Variedades de Conexão para Fluxos Morse-Smale

Maria Alice Bertolim

Unicamp - Campinas

Fevereiro de 2001

Palavras chaves: Fibração, cofibração, bordismo, cobordismo, dualidade de Spanier-Whitehead, construção de Thom-Pontryagin, índice de Conley, variedade de conexão.

E-mail: bertolim@icmc.sc.usp.br

Abstract

These notes, are of expository nature and have as a goal a comparative study of Franks's theorem on connection manifolds of Morse-Smale flows and Cornea's recent generalization of that theorem.

We put together several concepts from homotopy theory necessary for the formulation of the results.

Índice

Introdução

Estas notas, de natureza expositória, tem como objetivo principal um estudo comparativo entre os trabalhos de John Franks [5] e Octav Cornea [3]. Para tal fim reunimos conceitos básicos de áreas diversas de homotopia necessários para a exposição dos resultados principais.

O trabalho de Franks investiga a relação entre os tipos de fluxos Morse-Smale que existe sobre uma variedade e a topologia da variedade. Uma função de Morse f sobre uma variedade M dá origem a uma decomposição CW da variedade com uma célula para cada ponto crítico de f. Franks formaliza esta correspondência e mostra que ela se mantém em contextos mais gerais de fluxos Morse-Smale com órbitas periódicas correspondendo a pares de células. Essas idéias são usadas para investigar o conjunto de órbitas conectando dois pontos críticos (ou órbitas fechadas) P e Q. Um dos resultados principais é que se não existe pontos críticos ou órbitas fechadas intermediárias então o conjunto das órbitas conectando P a Q admite uma seção transversal por uma subvariedade *framed* $Z(P, Q)$ de $W^u(P)$ chamada a variedade de conexão entre P e Q. Mais ainda, Franks mostra que se P e Q são pontos críticos de um fluxo Morse-Smale como acima e $Z(P, Q)$ é a variedade de conexão entre eles então a variedade *framed* $Z(P, Q)$ corresponde via construção de Thom-Pontryagin a classe de homotopia da aplicação de colagem relativa das células correspondendo a P e Q na decomposição CW associada ao fluxo.

Se Q é um sucessor de P para um fluxo Morse-Smale então naturalmente P é um sucessor de Q para um fluxo inverso, assim a variedade de conexão para este fluxo é a mesma variedade $Z(P, Q)$ mas com um framing diferente e em geral estes framings de $Z(P, Q)$ representam diferentes classes de homotopia; contudo Franks mostra que se M é estavelmente paralelizável então as duas classes de homotopia são estavelmente a mesma.

Cornea estuda as propriedades homotópicas de fluxos para pares atrator-repulsor, e tem como objetivo compreender o comportamento do par em relação a suspensão e determinar em que sentido as informações homotópicas produzidas por um fluxo suave e seu inverso são redundantes.

A teoria do índice de Conley permite definir aplicações análogas às descritas por Franks para pares atrator-repulsor de algum fluxo geral γ, e também para o fluxo inverso $-\gamma$, denotadas respectivamente por δ e δ'. No caso Morse-Smale e considerando pontos críticos consecutivos temos que δ e δ' são, respectivamente, a suspensão da aplicação de colagem relativa com relação ao fluxo γ e com relação ao fluxo inverso $-\gamma$, dada por Franks. Cornea mostra que as aplicações δ e δ' são Spanier-Whitehead duais no contexto estavelmente paralelizável e são duais módulo uma certa construção de Thom em geral.

Naturalmente, o resultado de Franks sobre igualdade estável a menos de sinal da aplicação de colagem relativa do fluxo e de seu inverso é também estendido (já que a dualidade de Spanier-Whitehead de aplicações entre esferas é estavelmente igual, a menos de sinal). Como para fluxos gerais não se tem controle sobre as variedades estáveis e instáveis, os métodos de Cornea são forçados a serem um pouco diferentes.

O trabalho está organizado da seguinte maneira:

No Capítulo 1 fizemos um breve resumo da teoria necessária para o entendimento dos trabalhos de Franks e Cornea. São resultados que envolvem elementos de Homotopia, a construção de Thom-Pontryagin e teoria do índice de Conley.

No Capítulo 2 temos os resultados do trabalho de Franks sobre variedades de conexão e suas demonstrações.

No Capítulo 3 fizemos um estudo comparativo do trabalho de Franks e Cornea sobre a relação do fluxo e de seu inverso. Finalizamos com um comentário sobre a generalização de Cornea [4] do Teorema da Variedade de Conexão de Franks. Este trabalho [4] ainda não foi publicado e está em forma de preprint.

Essas notas são baseadas nos artigos [5] e [3]. Durante o final do primeiro semestre e todo o segundo semestre de 2000 realizou-se seminários na UNICAMP/USP, e também durante todo o mês de novembro tivemos a presença do Prof. Octavian Cornea que ministrou um mini-curso e nos auxiliou no entendimento de muitas de suas técnicas. Este trabalho é um resultado desses seminários e do mini-curso.

Agradeço a minha orientadora Ketty Abaroa de Rezende e co-orientador Ozíride Manzoli Neto pelo incentivo e participação para a organização deste trabalho. Agradeço também à Fapesp e PROAP/IMECC/Capes pelo apoio financeiro para o desenvolvimento deste trabalho.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

1.1 Elementos de Homotopia

1.1.1 Fibrações e Cofibrações

Definição 1.1.1. Sejam X, B e F espaços Hausdorff e $p : X \to B$ uma aplicação contínua. A aplicação p é chamada uma *projeção fibrada* com fibra F, se cada ponto de B tem uma vizinhança U tal que existe um homeomorfismo $\phi : U \times F \to p^{-1}(U)$ tal que $p(\phi < b, y >) = b$ para todo $b \in U$ e $y \in F$. Isto é, sobre p^{-1}, p corresponde à projeção no segundo fator $U \times F \to U$. Uma tal aplicação ϕ é chamada uma *trivialização do fibrado* sobre U .

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[d] & U \times F \arrow[l] \arrow[dl] \\ U & \end{tikzcd}$$

Definição 1.1.2. Seja K um grupo topológico atuando efetivamente sobre o espaço Hausdorff F como um grupo de homeomorfismos. Sejam X e B espaços de Hausdorff. Um *fibrado sobre o espaço base B com espaço total X, fibra F, e estrutura de grupo K*, é uma projeção fibrada $p : X \to B$ juntamente com uma coleção Φ de trivializações $\phi : U \times F \to p^{-1}(U)$, de p sobre U, chamadas cartas sobre U, tal que:

(a) cada ponto de B tem uma vizinhança sobre a qual existe uma carta em Φ;

(b) se $\phi : U \times F \to p^{-1}(U)$ está em Φ e $V \subset U$ então a restrição de ϕ a $V \times F$ está em Φ;

(c) se $\phi,\ \psi\ \in \Phi$ são cartas sobre U então existe uma aplicação $\theta : U \to K$ tal que

$$\psi < u, y >= \phi < u, \theta(u)(y) >;$$

(d) o conjunto Φ é maximal entre as coleções satisfazendo (a),(b) e (c).

Observação 1.1.3. O fibrado é chamado *suave* se todos estes espaços são variedades e todas as aplicações envolvidas são suaves.

Definição 1.1.4. Um *fibrado vetorial* é um fibrado no qual a fibra é um espaço euclidiano e a estrutura de grupo é o grupo linear geral deste espaço euclidiano ou algum subgrupo deste grupo.

Observação 1.1.5. Um fibrado vetorial é geralmente denotado por uma letra grega tal como ξ e seu espaço total por $E(\xi)$ e o espaço base por $B(\xi)$. Sua projeção fibrada é denotada por π_S ou apenas por π.

Definição 1.1.6. Se ξ e η são fibrados vetoriais então uma aplicação entre fibrados é uma função contínua $g : E(\xi) \to E(\eta)$ levando cada fibra de ξ sobre alguma fibra de η isomorficamente. (Em particular, as fibras tem a mesma dimensão e existe uma aplicação induzida $B(\xi) \to B(\eta)$.) Uma *aplicação entre fibrados* g é um isomorfismo entre fibrados ou uma equivalência de fibrados se g é um homeomorfismo.

Definição 1.1.7. Um *fibrado em disco, ou em esfera*, é um fibrado no qual a fibra é um disco ou esfera no espaço euclidiano e a estrutura de grupo é o grupo ortogonal daquele espaço, ou algum subgrupo do grupo ortogonal.

Observação 1.1.8. Um fibrado em disco ou esfera dá origem a um fibrado vetorial com o grupo ortogonal como estrutura de grupo apenas substituindo as fibras D^n ou S^{n-1} por R^n e usando a mesma mudança de funções coordenadas θ. Um tal fibrado vetorial é algumas vezes chamado um *fibrado euclidiano*. Reciprocamente, todo fibrado vetorial sobre um espaço base paracompacto pode ser dado a estrutura de um fibrado euclidiano, significando que um atlas de cartas pode ser selecionado para o qual as mudanças de coordenadas são ortogonais em cada fibra. (Na terminologia de Steenrod, dizemos que a estrutura de grupo pode ser *reduzida* a $O(n)$.)

Exemplo 1.1.9. Considere o espaço base S^1 e o espaço total do fibrado o cilindro, temos neste caso que o fibrado em disco é o disco D^1 (para cada ponto como indicado na Figura 1.1) e o fibrado em esfera é $S^1 \times S^0$. Note que o fibrado em esfera tem duas componentes.

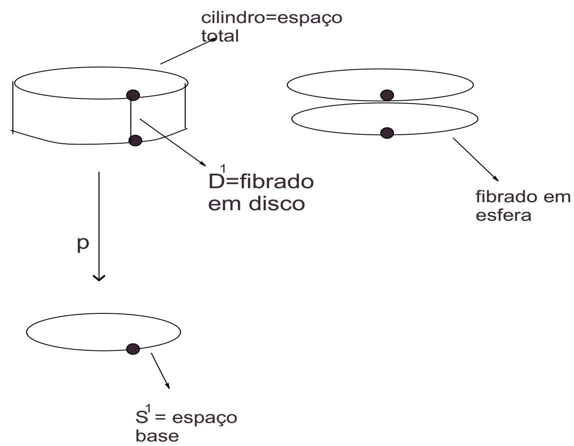

Figura 1.1: Fibrados

Exemplo 1.1.10. Considere agora o espaço base S^1 e o espaço total do fibrado a faixa de Möbius. Temos neste caso que o fibrado em disco é o disco D^1 (para cada ponto) e o fibrado em esfera agora não é mais $S^1 \times S^0$, como no exemplo anterior. Note que agora só temos uma componente. Ver Figura 1.2.

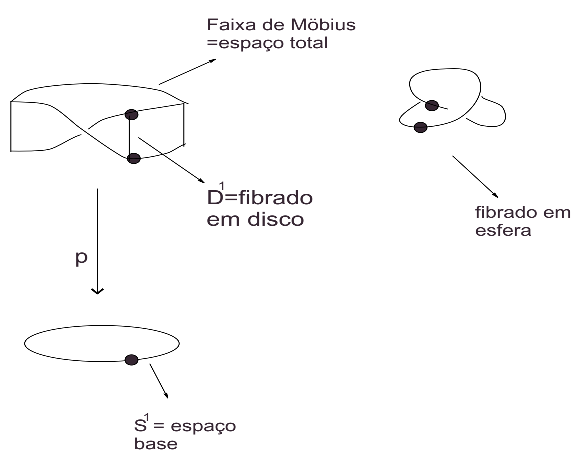

Figura 1.2: Fibrados

Observação 1.1.11. Em ambos os casos poderíamos substituir D^1 por $\mathbb{R}$ e obteríamos fibrados euclidianos.

Definição 1.1.12. Seja (X, A) e Y espaços dados. Então (X, A) é dito ter a *propriedade de extensão de homotopia com respeito a Y* se o seguinte diagrama pode ser completado de forma a ser comutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \times I \cup X \times \{0\} \arrow[r] \arrow[d, hook] & Y \\
X \times I \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

Observe Figura 1.3.

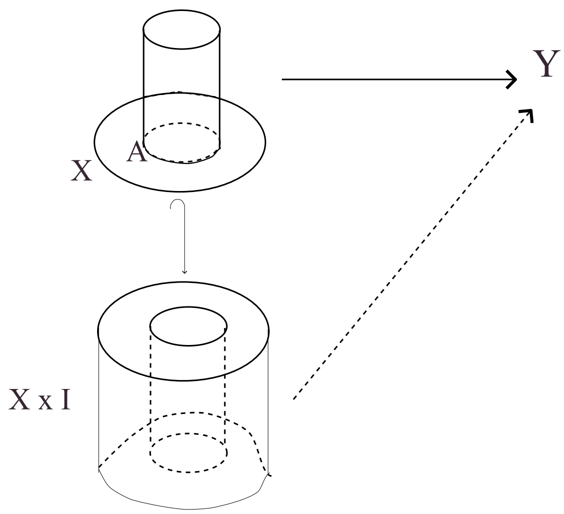

Figura 1.3: Propriedade de extensão de homotopia

Note que também podemos retratar isto com o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \times \{0\} \arrow[rr] \arrow[dd, hook] & & A \times I \arrow[dl] \arrow[dd, hook] \\
& Y & \\
X \times \{0\} \arrow[ur] \arrow[rr] & & X \times I \arrow[ul, dashed]
\end{tikzcd}$$

A Figura 1.4 ilustra o diagrama acima.

