco de cone e um trecho de parabolóide, exemplifica estas duas situações. Assumindo conhecido o volume do cone, o aluno calculava o volume de troncos de cone pela diferença entre volumes de cones. Para o trecho de parabolóide, no entanto, o cálculo do volume envolve um

processo limite para a decomposição do sólido, quer em troncos de cone, quer em seções transversas ou cascas cilíndricas longitudinais.

Para melhor visualizar os métodos de cálculo de volume de um trecho de parabolóide genérico, vamos mudar nosso ponto de vista, conforme indicado na Fig. 9 (a).

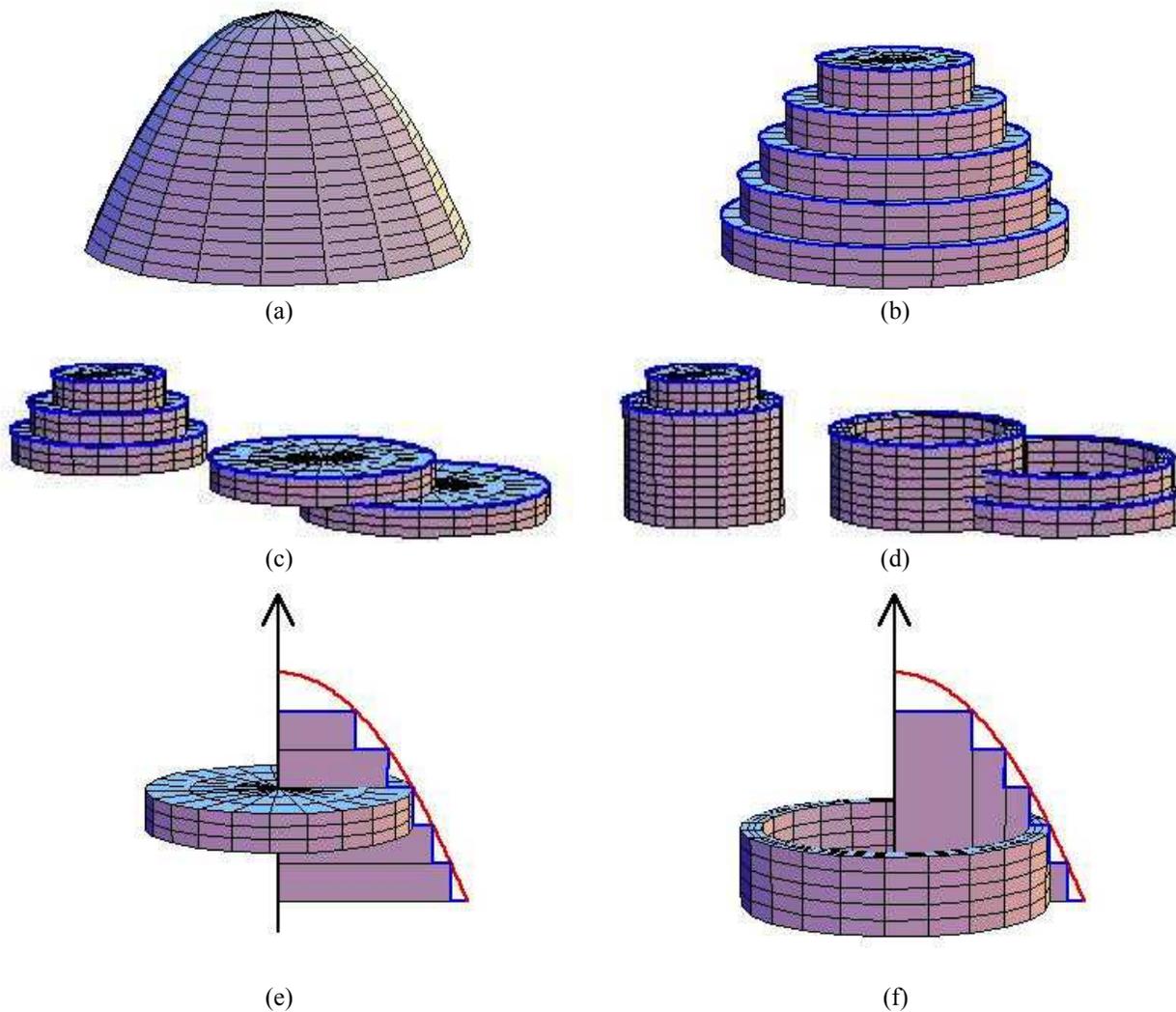


Figura 9 Decomposição do sólido de revolução em seções transversas e cascas cilíndricas

O método das seções transversas é o método utilizado para definir o conceito de volume de sólidos. Neste método escolhe-se um eixo de referência e fatia-se o sólido por planos transversais a este eixo. Isto leva à fórmula para o diferencial do volume: $dV = A(w) dw$, onde w é medido ao longo do eixo de referência e $A(w)$ é a área da seção transversal em w . A decomposição do sólido em fatias, para o cálculo de seu volume, já era utilizada no princípio de Cavalieri (1598–1647) para comparação de volumes de sólidos diferentes: *duas fatias muito finas, de mesma altura, cujas bases têm a mesma área, têm aproximadamente o mesmo volume* (Trotta *et al* [5]). Para sólidos de revolução a escolha conveniente para o eixo de referência é o eixo de revolução, pois neste caso as seções transversas são discos, ver Fig. 9 (c). O método das seções transversas pode ser aplicado a qualquer tipo de sólido, já o método das cascas cilíndricas