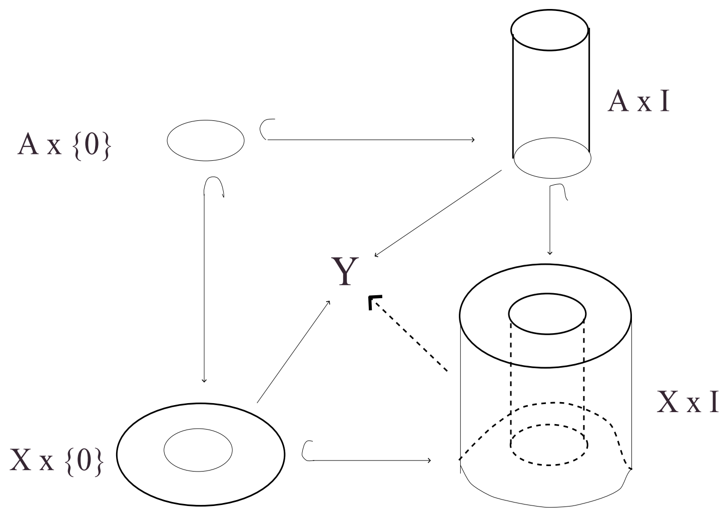

Figura 1.4: Propriedade de extensão de homotopia

Definição 1.1.13. Seja $f : A \to X$ uma aplicação. Então f é chamada uma *cofibração* se podemos sempre completar o seguinte diagrama de forma a ser comutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \times \{0\} \arrow[rr] \arrow[dd, "f\times 1"'] & & A \times I \arrow[dl] \arrow[dd, "f\times 1"] \\
& Y & \\
X \times \{0\} \arrow[ur] \arrow[rr] & & X \times I \arrow[ul, dashed]
\end{tikzcd}$$

para qualquer espaço Y.

Observação 1.1.14. Note que se f é uma inclusão então isto é o mesmo que (X, A) ter a propriedade de extensão de homotopia para todo Y. Algumas vezes nos referimos a isto como *propriedade de extensão de homotopia absoluta.*

Teorema 1.1.15. *Para uma inclusão $A \subset X$ as seguintes afirmações são equivalentes:*
(1) A aplicação inclusão $A \hookrightarrow X$ é uma cofibração.
(2) $A \times I \cup X \times \{0\}$ é um retrato de $X \times I$.

Teorema 1.1.16. *Assuma que $A \subset X$ é fechado e que exista uma vizinhança U de A e uma aplicação $\phi : X \to I$, tal que:*
(1) $A = \phi^{-1}(0)$;

(2) $\phi(X - U) = \{1\}$, *e*

(3) U *se deforma em* A *dentro de* X *com* A *fixado, isto é, existe uma aplicação* $H : U \times I \to X$ *tal que* $H(a,t) = a$ *para todo* $a \in A$, $H(u,0) = u$, *e* $H(u,1) \in A$ *para todo* $u \in U$.

Então a inclusão $A \hookrightarrow X$ *é uma cofibração. A recíproca também é verdadeira.*

Suponha que $f : X \to Y$ é qualquer função contínua. Lembre que o *mapping cylinder* M_f de f é definido como o espaço quociente

$$M_f = ((X \times I) \cup Y)/((x,0) \sim f(x)).$$

Exemplo 1.1.17. Consideremos $X = S^1$, $Y = S^1$, $I = [0,1]$ e $f = Id$. Para construir o *mapping cylinder* de f, primeiro devemos tomar $X \times I = S^1 \times [0,1]$ unindo a $Y = S^1$ via f, isto é, identificando os pontos $(x,0)$ aos pontos $f(x)$. A Figura 1.5 representa esta construção.

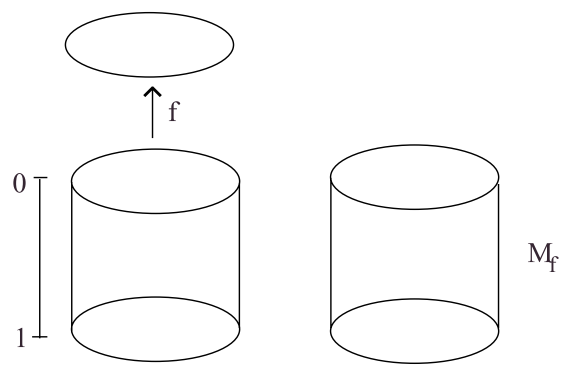

Figura 1.5: Passos para a obtenção do *mapping cylinder*

A inclusão $i : X \hookrightarrow M_f$ satisfaz o Teorema 1.1.16. De fato: Tomemos $U = A \times [0,1)$ (considere aqui um parâmetro s), onde $A = i(X)$. Assim, $U \times [0,1] = (A \times [0,1)) \times [0,1]$. Seja $H(u,t) = H((a,s),t) = (a, s(1-t))$. Temos que

$H(u,0) = H((a,s),0) = (a,s) = u$

$H(u,1) = H((a,s),1) = (a,1) \in A$

$H((a,0),t) = H((a,0),t) = (a,0) \in A$.

Defina $\phi : M_f \to I$ de forma que $A = i(X) = \phi^{-1}(0)$ e que $\phi(M_f - U) = \{1\}$.

Logo as condições do Teorema 1.1.16 estão satisfeitas e assim temos que $i : X \hookrightarrow M_f$ é uma cofibração. Também a retração é uma equivalência de homotopia com homotopia inversa sendo a inclusão $Y \hookrightarrow M_f$.

O diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & M_f \arrow[dl, "r"', "\simeq"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

comuta. Isto mostra que qualquer aplicação f é uma cofibração, a menos de uma equivalência de homotopia de espaços. Também lembre a definição do *mapping cone* de $f : X \to Y$ como o espaço quociente

$$C_f = M_f / X \times \{1\} \approx M_f \cup CX.$$

Exemplo 1.1.18. Consideremos $X = S^1$, $Y = S^1$, $I = [0, 1]$ e $f = Id$. Para construir o *mapping cone* de f, primeiro devemos construir o *mapping cylinder* (veja Figura 1.5), depois disso devemos identificar os pontos $(x, 1)$ em um ponto. A Figura 1.6 representa esta construção.

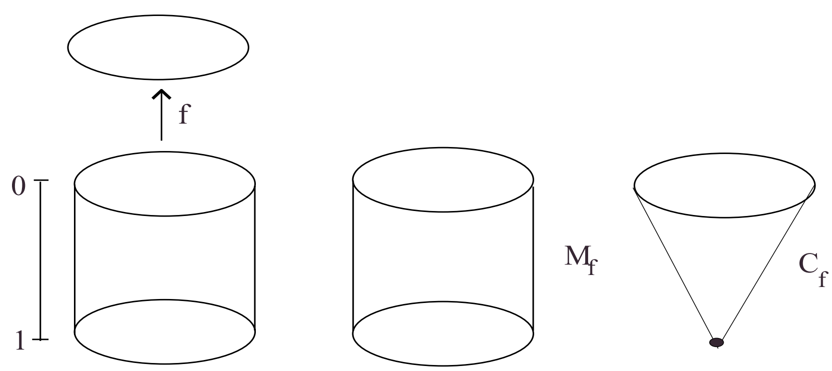

Figura 1.6: Passos para a obtenção do *mapping cone*

No caso de uma inclusão $i : A \hookrightarrow X$, temos $C_i = X \cup CA$. Existe a aplicação $h : C_i \to X/A$, definida como uma aplicação quociente $X \cup CA \to X \cup CA/CA$ composta com o inverso do homeomorfismo $X/A \to X \cup CA/CA$.

É natural perguntar quando h é uma equivalência de homotopia. Isto não ocorre sempre, mas o seguinte resultado dá uma condição suficiente para isso.

Teorema 1.1.19. *Se $A \subset X$ é fechado e a inclusão $i : A \hookrightarrow X$ é uma cofibração então $h : C_i \to X/A$ é uma equivalência de homotopia. De fato, ela é uma equivalência de homotopia de pares*

$$(X/A, *) \simeq (C_i, CA) \simeq (C_i, v),$$

onde v é o vértice do cone.

Corolário 1.1.20. *Se $A \subset X$ é fechado e a inclusão $A \hookrightarrow X$ é uma cofibração então a aplicação $j : (X, A) \to (X/A, *)$ induz isomorfismos*

$$H_*(X, A) \approx H_*(X/A, *) \approx \tilde{H}_*(X/A),$$

$$\tilde{H}^*(X, A) \approx H^*(X/A, *) \approx H^*(X, A).$$

Vamos lembrar a noção de categoria pontuada.

A categoria pontuada tem como objetos, espaços com um ponto base $*$, e como aplicações, aquelas aplicações de espaços preservando o ponto base. Existe também a categoria de pares de espaços pontuados. Existe também a noção de homotopia nesta categoria, aquelas homotopias que preservam o ponto base.

Se $f : X \to Y$ é uma aplicação pontuada então o *mapping cylinder reduzido* de f é o espaço quociente M_f de $(X \times I) \cup Y$ módulo as relações identificando o conjunto $\{*\} \times I$ ao ponto base de M_f.

Exemplo 1.1.21. Consideremos $X = S^1$, $Y = S^1$, $I = [0, 1]$ e $f = Id$. Para construir o *mapping cylinder reduzido* de f, devemos tomar o *mapping cylinder* construído anteriormente (ver Figura 1.5), depois disso devemos identificar os pontos $\{*\} \times I$ indicado com a linha mais grossa na Figura 1.7. A Figura 1.7 representa esta construção.

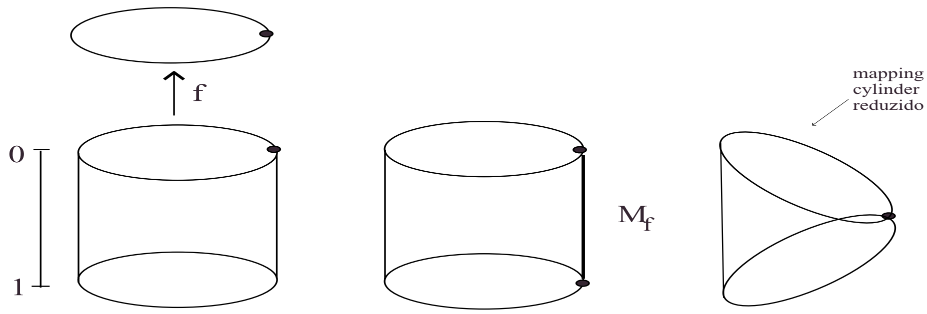

Figura 1.7: Passos para a obtenção do *mapping cylinder reduzido*

O *mapping cone reduzido* é o quociente do mapping cylinder reduzido M_f obtido identificando a imagem de $X \times \{1\}$ a um ponto, o ponto base.

Exemplo 1.1.22. Consideremos $X = S^1$, $Y = S^1$, $I = [0, 1]$ e $f = Id$. Para construir o *mapping cone reduzido* de f, primeiro devemos tomar o *mapping cylinder reduzido*, depois disso devemos identificar os pontos $(x, 1)$ ao ponto base, indicado na Figura 1.8 com a linha mais grossa. A Figura 1.8 representa esta construção.

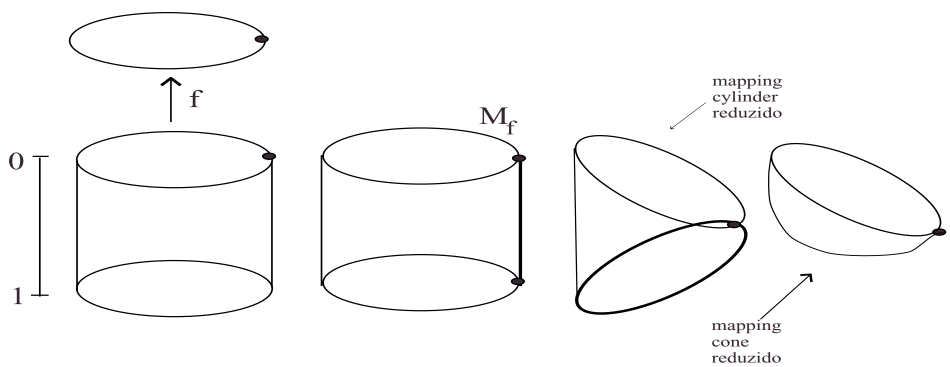

Figura 1.8: Passos para a obtenção do *mapping cone reduzido*

A *união em um ponto de espaços pontuados* X e Y é o quociente $X \vee Y$ da união disjunta $X \sqcup Y$ obtido identificando os dois pontos bases, ou seja,

$$X \vee Y = X \sqcup Y / x_0 \sim y_0,$$

onde x_0, y_0 são os pontos base de X e Y, respectivamente.

O *produto smash* é o espaço pontuado

$$X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y.$$

O círculo S^1 é definido como $I/\partial I$ com ponto base $\{\partial I\}$.

A *suspensão reduzida* de um espaço pontuado X é $\Sigma X = X \wedge S^1$. Pode também ser considerado como o espaço quociente $X \times I/(X \times \partial I \cup \{*\} \times I)$.

Como observado antes, $S^n \wedge S^m$ é a compactificação de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ em um ponto e logo é homeomorfo a S^{n+m}. Assim, podemos redefinir S^n indutivamente por $S^{n+1} = \Sigma S^n$. Note também que

$\Sigma(\Sigma X) = (\Sigma X) \wedge S^1 = (X \wedge S^1) \wedge S^1 = X \wedge S^2$, etc.

Os resultados anteriores desta seção podem todos serem substituídos em termos da categoria pontuada.

Definição 1.1.23. O par de aplicações $A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{r} C$ formam uma *seqüência de cofibração* se j é uma cofibração, $C = B/A$ e r é a aplicação de colapso óbvia.

Definição 1.1.24. Uma aplicação $j : A \to B$ tem a *propriedade de extensão de homotopia* se dada homotopia $h : A \times [0,1] \to X$ e uma aplicação $F : B \to X$ tal que $F \circ j = h_0$ então existe uma homotopia $H : B \times [0,1] \to X$ que estende h e com $H_0 = F$.

Observação 1.1.25. Uma inclusão $j : A \to B$ é uma cofibração se ela satisfaz a propriedade de extensão de homotopia de uma aplicação. Este conceito é útil porque, dada uma seqüência de cofibração $A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{r} C$, se a inclusão j é uma cofibração então o tipo de homotopia do quociente B/A é o mesmo que o de $B \cup_j CA$ (CA é o cone sobre A). Em vista disso, identificaremos muitas vezes C e $B \cup_j CA$.

Observação 1.1.26. Uma seqüência de cofibração se estende à direita dando uma seqüência de aplicações:

$$A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{r} C \xrightarrow{\delta} \Sigma A \xrightarrow{\Sigma j} \Sigma B \xrightarrow{\Sigma r} \cdots$$

onde δ é o colapso $C \simeq B \cup CA \longrightarrow (B \cup CA)/B = \Sigma A$.

1.1.2 Bordismos e Cobordismos

Seja M uma variedade com bordo. Lembremos que toda variedade sem bordo é o bordo de uma variedade com bordo, por exemplo $M = \partial(M \times [0,1))$. Mas para ser bordo de uma variedade compacta com bordo implica numa restrição com interessantes consequências geométricas. Mais geralmente, dividimos variedades fechadas (isto é, compactas, sem bordo) em *classes de bordismo* como segue.

Definição 1.1.27. Duas variedades fechadas de dimensão n M_1 e M_2 são chamadas *bordantes* se existe uma variedade compacta com bordo W, tal que $\partial W = M_1 + M_2$ (Ver Figura 1.9). Se a variedade fechada M é o bordo de uma variedade compacta com bordo, chamamos M *bordante*.

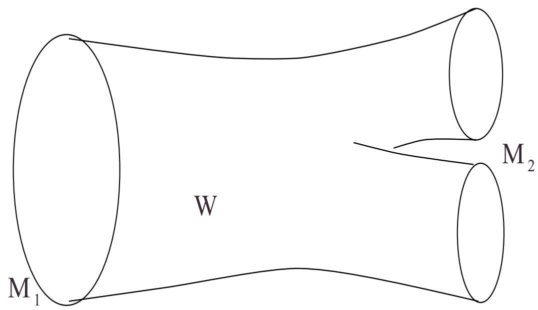

Figura 1.9: Variedades bordantes

Observação 1.1.28. *Bordismo* é uma relação de equivalência. As classes de equivalência são chamadas classes de bordismo; denotamos a classe de bordismo de M por $[M]$.

Ao conjunto das classes de bordismos de variedades de dimensão n denotaremos Ω_n, a soma disjunta de variedades induz uma soma nas classes dando a Ω_n a estrutura de grupo abeliano.

O produto cartesiano define uma multiplicação

$$\Omega_n \times \Omega_m \to \Omega_{n+m}$$

dando a $\Omega_* := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Omega_n$ uma estrutura de $\mathbb{Z}/2$-álgebra.

O grupo de bordismo $\Omega^n(X)$ de um espaço X é definido como segue: Um elemento de $\Omega^n(X)$ é uma classe de equivalência $[f, M]$ de aplicações $f : M \to X$ onde M é uma n-variedade compacta, orientada sem bordo. Duas aplicações são equivalentes se elas se estendem a uma aplicação definida sobre um cobordismo orientado entre seus domínios. Tomando $X = \{\text{um ponto}\}$ denotaremos $\Omega^n(\text{um ponto})$ por Ω^n. Uma classe de homotopia de aplicações $g : X \to Y$ induz um homomorfismo de grupos abelianos $g_\sharp : \Omega^n(X) \to \Omega^n(Y)$, pela composição com aplicações $f : M \to X$.

Definição 1.1.29. Seja N e N' subvariedades de M, todas sem bordo e compactas, M de dimensão m e N, N' de dimensão n. A diferença das dimensões $m - n$ é chamada a *codimensão* das subvariedades.

Definição 1.1.30. N e N' são ditas *cobordantes* em M se o subconjunto $N \times [0, \varepsilon) \cup N' \times (1 - \varepsilon, 1]$ de $M \times [0,1]$ pode ser estendido a uma variedade compacta $X \subset M \times [0,1]$, tal que $\partial X = N \times 0 \cup N' \times 1$, e tal que X não intersecta $M \times 0 \cup M \times 1$ exceto nos pontos de ∂X.

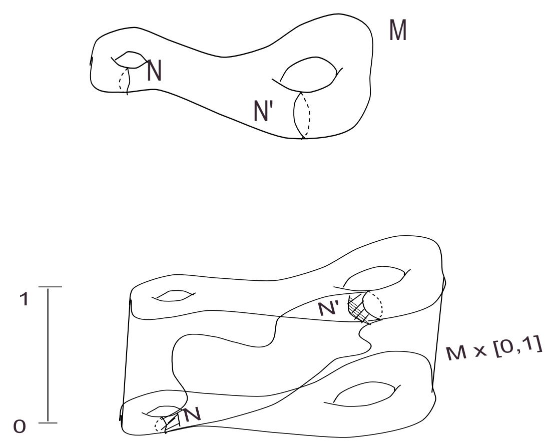

Figura 1.10: Variedades Cobordantes.

Claramente cobordismo é uma relação de equivalência.

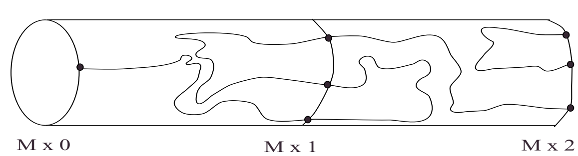

Figura 1.11: Relação de equivalência

Definição 1.1.31. Um *framing* da subvariedade $N \subset M$ é uma função suave b que associa a cada $x \in N$ uma base

$$b(x) = (v^1(x), ..., v^{m-n}(x))$$

para o espaço $TN_x^\perp \subset TM_x$ de vetores normais a $N \subset M$ em x. Ver Figura 1.12.

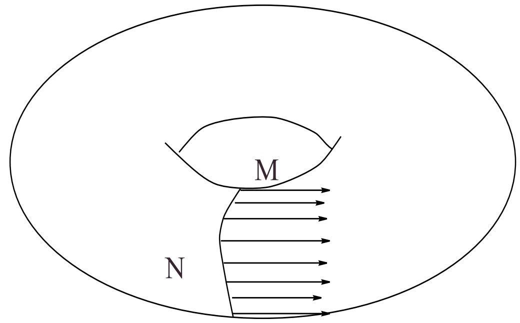

Figura 1.12: Subvariedade *framed* de M.

O par (N, b) é chamado uma *subvariedade framed* de M. Duas subvariedades *framed* (N, b), $b(x) = (v^1(x), ..., v^{m-n}(x))$, e (N', m), $m(x) = (w^1(x), ..., w^{m-n}(x))$, são *cobordantes framed* se existe um cobordismo $X \subset M \times [0, 1]$ entre N e N' e um *framing* μ de X, tal que

$$\mu^i(x, t) = (v^i(x), 0) \text{ para } (x, t) \in N \times [0, \varepsilon)$$

$$\mu^i(x, t) = (w^i(x), 1) \text{ para } (x, t) \in N' \times (1 - \varepsilon, 1]$$

Novamente isto é uma relação de equivalência.

1.1.3 A dualidade de Spanier-Whitehead

Complexos CW

As demonstrações dos resultados desta seção podem ser encontradas em [1].

Um complexo CW é um espaço composto de *células* coladas de maneira conveniente. O C em CW representa *finite closure* (fecho finito) e o W representa *weak topology* (topologia fraca).

Seja $K^{(0)}$ um conjunto discreto de pontos. Estes pontos são as 0-células.

Se $K^{(n-1)}$ foi definida, seja $\{f_{\partial\sigma}\}$ uma coleção de aplicações $f_{\partial\sigma} : S^{n-1} \to K^{(n-1)}$ onde σ varia sobre algum conjunto indexado. Seja Y a união disjunta de n-discos indexados por σ, D^n_σ e B a correspondente união dos bordos S^{n-1}_σ destes discos, e coloque juntamente as aplicações $f_{\partial\sigma}$ para produzir uma aplicação $f : B \to K^{(n-1)}$.

Então defina

$$K^{(n)} = K^{(n-1)} \cup_f Y.$$

A aplicação $f_{\partial\sigma}$ é chamada a *aplicação de colagem* para a célula σ.

Se $K^{(n)}$ foi definido para todos os $n >> 0$, seja $K = \cup K^{(n)}$ com a topologia fraca que especifica que um conjunto é aberto $\Leftrightarrow$ sua intersecção com cada $K^{(n)}$ é aberta em $K^{(n)}$. (Segue que um conjunto é fechado $\Leftrightarrow$ sua intersecção com cada $K^{(n)}$ é fechado).

Para cada σ seja $f_\sigma : D^n_\sigma \to K$ a aplicação canônica dada pela colagem da célula σ. Esta aplicação é chamada a *aplicação característica* da célula σ. Seja K_σ a imagem de f_σ. Isto é um subconjunto compacto de K que será chamado uma *célula fechada.* (Note, contudo, que isto não é geralmente homeomorfo a D^n já que existem identificações sobre o bordo). Denote por U_σ a imagem em K do disco aberto $D^n_\sigma - S^{n-1}_\sigma$. Isto é homeomorfo ao interior de um n-disco (isto é, a $\mathbb{R}^n$). Nos referimos a U_σ como uma *célula aberta*, mas lembremos que isto não é geralmente um subconjunto aberto de K, e sim um aberto em $K^{(n)}$.

É claro que a *topologia* de cada $K^{(n)}$, e logo, do próprio K, é caracterizada pelo fato que um subconjunto é aberto (fechado) $\Leftrightarrow$ sua imagem inversa em relação a cada f_σ é aberta (fechada) $\Leftrightarrow$ sua intersecção com cada K_σ é aberta (fechada) em K_σ onde a topologia do quociente de D^n_σ pelas identificações feitas pela aplicação de colagem $f_{\partial\sigma}$.

Também note que uma função $g : K \to X$, para qualquer espaço X, é contínua se, e somente se, cada $g \circ f_\sigma : D^n_\sigma \to X$ é contínua.

Um *subcomplexo* é uma união de algumas das células fechadas e que formam um complexo CW com as mesmas aplicações de colagem. (Assim, se a célula σ está no subcomplexo então K_σ está contido no subcomplexo, bem como todas as células abertas que a tocam). É claro que uma intersecção de qualquer coleção de subcomplexos de K é um subcomplexo de K. Consequentemente, existe geralmente um subcomplexo mínimo satisfazendo qualquer dada condição.

O subcomplexo $K^{(n)}$ de K é chamado o *n-esqueleto* de K.

Proposição 1.1.32. *Se K é um complexo CW então podemos afirmar:*

(1) Se $A \subset K$ não tem dois pontos na mesma célula aberta, então A é fechado e discreto;

(2) Se $C \subset K$ é compacto então C está contido em uma união finita de células abertas; e

(3) Cada célula de K está contida em um subcomplexo finito de K.

Teorema 1.1.33. *Se K é um complexo CW então qualquer subconjunto compacto de K*

está contido em um subcomplexo finito.

Segue que a aplicação de colagem $f_{\partial\sigma}$ para qualquer célula σ é uma colagem sobre um subcomplexo finito. A parte (3) da proposição é a origem do termo *closure finite*. A noção de um complexo CW é devido a J.H.C. Whitehead.

Exemplo 1.1.34. A n-esfera é um complexo CW com uma 0-célula e uma n-célula, onde, naturalmente, a única aplicação de colagem é $S^{n-1} \to$ ponto. Não existem células nas outras dimensões.