só é aplicável a sólidos de revolução. As cascas são as interseções do sólido com cilindros circulares retos concêntricos, cujo eixo de simetria coincide com o eixo de revolução do sólido, conforme Fig. 9 (d). Então a diferencial para o volume fica $dV = A(r) dr$, onde r é o raio do cilindro e $A(r)$ é a área superficial da casca. Ou seja, o mesmo sólido é decomposto de duas formas equivalentes de acordo com o método. Isto fica mais claro quando estas decomposições são aplicadas a uma aproximação do sólido. Uma aproximação do sólido de revolução da Fig. 9 (a) é o da Fig. 9 (b), resultado da rotação, em torno do eixo vertical, da região plana com perfil na forma de escada das Fig. 9 (e) e (f). Esta região pode ser particionada em retângulos horizontais ou verticais. A rotação dos primeiros produz uma decomposição do sólido em discos (Fig. 9 (e)) e a dos segundos produz uma decomposição em cascas (Fig. 9 (f)).

Estes métodos estão ilustrados, com animações, na Internet, em [4]. Aplicando estes métodos ao nosso problema específico, temos:

a) Seções transversas

$$V = \int_0^{g(c)} \pi (g^{-1}(y))^2 dy = \int_0^{g(b)} \pi \frac{y}{a} dy + \int_{g(b)}^{g(c)} \pi \left(\frac{y-p}{m} \right) dy.$$

b) Cascas cilíndricas

$$V = \int_0^c 2\pi x g(x) dx = \int_0^b 2\pi x ax^2 dx + \int_b^c 2\pi x (mx + p) dx.$$

Simplificando as expressões acima, e reescrevendo a , m e p em termos de b , c , $g(b)$ e $g(c)$, verificamos que estes dois métodos levam à mesma fórmula para o volume da cumbuca já obtida com o teorema de Pappus:

$$V = \frac{\pi}{6} ((b^2 - 2bc - 2c^2)g(b) + 2(b^2 + bc + c^2)g(c)).$$

4. POSSÍVEIS EXTENSÕES

A teoria até aqui utilizada apóia-se no Cálculo de uma variável real. Outra característica do objeto a ser explorada, ainda com o Cálculo de uma variável, é a área de sua superfície, utilizando-se a versão do teorema de Pappus para área de superfícies. Pode-se iniciar o estudo de integrais duplas e triplas do Cálculo de várias variáveis recalculando-se a capacidade volumétrica da cumbuca com estas ferramentas. A partir de então outros conceitos podem ser abordados: diferenciabilidade de funções de duas variáveis, massa e centro de massa da cumbuca (levando em conta, por exemplo, que esta possui densidade variável).

Multiplicadores de Lagrange entram no cenário quando se formulam problemas de otimização do tipo: como construir uma cumbuca, da forma apresentada ou combinando outras funções, de volume fixo, usando-se uma quantidade mínima de material? Uma versão simplificada deste problema, envolvendo duas variáveis (por exemplo, altura da emenda e maior raio), possibilita explorar aspectos geométricos (curvas de nível, gráficos, etc.) e solução numérica do sistema de Lagrange com o uso de pacotes gráficos e numéricos. Pode-se ainda

considerar o problema dual de encontrar o máximo volume para uma dada quantidade de material.

Priorizamos neste trabalho o Cálculo Integral. Entretanto, outra linha de investigação seria explorar conceitos do Cálculo Diferencial. Pode-se, por exemplo, trabalhar o teorema do valor médio quando da verificação do resultado de Arquimedes na relação entre as áreas do segmento parabólico e do triângulo de máxima área nele inscrito. Outro problema que envolve o aspecto diferencial é a determinação do ponto que minimiza a soma dos quadrados das distâncias deste aos vértices de um triângulo. Verifica-se que este coincide com o centróide do triângulo.

Mostramos aqui como trazer para a exploração em sala de aula objetos e fatos do cotidiano, tendo como meta motivar e desencadear o estudo da matemática. O contexto criado permite que conceitos sejam introduzidos naturalmente. Além de envolver o aluno no estudo dos tópicos desejados, perguntas espontâneas sugerem extensões e novas abordagens. Nossas experiências no *Cálculo com Aplicações* [6] ao longo dos últimos anos têm nos revelado que o envolvimento e as novas investigações despertados enriquecem os participantes e realimentam nosso trabalho, construindo uma estrada de mão dupla entre professor e aluno.

Agradecimentos

Este artigo é um fruto do projeto PROIN/CAPES: *Cálculo com Aplicações na Internet*. A idéia original do desenvolvimento deste tema surgiu em um curso de especialização com apoio Pró-Ciência/Fapesp, ministrado por uma das autoras. Agradecemos à equipe que trabalhou com a *Matemática das Seringueiras* pela doação do objeto da Fig. 2 e pelo filme que contém a imagem apresentada na Fig. 1. Também agradecemos ao Matias R. Costa pela captura desta imagem.

5. REFERÊNCIAS

- [1] J. Stewart, *Cálculo*, Vol. I e II, 4 ed., Pioneira Thomson Learning, SP: 2001, p. 1341.
- [2] H. Eves, *Introdução à História da Matemática*, Editora da Unicamp, Campinas, SP: 1995, p. 843.
- [3] G. Gamow and J.M. Cleveland, *Physics: Foundations and Frontiers*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ: 1976, p. 621.
- [4] <http://www.ime.unicamp.br/~calculo/modulos/>
- [5] F. Trotta, L.M.P. Imenes e J. Jakubovic, *Matemática Aplicada*, Vol. 3, Ed. Moderna, SP: 1980, p. 400.
- [6] <http://www.ime.unicamp.br/~calculo/quemsomos/apresentacao.html>