A dualidade de Spanier-Whitehead

Definição 1.1.35. Dois complexos CW X e X' são *Spanier-Whitehead duais* se existe uma aplicação $\mu : X \wedge X' \to S^m$ tal que o produto slant $\mu^*(i_m)^*/ : H_q(X') \to H^{m-q}(X)$ dá um isomorfismo. A aplicação μ é chamada uma m-dualidade.

Observação 1.1.36. Lembremos que o *produto slant* α/γ com $\alpha \in H^{p+q}(A \times B)$ e $\gamma \in H_p(A)$ é uma classe de cohomologia em $H^q(B)$ que satisfaz $< \alpha/\gamma, \beta >=< \alpha, \gamma \times \beta >$ para todo $\beta \in H_q(B)$, onde o produto cross exterior e $<,>$ é o par usual de cohomologia-homologia. A aplicação natural $A \times B \to A \wedge B$ permite usar no produto slant uma classe $\alpha^{p+q}(A \wedge B)$ voltando ao produto $A \times B$.

A dualidade de Spanier-Whitehead se comporta bem em relação a suspensão: se X e X' são m-duais com aplicação de dualidade μ, então $\Sigma^k X$ e $\Sigma^q X'$ são $(m+k+q)$-duais com respeito a *suspensão óbvia de* μ [1]. Assuma que X, X' são duais por uma m-dualidade, μ, e Y, Y' são duais por uma m-dualidade ν. Duas aplicações pontuadas $f : X \to Y$, $g : Y' \to X'$ são duais se para algum k, k' o seguinte diagrama comuta homotopicamente:

$$\begin{array}{ccc}
\Sigma^k X \wedge \Sigma Y'^{k'} & \xrightarrow{f \wedge 1} & \Sigma^k Y \wedge \Sigma Y'^{k'} \\
{\scriptstyle 1\wedge g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu} \\
\Sigma^k X \wedge \Sigma X'^{k'} & \xrightarrow[\mu]{} & S^{m+k+k'}
\end{array}$$

[1]A suspensão óbvia de μ, $\Sigma^{k+q}\mu : \Sigma^k X \wedge \Sigma^q X' \to S^{m+k+q}$. Como $\Sigma^k X \wedge \Sigma^q X' = X \wedge X' \wedge S^{k+q}$. Então $\Sigma^{k+q}\mu = \mu \wedge id$ e portanto indicaremos a suspensão por μ.

Em geral, apenas permitindo k e k' serem suficientemente grandes esta noção de dualidade dá um isomorfismo de dualidade entre as classes de aplicações (estáveis) $D_m(\mu,\nu) : \{X,Y\} \approx \{Y',X'\}$.

A seguir temos uma forma de obter aplicações de dualidade.

Assuma $A \subset S^{m+1}$, $B \subset S^{m+1}$ tal que a inclusão induz um isomorfismo $H_*(B) \to H_*(S^{m+1} - A)$, e A, B são conexos e disjuntos. Defina uma aplicação da seguinte forma: fixe um ponto $p \in S^{m+1} - (A \cup B)$ e identifique $S^{m+1} - \{p\}$ com $\mathbb{R}^{m+1}$. Então definimos $\nu : A \times B \to S^m$ por $\nu(x,y) = (x-y)/||x-y||$. A conectividade implica que esta aplicação é homotopicamente nula quando restrita a $A \vee B$. Ela define uma aplicação $A \wedge B \to S^m$ que é uma aplicação de dualidade. Podemos identificar aplicações duais neste sentido: se A', B' é um outro par de subspaços de S^{m+1} que satisfaz as condições acima e se $A \xrightarrow{i} A'$ e $B' \xrightarrow{i'} B$ são inclusões, então i e i' são duais com respeito as aplicações de dualidade construídas acima.

Exemplo 1.1.37. Seja A um complexo CW finito. Considere

$$A \hookrightarrow \mathbb{R}^n \hookrightarrow S^n.$$

Podemos então considerar $A \hookrightarrow S^n$ e seja $B = \overline{S^n \setminus A}$.

Neste caso temos que B é Spanier-Whitehead dual de A.

1.2 A Construção de Pontryagin

O grau de uma aplicação $M \to M'$ é definido apenas quando as variedades M e M' são orientadas e têm a mesma dimensão. Estudaremos uma generalização, devido a Pontryagin, que é definida para uma aplicação suave

$$f : M \to S^p$$

de uma variedade arbitrária compacta e sem bordo a uma esfera.

Agora considere uma aplicação suave $f : M \to S^p$ e um valor regular $y \in S^p$. A aplicação f induz um framing da variedade $f^{-1}(y)$ como segue: Escolha uma base orientada positivamente $b = (v^1, ..., v^p)$ para o espaço tangente $T(S^p)_y$.

Para cada $x \in f^{-1}(y)$ temos que

$$df_x : TM_x \to T(S^p)_y$$

leva o subspaço $Tf^{-1}(y)_x$ a zero e leva o seu complemento ortogonal $Tf^{-1}(y)_x^{\perp}$ isomorficamente sobre $T(S^p)_y$. Logo, existe um único vetor

$$w^i(x) \in Tf^{-1}(y)_x^{\perp} \subset TM_x$$

que atinge v^i por df_x. Será conveniente usar a notação $m = f^*b$ para o *framing* resultante $w^1(x), \cdots, w^p(x)$ de $f^{-1}(y)$.

Definição 1.2.1. Esta variedade *framed* $(f^{-1}(y), f^*b)$ será chamada a *variedade Pontryagin associada a f.*

Naturalmente f tem muitas variedades Pontryagin, correspondentes às diferentes escolhas de y e b, mas elas pertencem a uma única classe de cobordismo *framed*.

Teorema 1.2.2. *Se y' é um outro valor regular de f e b' é uma base orientada positivamente para $T(S^p)_{y'}$, então a variedade* framed *$(f^{-1}(y'), f^*b')$ é cobordante* framed *a $(f^{-1}(y), f^*b)$.*

Teorema 1.2.3. *Duas aplicações de M a S^p são suavemente homotópicas se, e somente se, as variedades Pontryagin associadas são cobordante* framed.

Teorema 1.2.4. *Qualquer subvariedade* framed *compacta (N, m) de codimensão p em M pode ser considerada como variedade Pontryagin para alguma aplicação suave $f : M \to S^p$.*

Assim, as classes de homotopia de aplicações estão em correspondência um-a-um com as classes de cobordismo *framed* de subvariedades.

A seguinte proposição auxilia nas provas dos teoremas anteriores.

Proposição 1.2.5. *(a) Se b e b' são duas bases em y diferentes orientadas positivamente, então a variedade Pontryagin $(f^{-1}(y), f^*b)$ é cobordante* framed *a $(f^{-1}(y'), f^*b')$.*
(b) Se y é um valor regular de f, e z está suficientemente próximo a y, então $f^{-1}(z)$ é cobordante framed *a $f^{-1}(y)$.*

(c) Se f e g são suavemente homotópicas e y é um valor regular para ambas, então $f^{-1}(y)$ é cobordante framed *$g^{-1}(y)$.*
(d) Se a variedade framed *$(f^{-1}(y), f^*b)$ é igual a $(g^{-1}(y), g^*b)$, então f é suavemente homotópica a g.*

Observação 1.2.6. Os teoremas 1.2.2, 1.2.3, 1.2.4 podem ser facilmente generalizados a variedades M com bordo. A idéia essencial é considerar apenas aplicações que levam o bordo em um ponto base s_0. As classes de homotopia de tais aplicações

$$(M, \partial M) \to (S^p, s_0)$$

estão em correspondência um-a-um com as classes de cobordismo de subvariedades *framed* de codimensão p

$$N \subset \text{Interior}(M).$$

Se $p \geq 1/(2m+1)$, então a este conjunto de classes de homotopia pode ser dado a estrutura de um grupo abeliano, chamado o p-ésimo grupo de cohomotopia $\pi^p(M, \partial M)$. A operação de composição em $\pi^p(M, \partial M)$ corresponde a operação união para subvariedades *framed* disjuntas de Interior(M).

1.2.1 O Teorema de Hopf

Como mencionamos anteriormente a construção de Pontryagin é uma generalização do do estudo do grau de uma aplicação, que é definido quando as variedades M e M' são orientadas e têm a mesma dimensão.

Como um exemplo, seja M uma variedade conexa e orientada de dimensão $m = p$. Uma subvariedade *framed* de codimensão p é apenas um conjunto finito de pontos com uma base escolhida em cada um dada por $sgn(x)$ igual a $+1$ ou -1 que determina a orientação positiva ou negativa. Então $\sum sgn(x)$ é claramente igual ao grau da aplicação associada $M \to S^m$. Mas não é difícil ver que a classe de cobordismo *framed* da 0-variedade é unicamente determinada por $\sum sgn(x)$.

Assim, temos um caso particular do Teorema 1.2.3.

Teorema 1.2.7. *(Teorema de Hopf): Se M é conexa, orientada e sem bordo, então duas aplicações $M \to S^m$ são suavemente homotópicas se, e somente se, elas tem o mesmo* *grau.*

Por outro lado, suponha que M não é orientável. Então dada uma base para TM_x podemos deslizar x ao redor de M em um laço fechado para que transforme a dada base em uma orientação oposta. Assim:

Teorema 1.2.8. *Se M é conexa mas não orientável, então duas aplicações são homotópicas se, e somente se, elas tem o mesmo grau mod 2.*

A teoria de cobordismo *framed* foi introduzida por Pontryagin a fim de estudar classes de aplicações
$$S^m \to S^p$$
com $m > p$. Por exemplo, se $m = p + 1 \geq 4$, existem precisamente duas classes de homotopia de aplicações $S^m \to S^p$. Pontryagin provou este resultado classificando 1-variedades *framed* em S^m. Com mais dificuldade ele mostrou que existem apenas duas classes de homotopia também no caso $m = p + 2 \geq 4$, usando 2-variedades *framed*. Contudo, para $m - p > 2$ isto se torna um problema ainda mais difícil.

Tem sido fácil enumerar classes de homotopia de aplicações por métodos algébricos bem diferentes. Porém, a construção de Pontryagin é uma ferramenta que nos permite traduzir informações sobre variedades em teoria de homotopia e vice-versa. Alguns dos trabalhos importantes na topologia moderna vieram da interligação destas duas teorias, como, por exemplo, o trabalho de cobordismo de René Thom.

1.2.2 Teoria de Thom-Pontryagin

Esta seção está baseada na exposição de Bredon em [1].

O diagrama abaixo ilustra as conexões do desenvolvimento da seção para a obtenção da construção de Thom-Pontryagin.

$$\left\{\text{Aplicações } S^{n+k} \to S^n\right\} \longrightarrow \{\text{Variedades } \textit{Fattened}\} \longrightarrow \{\text{Variedades } \textit{Framed}\}$$
$$\text{Construção de Thom-Pontryagin}$$

Investigaremos as classes de homotopia de aplicações $f : S^{n+k} \to S^n$. O termo *pontuado* significa que fixamos um ponto base em cada espaço e consideramos apenas as aplicações e homotopias que levam o ponto base em ponto base. Este conjunto de classes de homotopia é chamado o $(n+k)$-*ésimo grupo de homotopia* de S^n e é denotado por $\pi_{n+k}(S^n)$. A estrutura de grupo será definida abaixo.

Compondo uma aplicação pontuada $f : S^{n+k} \to S^n$ com o final de uma deformação de S^n que colapsa um disco sobre o ponto base ao ponto base, vemos que, a menos de homotopia, podemos assumir que f leva uma vizinhança do ponto base de S^{n+k} ao ponto base de S^n, e isto ocorre também com homotopia de tais aplicações.

Então removendo o ponto base de S^{n+k}, podemos estudar, na verdade, aplicações e homotopias $\mathbb{R}^{n+k} \to S^n$ que são constantes no ponto base fora de algum subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{n+k}$. Pelo *Teorema da Aproximação Suave* podemos também restringir nossa atenção a aplicações suaves $\mathbb{R}^{n+k} \to S^n$ e homotopias suaves.

Por conveniência na notação consideraremos S^n como compactificação por um ponto $\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ do espaço euclidiano. Será feito uso de algumas construções de S^n que não são suaves no ∞, mas isto não terá efeito sobre nossos argumentos. Por exemplo, uma translação de $\mathbb{R}^n$ se estende a $\mathbb{R}^n_+$ e é suave exceto em ∞.

Suponha dada uma aplicação suave $f : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n_+$ como acima, então existe um valor regular $p \in \mathbb{R}^n$. Compondo f com uma translação em $\mathbb{R}^n$ (que é, naturalmente, homotópica a identidade como uma aplicação de $\mathbb{R}^n_+$ em $\mathbb{R}^n_+$) podemos assumir que p é a origem $0 \in \mathbb{R}^n$. Pelo Teorema 11.6 [1, página 94] existe um disco E^n sobre 0 em $\mathbb{R}^n$ e um mergulho $M^k \times E^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ sobre uma vizinhança aberta, N, de M^k e cuja inversa $N \to M^k \times E^n$ é $r \times f$ onde $r : N \to M^k$ é a retração normal e $M^k = f^{-1}\{0\}$. Por uma outra homotopia de f podemos e será assumido que E^n é o disco aberto unitário em $\mathbb{R}^n$ centrado na origem. Nesta seção, referimos a um tal mergulho $g : M^k \times E^n \to \mathbb{R}^{n+k}$, M^k compacto, como uma k-*variedade fattened* .

Podemos agora compor f com uma deformação suave de $\mathbb{R}^n_+$ começando na identidade e terminando com uma aplicação $\theta : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ que leva E^n difeomorficamente sobre $\mathbb{R}^n$ e tudo mais no ∞. Por exemplo, a homotopia

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} x/(1-||x||^2t^2)^{1/2} & \text{para } ||x|| < 1/t, \\ \infty & \text{para } ||x|| \geq 1/t, \end{cases}$$

faz isto.

Com esta aplicação, $\theta(x) = x/(1-||x||^2)^{1/2}$para $||x|| < 1$. Então a composição $\theta\circ f \simeq f$ pode ser descrita como uma aplicação levando $N \approx M^k \times E^n \to E^n$ pela projeção seguida pelo difeomorfismo $E^n \stackrel{\approx}{\to} \mathbb{R}^n$ (a restrição de θ) e levando tudo mais no ∞ (Ver Figura 1.13).

Portanto toda k-variedade *fattened* $g : M^k \times E^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ dá origem a uma aplicação $\phi_g : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n_+$ desta forma, e toda aplicação $\mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n_+$, como acima, é homotópica a uma aplicação surgindo desta maneira.

Vamos agora construir um cobordismo entre variedades *fattened*. Para isso, precisaremos encontrar uma variedade *fattened* em todos os níveis de um intervalo I. Vejamos a construção.

Suponha agora que são dadas duas k-variedades *fattened* $g_0 : M_0^k \times E^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ e $g_1 : M_1^k \times E^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ e que as aplicações associadas são homotópicas: $\phi_{g_0} \simeq \phi_{g_0}$ via a homotopia $F : \mathbb{R}^{n+k} \times I \to \mathbb{R}^n_+$.

Compondo F com uma aplicação $1 \times \psi : \mathbb{R}^{n+k} \times I \to \mathbb{R}^{n+k} \times I$ onde $\psi(t) = 0$ para t próximo de 0 e $\psi(t) = 1$ para t próximo de 1, podemos assumir que F é uma homotopia constante próximo aos dois finais. Também, naturalmente, podemos supor F suave fora de $F^{-1}(\infty)$.

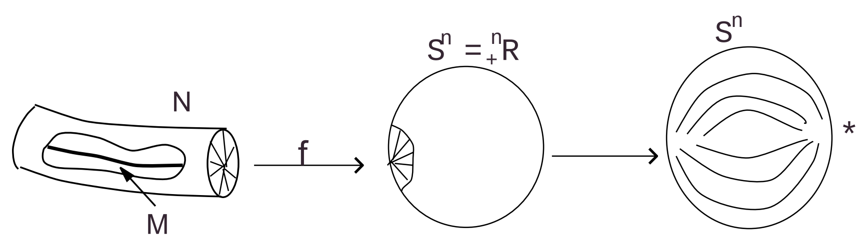

Figura 1.13: Construção de Thom-Pontryagin

Seja $q \in \mathbb{R}^n$ um valor regular de F e coloque $V^{k+1} = F^{-1}(\{q\})$. Então existe um disco aberto D^n sobre q e um mergulho $V^{k+1} \times D^n \to \mathbb{R}^{n+k} \times I$ sobre uma vizinhança W de V e cuja inversa é $r \times F : W \to V^{k+1} \times D^n$, r sendo a retração normal. Também, em $\mathbb{R}^{n+k} \times [0, \varepsilon]$ para algum $\varepsilon > 0$, esta variedade *fattened* V^{k+1} tem a forma da composição

$$M_0^k \times D^n \times [0, \varepsilon] \hookrightarrow M_0^k \times \mathbb{R}^n \times [0, \varepsilon] \stackrel{\approx}{\to} M_0^k \times E^n \times [0, \varepsilon] \xrightarrow{g_0 \times 1} \mathbb{R}^{n+k} \times [0, \varepsilon]$$

e analogamente no outro final. A primeira inclusão pode ser substituída por uma isotopia (um nível preservando mergulho $M_0^k \times D^n \times [0, \varepsilon] \hookrightarrow M_0^k \times \mathbb{R}^n \times [0, \varepsilon]$) que primeiro translada D^n a origem, então o ajusta ao disco unitário E^n e então o estende a uma aplicação sobre $\mathbb{R}^n$ (essencialmente a aplicação Φ acima com uma modificação da parametrização para torná-la constante próximo aos finais). No final disto conseguimos o difeomorfismo $M_0^k \times D^n \overset{\approx}{\to} M_0^k \times \mathbb{R}^n \overset{\approx}{\to} M_0^k \times E^n$. Podemos usar a inversa disto para reparametrizar a variedade *fattened* V^{k+1} para dar uma variedade fattened $G : V^{k+1} \times E^n \to \mathbb{R}^{n+k} \times I$ que coincide com g_0 próximo a $\mathbb{R}^{n+k} \times \{0\}$ e com g_1 próximo a $\mathbb{R}^{n+k} \times \{1\}$. Isto é chamado um *cobordismo* de variedades *fattened* em $\mathbb{R}^{n+k}$ (ver Figura 1.14). Como o cobordismo é tomado de forma a ser constante próximo aos finais, a relação descrita é uma relação de equivalência entre k-variedades *fattened* em $\mathbb{R}^{n+k}$.

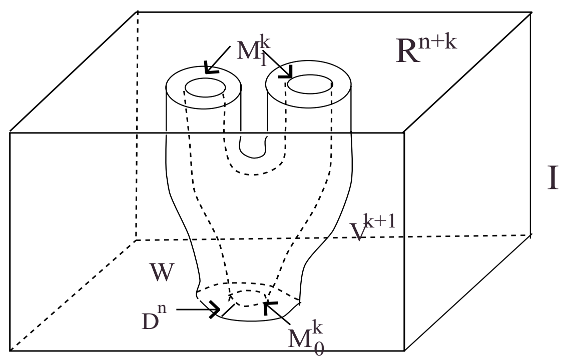

Figura 1.14: Um cobordismo de variedades *fattened*

Reciprocamente, um tal cobordismo de variedades *fattened* determina uma homotopia entre as aplicações $\mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n_+$ com os finais do cobordismo. Assim, temos uma correspondência 1-1 entre classes de homotopia pontuada de aplicações $S^{n+k} \to S^n$ e classes de cobordismo de k-variedades *fattened* $M^k \times E^n \to \mathbb{R}^{n+k}$. Isto está próximo do que queremos.

Uma variedade *fattened* $M^k \times E^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ (ou $V^{k+1} \times E^n \to \mathbb{R}^{n+k} \times I$) determina um campo normal de n-*frames* (significando aqui, independente do espaço tangente) sobre M^k tomando as diferenciais nos pontos $x \in M^k \subset \mathbb{R}^{n+k}$ do eixo de coordenadas em $\{x\} \times E^n$. (Um n-frame é um conjunto de n vetores independentes. Não assumimos nesta construção que eles são ortogonais.) Assim, temos uma *variedade framed* $M^k \subset \mathbb{R}^{n+k}$. Analogamente, a variedade *fattened* V^{k+1} dá um campo de n-frames normais a $V^{k+1} \subset \mathbb{R}^{n+k} \times I$, e isto é um *cobordismo framed*.

Reciprocamente, dada uma variedade *framed* (compacta) $M^k \subset \mathbb{R}^{n+k}$, podemos construir um *fattening* de M^k como segue. Seja $\xi_1, \cdots, \xi_n$ campos de vetores em $\mathbb{R}^{n+k}$ definido sobre M^k e formando um conjunto independente de n-vetores normais em cada ponto de M^k. Então defina aplicação

$$\tau : M^k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k} \quad \text{por}$$

$$\tau(x, t_1, \cdots, t_n) = x + t_1\xi_1(x) + \cdots + t_n\xi_n(x).$$

Em qualquer ponto de M^k, a diferencial de τ é claramente sobre e assim, por um argumento análogo a prova do Teorema 11.4,[1, página 93], existe um $\varepsilon > 0$ tal que τ leva $M^k \times B_\varepsilon(0)$ difeomorficamente sobre uma vizinhança de M^k em $\mathbb{R}^{n+k}$. Compondo com um difeomorfismo $E^n \to B_\varepsilon(0)$ que é a identidade próximo a 0, conseguimos um fattening $M^k \times E^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ de M^k em nosso contexto, e sua diferencial resgata o n-frame original sobre M^k.

Quase provamos que existe uma correspondência 1-1 entre $\pi_{n+k}(S^n)$ e as classes de cobordismo *framed* de k-variedades *framed* M^k em $\mathbb{R}^{n+k}$. O que resta provar é que começando com um *fattening*, passamos ao *framing* induzido, e pela construção acima, para um *fattening*, que é cobordante ao original.

Por um difeomorfismo de R^n com E^n que é a identidade próxima a origem, ou que tenha pelo menos a identidade como diferencial, podemos substituir E^n por R^n na definição de *fattening*.

Definição 1.2.9. Seja ϕ, $\psi : M^k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ dois fattenings da mesma variedade M^k, isto é, $\phi(x, 0) = \psi(x, 0)$ para todo x. Então uma *isotopia* entre eles é um mergulho

$$\Theta : M^k \times \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^{n+k} \times I \quad \text{tal que}$$

$\Theta(x, y, t) \in \mathbb{R}^{n+k} \times \{t\}$, $\Theta(x, 0, t)$ é constante em t, e $\Theta(x, y, 0) = (\phi(x, y), 0)$, e $\Theta(x, y, 1) = (\psi(x, y), 1)$.

Muitas vezes uma isotopia é denotada por $\theta_t(x, y) : M^k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ onde $\Theta(x, y, t) = (\theta_t(x, y), t)$.

Uma isotopia pode ser assumida como sendo constante próximo aos finais, isto é, θ_t é constante para t próximo a 0 e próximo a 1. Então é claro que isotopia é uma relação de equivalência e isto implica cobordismo de fattenings. Assim temos:

Lema 1.2.10. *Se ϕ, $\psi : M^k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ dois fattenings da mesma variedade compacta M^k e se eles induzem o mesmo framing de M^k então eles são isotópicos.*

A estrutura de grupo sobre $\pi_{n+k}(S^n)$ é definida como segue. Use um ponto base que está no equador de S^{n+k}. Se colapsamos o equador a um ponto, conseguimos uma aplicação $\gamma : S^{n+k} \to S^{n+k} \vee S^{n+k}$. Se temos aplicações pontuadas $f, g : S^{n+k} \to S^n$ então podemos colocar f sobre o primeiro fator de $S^{n+k} \vee S^{n+k}$ e g sobre o segundo para conseguir uma aplicação $S^{n+k} \vee S^{n+k} \to S^n$. Compondo isto com γ obtemos uma nova aplicação $S^{n+k} \to S^n$ chamada $f * g$. Se usamos $[f]$ para denotar a classe de homotopia de f então definimos $[f] + [g] = [f * g]$. Esta construção dá origem a uma estrutura de grupo.

Olhando a imagem inversa de um valor regular (assumindo f e g suaves) é claro que a correspondente operação sobre classes de cobordismo *framed* de k-variedades *framed* em $\mathbb{R}^{n+k}$ é como segue. Dada duas k-variedades *framed* M^k e N^k, translade M^k em $\mathbb{R}^{n+k}$ até que fique no semi-espaço inferior (com respeito a última coordenada, mas isto realmente não importa), e translade N^k ao semi-espaço superior. Então M^k e N^k juntos formam uma k-variedade *framed* em $\mathbb{R}^{n+k}$, que será denotada aqui por $M^k * N^k$. Se $[M^k]$ denota a classe de cobordismo *framed* de N^k. Se $[M^k]$ denota a classe de cobordismo *framed* de M^k então seja $[M^k] + [N^k] = [M^k * N^k]$. Não é difícil ver que esta definição dá estrutura de grupo abeliano. O elemento identidade é a classe de cobordismo vazia e o inverso é a classe da imagem refletida de uma k-variedade *framed*. Desta forma definimos o *grupo de classes de cobordismo* de k-variedades *framed* em $\mathbb{R}^{n+k}$.

Assim temos:

Teorema 1.2.11. *(Thom-Pontryagin) A construção acima dá um isomorfismo de $\pi_{n+k}(S^n)$ com o grupo de classes de cobordismo* framed *de k-variedades* framed *em $\mathbb{R}^{n+k}$.*

Agora olharemos para o caso especial $k = 0$ de aplicações $S^n \to S^n$. Pelo Teorema de Thom-Pontryagin $\pi_n(S^n)$ é isomorfo ao grupo das classes de cobordismo *framed* de 0-variedades *framed* em $\mathbb{R}^n$. Uma 0-variedade (compacta) é apenas um conjunto finito de pontos. O *framing* em cada ponto pode ser assumido ortonormal pelo processo de Gram-Schmidt, que produz um novo *frame* homotópico ao original e portanto é um cobordismo *framed* das respectivas 0-variedades. Também um *frame* pode ser levado a um outro frame cujo primeiro vetor coincide com o primeiro vetor canônico de $\mathbb{R}^n$, e então uma rotação no complemento ortogonal do primeiro vetor pode mudar o segundo para coincidir com o segundo da base canônica de vetores de $\mathbb{R}^n$, se $n > 2$ (Isto é possível, pois o grupo ortogonal especial $SO(n)$ é conexo e transitivo sobre a esfera S^{n-1} se $n > 1$). Podemos continuar este processo até chegar no último vetor e terminará já que $SO(1)$ é não transitivo sobre a 0-esfera. Desta forma todos os vetores, exceto o último, estão na posição canônica. O último está na posição canônica ou na direção oposta do n-ésimo vetor canônico. Podemos distinguir estes casos simplesmente pelo sinal do determinante da matriz composta de vetores colunas iguais ao frame original, expressado na base canônica. Assim, podemos substituir o frame pelo sinal ± 1, e ainda temos a correspondência. Mais ainda, podemos cancelar dois sinais opostos por um cobordismo que é um arco entre dois tais pontos em $t = 0$, e vazio em $t = 1$. Outros pontos ficam constantes durante o cobordismo. Assim, somando os sinais obtemos um inteiro, e este inteiro é um invariante completo para $\pi_n(S^n)$. Este inteiro é conhecido como o grau da aplicação $f : S^n \to S^n$ cuja a classe de homotopia está em questão. Assim temos:

Corolário 1.2.12. *(Hopf) Existe um isomorfismo $\pi_n(S^n) \approx \mathbb{Z}$ que leva uma classe de homotopia $[f]$ ao grau de f.*

Corolário 1.2.13. *(Hopf) Uma aplicação $f : S^n \to S^n$ de grau 0 é homotópica a uma constante.*

O grau de uma tal aplicação suave é determinado tomando um valor regular $p \in S^n$ e adicionando os sinais dos Jacobianos de f nos pontos (em número finito) de $f^{-1}(p)$.

O método de Pontryagin e Thom foi originalmente concebido como uma aproximação para o cálculo de grupos de homotopia de esferas. Os grupos $\pi_{n+1}(S^n)$ são calculados facilmente já que eles correspondem a 1-variedades *framed* e 1-variedades são bem conhecidas. Os grupos $\pi_{n+2}(S^n)$ são calculados por este método já que 2-variedades são bem conhecidas. Neste caso, contudo, a derivação de $\pi_{n+2}(S^n)$ é bem difícil. Na verdade, Pontryagin originalmente enunciou que $\pi_{n+2}(S^n)$ é trivial; aparentemente porque ele não percebeu que faltava um framing sobre o toro. Ele corrigiu isto eventualmente. Com grande dificuldade, o método foi estendido para calcular $\pi_{n+3}(S^n)$. Para codimensões mais altas, as dificuldades tornam-se muito grandes. Outros métodos algébricos foram encontrados para o cálculo de $\pi_{n+k}(S^n)$ e muitos cálculos foram feitos, mas a solução do problema completo está ainda para ser encontrada. Estes resultados sobre grupos de homotopia podem ser usados, através da construção de Thom-Pontryagin, para obter informações sobre variedades.

Embora tenhamos restringido nossa atenção à aplicações de $\mathbb{R}^{n+k}$ para S^n, o único lugar em que este fato foi na definição da estrutura de grupo em $\pi_{n+k}(S^n)$. Fizemos isto principalmente para simplificar o argumento. Não existe dificuldade em generalizar os resultados para aplicá-los a variedades compactas. O desfecho da generalização é o seguinte:

Teorema 1.2.14. *Se M^{n+k} é uma variedade suave compacta, então a construção de Thom-Pontryagin dá uma correspondência entre o conjunto $[M^{n+k}; S^n]$ de classes de homotopia de aplicações $M^{n+k} \to S^n$ e o conjunto de classes de cobordismo* framed *e suaves de k-subvariedades normalmente* framed*, compactas e suaves de M^{n+k}.*

Retornando a aplicações suaves $f : S^{n+k} \to S^n$, note que existe uma suspensão óbvia de f para uma aplicação $\Sigma f : S^{n+k+1} \to S^{n+1}$ induzida de $f \times 1 : S^{n+k} \times I \to S^n \times I$ passando aos espaços quocientes S^{n+k+1} de $S^{n+k} \times I$ e S^{n+1} de $S^n \times I$ e identificando os finais dos cilindros a pontos. Isto não é suave nos polos, mas tem um valor regular sobre o equador e assim pode ser suavizado sem mudar o valor regular.

No ponto de vista da construção de Thom-Pontryagin é claro que a operação correspondente (no mínimo a menos de sinal) é dada considerando uma dada k-variedade *framed* M^k em $\mathbb{R}^{n+k}$ que se situa em $\mathbb{R}^{n+k} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+k+1}$ e adicionando o novo vetor coordenada ao frame em cada ponto. Então isto define um homomorfismo

$$\Sigma : \pi_{n+k}(S^n) \to \pi_{n+k+1}(S^{n+1})$$

Teorema 1.2.15. *(Freudenthal) Para $n \geq 1$, o homomorfismo suspensão*

$$\Sigma : \pi_{n+k}(S^n) \to \pi_{n+k+1}(S^{n+1})$$

é um isomorfismo para $n > k+1$ e um epimorfismo para $n = k+1$.

Observação 1.2.16. Note que isto implica que $\Sigma : \pi_1(S^1) \to \pi_2(S^2)$ é sobre e que $\pi_2(S^2) \to \pi_3(S^3) \to \cdots$ são todos isomorfismos.

1.3 Teoria do Índice de Conley

Para maiores detalhes sobre as seções 1.3.1, 1.3.2 e 1.3.4 ver [7].

1.3.1 Sistemas Simples Conexos

Um *sistema simples conexo* é uma subcategoria da categoria de espaços pontuados e classes de homotopia de aplicações entre estes com a propriedade adicional que para quaisquer dois objetos existe um único morfismo entre estes (em cada direção). Mais precisamente, temos a seguinte definição.

Definição 1.3.1. Um *sistema simples conexo* consiste de uma coleção I_0 de espaços pontuados juntamente com uma coleção I_m de classes de homotopia de aplicações entre estes tal que

1. $hom(X, \overline{X}) = \{[f] \in [X, \overline{X}] | [f] \in I_m\}$ é não vazio e consiste de um único elemento para cada par ordenado X, $\overline{X}$ de espaços em I_0,

2. se X, $\overline{X}$, $\overline{\overline{X}} \in I_0$ e $[f] \in hom(X, \overline{X})$, $[\overline{f}] \in hom(\overline{X}, \overline{\overline{X}})$, então $[\overline{f} \circ f] \in hom(X, \overline{\overline{X}})$,

3. $hom(X, X) = \{[1_X]\}$, para todo $X \in I_0$.

Note que cada morfismo em um sistema simples conexo é necessariamente a classe de homotopia de uma equivalência de homotopia.

Morfismos entre sistemas simples conexos são definidos como segue.

Definição 1.3.2. Um *morfismo* $\phi : I \to J$ entre sistemas simples conexos $I = (I_0, I_m)$ e $J = (J_0, J_m)$ é uma coleção de classes de homotopia de aplicações entre espaços em I_0 e espaços em J_0 tal que

(i) para todo $X \in I_0$ e todo $Y \in J_0$ o conjunto $\phi(X, Y) = \{[\varphi] \in [X; Y] | [\varphi] \in \phi\}$ é não vazio e consiste de um único elemento,

(ii) se X, $\overline{X} \in I_0$ e Y, $\overline{Y} \in J_0$ e se $[\varphi] \in \phi(X, Y)$, $[f] \in hom(\overline{X}, X)$, $[g] \in hom(Y, \overline{Y})$, então $[g \circ \varphi \circ f] \in \phi(\overline{X}, \overline{Y})$.

Naturalmente, qualquer aplicação única $\varphi : X \to Y$, $X \in I_0$, $Y \in J_0$, induz um morfismo entre o sistema simples conexo I e J via propriedade (ii) na definição acima.

Se um morfismo $\phi : I \to J$ consiste de equivalências de homotopia, então a homotopia inversa destas aplicações induzem um morfismo $\phi^{-1} : J \to I$. Também temos que o funtor suspensão Σ associado com qualquer sistema simples conexo $I = (I_0, I_m)$, $\Sigma I = (\Sigma I_0, \Sigma I_m)$ é definido por

$$\Sigma I_0 = \{\Sigma X | X \in I_0\},$$

$$\Sigma I_m = \{[\Sigma f] | [f] \in I_m\}.$$

Definição 1.3.3. Uma *seqüência de cofibrações de sistemas simples conexos* é uma tripla de aplicações $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Z \xrightarrow{\delta} \Sigma X$ com $X, Y, Z \in Ob(\mathcal{CS})$ com a propriedade que existem $X_0 \in Ob(X)$, $Y_0 \in Ob(Y)$, $Z_0 \in Ob(Z)$, uma seqüência de cofibração $X_0 \xrightarrow{i_0} Y_0 \xrightarrow{p_0} Z_0$ com $[i_0] = i$, $[p_0] = p$ e se $\delta_1 : Z_0 \to \Sigma X_0$ é a conexão óbvia, então $\delta = [\delta_1]$. A aplicação δ é chamada a aplicação de conexão da seqüência de cofibração. A seqüência de cofibração $X_0 \xrightarrow{i_0} Y_0 \xrightarrow{p_0} Z_0$ é chamada uma seqüência de cofibração representativa.

1.3.2 Atrator-repulsor

Seja X um espaço topológico Hausdorff.

Definição 1.3.4. O *subconjunto invariante maximal* de um conjunto $N \subset X$ é dado por

$$\mathrm{Inv}(N) = \{x \in N \,|\gamma(x,t) \in N, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}.$$

Proposição 1.3.5. *Seja $\gamma : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fluxo contínuo e $-\gamma$ seu fluxo inverso. Então* $\mathrm{Inv}(N, \gamma) = \mathrm{Inv}(N, -\gamma)$.

Dado $Y \subset X$, associado a Y definimos dois subconjuntos de X:

$$\omega(Y) = \mathrm{Inv}(\mathrm{cl}(\gamma(Y, [0, \infty)))),$$

$$\omega^*(Y) = \mathrm{Inv}(\mathrm{cl}(\gamma(Y, (-\infty, 0]))).$$

O subconjunto $\omega(Y)$ é chamado ω-limite de Y e $\omega^*(Y)$, ω^*-limite de Y.

É fácil ver que

(i) $A \subset B \Rightarrow \omega(A) \subset \omega(B)$,

(ii) $\omega(x) = \omega(\gamma(x, t))$.

Proposição 1.3.6. *Consideremos $\gamma : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fluxo contínuo e $-\gamma$ seu fluxo inverso. Se $Y \subset X$, então*

$$\omega_\gamma(Y) = \omega^*_{-\gamma}(Y),$$
$$\omega^*_\gamma(Y) = \omega_{-\gamma}(Y).$$

Proposição 1.3.7. *Seja $Y \subset X$ e $\gamma : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fluxo contínuo. Então*

$$\omega(Y) = \bigcap_{t>0} \mathrm{cl}(\gamma(Y, [t, \infty))),$$
$$\omega^*(Y) = \bigcap_{t>0} \mathrm{cl}(\gamma(Y, (-\infty, -t])),\ t \in \mathbb{R}.$$

Um conjunto invariante compacto $A \subset S$ é dito um *atrator* em S se existe uma vizinhança U de A em S tal que $A = \omega(U)$. Um conjunto invariante compacto $A^* \subset S$ é dito um *repulsor* em S se existe uma vizinhança U de A^* em S tal que $A^* = \omega^*(U)$.

O seguinte lema dá uma caracterização muito útil de atratores.

Lema 1.3.8. *Seja $S \subset X$ um conjunto invariante compacto. Então um conjunto invariante compacto $A \subset S$ é um atrator em S se, e somente se, existe uma vizinhança U de A em S tal que $\gamma(x, (-\infty, 0]) \not\subset U$, para todo $x \in U - A$.*

Definição 1.3.9. Seja $\chi \subset X$ um fluxo local e seja $S \subset \chi$ um conjunto invariante compacto. Então S é dito um *conjunto invariante isolado* se existe uma vizinhança compacta N de S em χ tal que $S = \mathrm{Inv}(N)$. Neste caso N é chamada vizinhança isolante (para S em χ).

1.3.3 Existência do Par-Índice

O conceito de um par-índice representa um papel decisivo na definição do Índice de Conley para conjuntos invariantes isolados. Para a introdução deste conceito precisamos da noção de invariância positiva.

Seja N um subconjunto compacto de um fluxo local $\chi \subset X$. Então um subconjunto $K \subset N$ é dito *positivamente invariante* em N se $\gamma \in K$, $t \geq 0$, $\gamma(x, [0, t]) \subset N \Rightarrow \gamma(x, t) \in K$.

Definição 1.3.10. Seja $\chi \subset X$ um fluxo local e seja $S \subset X$ um conjunto invariante isolado. Então um par (N_1, N_0) de conjuntos compactos em X é dito um *par-índice* para S em X se $N_0 \subset N_1$ e

(i) $N_1 \setminus N_0$ é uma vizinhança de S em X e $S = \mathrm{Inv}(\mathrm{cl}(N_1 \setminus N_0))$,

(ii) N_0 é positivamente invariante em N_1, isto é, $\gamma \in N_0,\ t \geq 0,\ \gamma(x,[0,t]) \subset N_1 \Rightarrow \gamma(x,t) \in N_0$,

(iii) se $\gamma \in N_1$ e $\gamma(x,[0,\infty)) \not\subset N_1$, então existe um $t \geq 0$ com $\gamma(x,[0,t]) \subset N_1$ e $\gamma(x,t) \in N_0$.

A propriedade (iii) de um par-índice (N_1, N_0) diz que toda órbita que parte de N_1 tem que sair pelo *conjunto de saída* N_0.

Teorema 1.3.11. *(Existência de Par-Índice) Seja $\chi \subset X$ um fluxo métrico local, seja $N \subset \chi$ uma vizinhança isolante do conjunto invariante isolado $S \subset \chi$ e seja U qualquer vizinhança de S em X. Então existe um par-índice (N_1, N_0) para S em χ tal que N_1 e N_0 são positivamente invariantes em N e $\mathrm{cl}(N_1 \setminus N_0) \subset U$.*

Seja S um conjunto invariante isolado no fluxo local métrico $\chi \subset X$, seja A um atrator em S e seja A^* um repulsor complementar. Então que existe uma filtração $N_0 \subset N_1 \subset N_2$ de conjuntos compactos em X tais que (N_2, N_0) é um par-índice para S, (N_1, N_0) é um par-índice para A e (N_2, N_1) é um par-índice para A e (N_2, N_1) é um par-índice para A^*. Chamaremos de $(S; A, A^*)$ uma decomposição atratora-repulsora.

Definição 1.3.12. Seja $\chi \subset X$ um fluxo local métrico e seja S um conjunto invariante isolado em X. Então o tipo homotópico $h(S) = [N_1/N_0]$ do espaço pontuado N_1/N_0, (N_1, N_0) um par-índice para S em χ, é dito *índice homotópico* de S em χ.

O *Índice de Conley* de S em χ é o sistema simples conexo $I(S) = I(S, \chi) = (I_0, I_m)$, onde

$$I_0 = \{N_1/N_0 \mid (N_1, N_0) \text{ é um par índice para } S \text{ em } \chi\},$$

$$I_m = \{[f^t] \mid N_1/N_0,\ \overline{N}_1/\overline{N}_0 \ \in I_0 \text{ e}$$
$$f^t : N_1/N_0 \to \overline{N}_1/\overline{N}_0 \text{ é a aplicação definida no Lema 4.7 [7]}\}.$$

Teorema 1.3.13. *Seja $\chi \subset X$ um fluxo local métrico e seja S um conjunto invariante isolado em χ. Então $h(S)$ é independente da escolha do par-índice e $I(S, \chi)$ é um sistema simples conexo.*

1.3.4 O Índice de Thom

Seja $\xi : F \to E \to B$ (F=fibra, E=espaço total, B= espaço base)um fibrado vetorial, $D(\xi)$ e $S(\xi)$ os fibrados em disco e em esfera, respectivamente.

Definição 1.3.14. Definimos o *espaço de Thom* como o quociente do fibrado em disco pelo fibrado em esfera.
Notação: $Th(\xi) = D(\xi)/S(\xi)$.

Exemplo 1.3.15. Considere $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ e sejam ξ o fibrado normal de $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, $D^\xi(S^1) = S^1 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ (espaço total do fibrado em disco associado a ξ) e $S^\xi(S^1) = S^1 \times \{-\varepsilon, \varepsilon\}$ (espaço total do fibrado em esfera associado a ξ).

Temos que o espaço de Thom é $T^\xi(S^1) \approx S^1 \vee S^2$.

Observe a Figura 1.15.

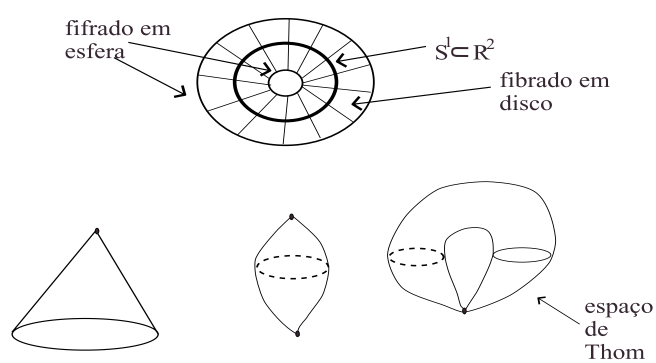

Figura 1.15: Passos para obtenção do espaço de Thom.

Note que o espaço de Thom representado na Figura 1.15 tem o mesmo tipo de homotopia que $S^1 \vee S^2$.

É interessante também observar que apesar de $S(\xi)$ estar contido em $D(\xi)$, $D(\xi)$ tem o mesmo tipo de homotopia que um subespaço contido em $S(\xi)$.

Consideremos agora uma fibração localmente trivial $\psi : F \to E \xrightarrow{p} B$, onde F é compacta.

Considere um fluxo γ em B. Seja S um conjunto invariante para γ e (N_1, N_0) par-índice para a$S \subset B$.

Tome $N_1' = p^{-1}(N_1)$, $N_0' = p^{-1}(N_0)$ e $S' = p^{-1}(S)$. Temos que S' é conjunto invariante para γ' e (N_1', N_0') é par-índice para S' [3].

Observe que como (N_1, N_0) é par-índice para S, temos que $N_0 \subset N_1$, então podemos construir a seqüência de cofibração

$$N_0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_1/N_0$$

onde o tipo de homotopia de N_1/N_0 dá o índice homotópico de S com respeito a γ. Analogamente para (N_1', N_0').

Observe o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
N_0' \arrow[r] \arrow[d] & N_1' \arrow[r] \arrow[d] & N_1'/N_0' \arrow[d] \\
N_0 \arrow[r] \arrow[d] & N_1 \arrow[r] \arrow[d] & N_1/N_0 \arrow[d] \\
N_0/N_0' \arrow[r] & N_1/N_1' \arrow[r] & \frac{N_1/N_0}{N_1'/N_0'}
\end{tikzcd}$$

Agora, verticalmente temos também seqüências de cofibração (em nível de homotopia), pois sempre podemos tornar qualquer aplicação $f : A \to B$ uma inclusão, substituindo o espaço B por $B \sqcup Cyl(A)$, onde $Cyl(A)$ é o cilindro em A.

Logo, na seqüência vertical à esquerda substituímos o espaço N_0 por $N_0 \sqcup Cyl(N_0')$, que tem o mesmo tipo de homotopia que N_0, e assim temos uma inclusão. Portanto, homotopicamente podemos quocientar N_0/N_0'. Analogamente para as seqüências verticais do meio, e da direita.

Assim, na seqüência vertical da direita substituímos N_1/N_0 por um espaço com o mesmo tipo de homotopia, $N_1/N_0 \cup Cyl(N_1'/N_0')$ e portanto, ainda teremos o índice de Conley de S com respeito a γ.

Dessa mesma maneira, podemos tornar a aplicação $N_1'/N_0' \to N_1/N_0$ uma inclusão e podemos então quocientar $N_1/N_0/N_1'/N_0'$.

Note que nas colunas verticais estamos fazendo algo semelhante ao que fazemos para obter o espaço de Thom, ou seja, estamos quocientando um espaço que tem o mesmo tipo de homotopia que o espaço base pelo espaço total.

Também note que na terceira coluna vertical estamos quocientando o índice de Conley de S com respeito a γ pelo índice de Conley de $S^{'}$ com respeito a $\gamma^{'}$. Assim, temos que $N_1/N_0/N_1^{'}/N_0^{'}$ é o índice de Thom (quociente de dois índices).

Lembremos da Observação 1.1.25 que dada uma seqüência de cofibração $A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{r} C$, se a inclusão j é uma cofibração então o tipo de homotopia do quociente B/A é o mesmo que o de $B \cup_j CA$ (CA é o cone sobre A).

Observe então que como tornamos a aplicação $N_1^{'}/N_0^{'} \to N_1/N_0$ uma inclusão temos que o espaço $N_1/N_0/N_1^{'}/N_0^{'}$ da seqüência de cofibração $N_1^{'}/N_0^{'} \to N_1/N_0 \to N_1/N_0/N_1^{'}/N_0^{'}$ tem o mesmo tipo de homotopia que $N_1/N_0 \cup C(N_1^{'}/N_0^{'})$.

Mais precisamente temos:

Definição 1.3.16. O *índice de Thom* de S com respeito a ψ e γ é o sistema simples conexo $\overline{c}_{\gamma}^{\psi}(S)$ tendo como objetos os espaços $N_1/N_0 \cup C(N_1^{'}/N_0^{'})$ e como morfismos as classes de homotopia das aplicações $N_1/N_0 \cup C(N_1^{'}/N_0^{'}) \to K_1/K_0 \cup C(K_1^{'}/K_0^{'})$ induzido pelas aplicações de comparação padrão.

Capítulo 2

Resultados de Franks

2.1 Resultados básicos

Seja M^n uma variedade compacta suave e seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave. Se $\partial M \neq \emptyset$ assumimos que a função é constante e regular sobre ∂M. Assumimos também que uma métrica riemannian é fixada sobre M e denotamos por $\gamma : M \times \mathbb{R} \to M$ o fluxo induzido por $-\nabla f$. Um ponto crítico P de M é não degenerado se $Hess_p(f)$ é uma matriz não degenerada. O índice da forma bilinear induzida é chamado o *índice* de P. O conjunto $W^u(P) = \{x \in M : \lim_{t \to -\infty} \gamma_t(x) = P\}$ é chamada a *variedade instável* de P e $W^s(P) = \{x \in M : \lim_{t \to +\infty} \gamma_t(x) = P\}$ é a *variedade estável* de P. Se P é não-degenerado e de índice p, então $W^s(P) \approx \text{Int}(D^{n-p})$ e $W^u(P) \approx \text{Int}(D^p)$.

Definição 2.1.1. Se P, Q são pontos críticos para um fluxo Morse-Smale diremos que Q é um *sucessor* de P se $W^u(P) \cap W^s(Q) \neq \emptyset$ mas não existe órbita fechada γ satisfazendo $W^u(P) \cap W^s(\gamma) \neq \emptyset$ e $W^u(\gamma) \cap W^s(Q) \neq \emptyset$. Os pontos P e Q serão chamados *sucessivos*.

Seja a um valor regular de f entre $f(P)$ e $f(Q)$ e seja $S^s(Q) = W^s(Q) \cap f^{-1}(a)$ e seja $S^u(P) = W^u(P) \cap f^{-1}(a)$. A condição de Morse-Smale garante que $W^u(P)$ e $W^s(Q)$ se intersectam transversalmente, e portanto, $S^u(P)$ e $S^s(Q)$ também se intersectam transversalmente em uma variedade $Z(P,Q)$. Como $W^s(Q)$ é contrátil seu fibrado normal em M tem um único *framing*. Restringindo isto a $Z(P,Q)$ dá um *framing* do fibrado normal de $Z(P,Q)$ em $S^u(P)$ (por causa da transversalidade de $S^u(P)$ e $S^s(Q)$). Pela sua definição é claro que a variedade *framed* $Z(P,Q)$ é uma seção transversal para aquelas órbitas em $W^u(P) \cap W^s(Q)$. Usando o fluxo é fácil mostrar que a menos de difeomorfismo a variedade *framed* $Z(P, Q)$ é independente da escolha de f.

Definição 2.1.2. Se P, Q são pontos críticos sucessivos para um fluxo Morse-Smale gradiente então a *variedade de conexão* é a variedade *framed* $Z(P, Q)$ dada como acima pela intersecção de $S^u(P)$ e $S^s(Q)$ com o *framing* de $Z(P, Q)$ em $S^u(P)$ obtido restringindo um *framing* de $W^s(Q)$ em M.

Associando um complexo CW a uma função ou fluxo de Morse-Smale precisamos de uma relação de equivalência mais forte do que uma equivalência de homotopia e mais fraca do que homeomorfismo. A idéia é que dois complexos CW devem ser equivalentes se eles podem ser indutivamente construídos pela colagem de células correspondentes com aplicações de colagem homotópicas.

Se e e $e\prime$ são células de um complexo CW Y, diremos que $e\prime \leq e$ se o fecho de e contém alguma parte do interior de $e\prime$. Se tornarmos esta relação transitiva (e denotarmos a nova relação transitiva também por $\leq$) então obtemos uma ordem parcial sobre as células de Y. Se S é um subconjunto das células de Y com a propriedade que $e \in S$ e $e\prime \leq e$ implica $e\prime \in S$ então a união das células em S formam um subcomplexo de Y. Em particular se e é uma célula de Y definimos a base de e, denotada $Y(e)$, como o menor subcomplexo de Y contendo e. Assim, $Y(e)$ é a união de todas as células $e\prime$ em Y tal que $e\prime \leq e$.

Definição 2.1.3. Dois complexos CW Y e Y' serão chamados *celularmente equivalentes* se existe uma equivalência de homotopia $h : Y \to Y'$ com a propriedade que existe uma correspondência um-a-um entre células de Y e células de Y' tal que se $e \subset Y$ corresponde a $e' \subset Y'$ então h leva $Y(e)$ a $Y'(e')$ e é uma equivalência de homotopia destes subcomplexos.

Teorema 2.1.4. *Se X é um campo de vetores de Morse-Smale gradiente sobre M então existe um complexo CW, Y, único a menos de equivalência de células, e uma equivalência de homotopia $g : M \to Y$ tal que para cada ponto crítico P de índice k, $g(W^u(P))$ está contida na base $Y(e)$ de uma única k-célula e.*

2.2 Teorema da Variedade de Conexão

Vamos agora mostrar a correspondência de uma variedade de conexão com a classe de homotopia de uma aplicação de colagem relativa via construção de Thom-Pontryagin.

Lembremos que a *aplicação de colagem relativa* de uma k-célula e_k para uma j-célula e_j é definida pela composição

$$S^{k-1} = \partial e_k \xrightarrow{\gamma} Y_j \to Y_j/Y_j - \mathrm{int} e_j = S^j$$

onde γ é a aplicação de colagem e_k para o j esqueleto Y_j e a segunda aplicação colapsa $Y_j - \mathrm{int} e_j$ a um ponto.

Teorema 2.2.1. (Teorema da Variedade de Conexão) *Suponha que P e Q são pontos críticos sucessivos de um fluxo de Morse-Smale gradiente e sua variedade conexa é a variedade framed $Z(P,Q) \subset S^u(P) \subset W^u(P)$. Se Y é o complexo CW associado ao fluxo e α é a aplicação de colagem relativa da célula em Y correspondendo a P com a célula correspondendo a Q, a classe de homotopia correspondendo a $Z(P,Q)$ pela construção de Thom-Pontryagin é a mesma que a classe de homotopia de α.*

Demonstração: Como o ponto crítico Q está na forma padrão existem coordenadas $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-k}$ sobre uma vizinhança U de Q tal que o campo de vetores

$$X = \sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum y_i \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Existe uma função Lyapunov f que é uma função de Morse tal que $f(x,y) = k - \sum x_i^2 + \sum y_j^2$ e escolheremos U tal que

$$U = \{(x,y) | -\varepsilon^2 \leq |x|^2 + |y|^2 \leq \varepsilon^2 \text{ e } |x||y| \leq \delta\}$$

para algum ε, $\delta > 0$ pequeno.

Seja $W_0 = f^{-1}([0, k-\varepsilon])$ e $W_1 = f^{-1}([0, k+\varepsilon])$. Então existe uma retração $r : W_1 \to W_0 \cup (\cup_i W^u(Q_i))$ onde $\{Q_i\}$ são os pontos críticos de índice k e $Q = Q_1$. Mais ainda, pela construção de r (ver 3.14 de [10]) se ε,δ são suficientemente pequenos então r restrito a U é dada por $r(x,y) = (x,0)$. Seja $S^u = W^u(P) \cap f^{-1}(k+\varepsilon)$ e seja $S^s = W^s(Q) \cap f^{-1}(k+\varepsilon) \subset U$; então como o fluxo é Morse-Smale S^u e S^s tem uma intersecção transversal $Z(P,Q)$.

Agora pela construção do complexo CW associado Y a aplicação de colagem α é homotópica a composição β

$$S^u \xrightarrow{r} W_0 \cup (\cup_i W^u(Q_i)) \xrightarrow{h} S^k$$

onde h colapsa $W_0 \cup (\cup_{i \neq 1} W^u(Q_i))$ a um ponto e S^k é a compatificação de um ponto do disco $W^u(Q) - W_0$. Como S^u é transversal a S^s, é claro que Q é um valor regular de β, e que $\beta^{-1}(Q) = Z(P,Q)$. Também porque $r(x,y) = (x,0)$ sobre U é claro que o framing de N dado pelo fibrado normal de $W^s(Q)$ é o mesmo que o framing obtido de β. Assim, a variedade de conexão *framed* $Z(P,Q)$ corresponde a classe de homotopia de α via a construção de Thom-Pontryagin. ∎

2.3 Teorema do Fluxo e Fluxo Inverso

Se Q é um sucessor de P para um fluxo de Morse-Smale então naturalmente P é um sucessor de Q para o fluxo inverso. A variedade de conexão para este fluxo é a mesma variedade $Z(P,Q)$ mas com um framing diferente que vem da restrição do fibrado normal de $W^u(P)$ (com respeito ao fluxo original). Em geral estes framings de $Z(P,Q)$ com relação ao fluxo e ao fluxo inverso representam diferentes classes de homotopia; contudo se a variedade M é *estavelmente paralelizável* [1] então as duas classes de homotopia são estavelmente a mesma.

Teorema 2.3.1. (Teorema do Fluxo e Fluxo Inverso) *Se P e Q são pontos críticos sucessivos (nenhum dos quais é uma fonte ou um poço), de um fluxo Morse-Smale sobre uma variedade compacta estavelmente paralelizável M então sua variedade de conexão* framed *e sua variedade de conexão* framed *com relação ao fluxo inverso determina a mesma classe de homotopia estável a menos de sinal.*

[1] variedades que podem ser mergulhadas em alguma esfera de tal forma que elas admitem um *framing* são chamadas *estavelmente paralelizável*.

Demonstração: Se construimos a variedade conexa $Z(P,Q) = S^s(Q) \cap S^{(}P)$ temos o seguinte diagrama comutativo de mergulhos com framings

$$\begin{tikzcd}
 & S^s(Q) \arrow[dr] & & \\
Z(P,Q) \arrow[ur] \arrow[dr] & & M \arrow[r] & S^k \\
 & S^u(P) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

onde k é muito grande. Assim, obtemos um *framing* de $Z(P,Q)$ em S^k cuja classe de homotopia desejamos mostrar que é uma suspensão iterada da classe de homotopia correspondendo a $Z(P,Q)$ *framed* em $S^{(}Q)$ (ou $S^u(P)$). Como nem P ou Q é uma fonte ou um poço a dimensão de $Z(P,Q)$ é menor do que $r = \dim S^s(Q)$. Assim, quaiquer dois framings de $S^s(Q)$ em S^k resultará no mesmo *framing* de $Z(P,Q)$ em S^k (já que as diferenças dos dois framings está representada por um elemento de $\pi_r(SO(k-r))$ que se restringirá trivialmente a $Z(P,Q)$ já que a inclusão de $Z(P,Q)$ em $S^s(Q)$ é null-homotopic). Se k é suficientemente grande então quaisquer dois mergulhos de $S^{(}Q)$ são isotópicos, assim é possível escolher o *framing* de $S^s(Q)$ em S^k de tal forma que $Z(P,Q)$ *framed* em S^k representará a suspensão do elemento representado por $Z(P,Q)$ *framed* em $S^{(}Q)$. Como todas as coisas ditas acima mantém-se igualmente bem com $S^s(Q)$ substituído por $S^u(P)$ o resultado segue. ■

Capítulo 3

Resultados de Cornea

3.1 Estudo comparativo do Teorema do fluxo e fluxo inverso

Nesta seção faremos um estudo comparativo entre os resultados de Franks [5] e Cornea [3].

Seja $\psi : F \to E \xrightarrow{p} B$ a fibração localmente trivial de variedades (possivelmente com bordo) com F e B compactos, e seja γ um fluxo sobre B. Um *levantamento* de γ para E é um fluxo $\gamma\prime$ sobre E tal que $p(\gamma\prime_t(x)) = \gamma_t(p(x))$ para todo $x \in E$ e $t \in \mathbb{R}$.

Lema 3.1.1. *Seja S um conjunto invariante isolado do fluxo $\gamma : B \times \mathbb{R} \to B$ e seja $\gamma\prime$ um levantamento de γ para E. Então, $S' = p^{-1}(S)$ é um conjunto invariante isolado de $\gamma\prime$ e existe um morfismo induzido $c_{\gamma\prime}(S') \to c_\gamma(S)$ dependendo apenas de ψ e γ. Este morfismo é natural com respeito a pares atrator-repulsor.*

Lema 3.1.2. *No contexto do lema anterior e assumindo que $(S; A, A^*)$ é uma decomposição atratora-repulsora, existe uma seqüência de cofibração de sistemas simples conexos:*

$$\overline{c}^\psi_\gamma(A) \to \overline{c}^\psi_\gamma(S) \to \overline{c}^\psi_\gamma(A^*) \to \Sigma\overline{c}^\psi_\gamma(A).$$

Assuma que $(S; A, A^*)$ é uma decomposição atratora-repulsora para o fluxo γ. Lembre que denotamos por $c_\gamma(S; A, A^*)$ a seqüência de cofibração atratora-repulsora associada a esta decomposição. Denotaremos por $\overline{c}^\psi_\gamma(S; A, A^*)$ a seqüência de cofibração dada pelo Lema 3.1.2.

Observação 3.1.3. Note que isto também se aplica ao caso limite quando o espaço total de ψ é vazio. Neste caso, $\overline{c}_\gamma^\psi(S; A, A^*)$ é isomorfa a $c_\gamma(S; A, A^*)$ (lembre que $X/\emptyset$ é a união disjunta de X e um ponto).

Vamos agora discutir um caso particular. Considere um fibrado com fibra Riemaniana $\eta : \mathbb{R}^n \to T \to B$. Como antes seja γ um fluxo sobre B e seja γ'' um levantamento dele em T (de fato, tais levantamentos sempre existem). Assuma que exista uma forma quadrática $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e que existam cartas locais $U_i \subset B$ tal que a restrição de η a cada U_i é trivial e, mais ainda, com respeito a estas trivializações o campo de vetores associados com γ'' se divide como uma soma direta de campos de vetores associados com γ e $-\nabla q$; também assumimos que q é compatível com a métrica.

Existe uma fibração localmente trivial que é associada com este contexto. Considere o fibrado esférico associado $\eta : S(\eta) \xrightarrow{p} B$. Denotamos por $e(q)$ a fibração localmente trivial $e(q) \to B$ cujo espaço total é o subconjunto de $S(\eta)$ onde q é negativo ou nulo e cuja projeção é a restrição de p. Sobre $e(q)$ existe um levantamento óbvio de γ obtido por projetar primeiro γ'' sobre $S(\eta)$ e então pela restrição.

Proposição 3.1.4. *Seja S um conjunto invariante isolado de γ. O índice de Thom $\overline{c}_\gamma^{e(q)}(S)$ é isomorfo a $c_{\gamma''}(S)$ e esta identificação é natural com respeito a pares atrator-repulsor. Mais precisamente, se $(S; A, A^*)$ é uma decomposição atratora-repulsora, então $\overline{c}_\gamma^{e(q)}(S; A, A^*)$ é isomorfo a $c_{\gamma''}(S; A, A^*)$.*

Observação 3.1.5. A proposição implica que o índice de Thom e a correspondente seqüência de cofibração são completamente determinadas pelos dados homotópicos extraídos do fluxo γ''.

Corolário 3.1.6. *No contexto da proposição acima, se η é trivial em uma vizinhança de S, então temos $c_{\gamma''}(S) \simeq \overline{c}_\gamma^{e(q)}(S) \simeq \Sigma^k c_\gamma(S)$ e se $(S; A, A^*)$ é uma decomposição atratora-repulsora, $c_{\gamma''}(S; A, A^*) \simeq \overline{c}_\gamma^{e(q)}(S; A, A^*) \simeq \Sigma^k c_\gamma(S; A, A^*)$ onde k é o índice da forma quadrática q.*

Observação 3.1.7. O corolário acima é bem conhecido em nível de espaço (neste caso sendo uma conseqüência da fómula de produto para o índice de Conley). Para nossas propostas a conseqüência chave deste corolário é a descrição da aplicação de conexão de

γ'' em termos da de γ. Em particular, quando a fibração é trivial elas estão relacionadas por suspensão.

Assuma agora que B é uma variedade compacta, suave de dimensão n que está mergulhada em uma esfera S^{n+k}. Seja $\eta : \mathbb{R}^k \to T \to B$ é seu fibrado normal. Assuma uma métrica Riemaniana fixada sobre o espaço total de η. Seja $S(\eta)$ o fibrado esférico unitário. Lembre que denotamos por $-\gamma$ o fluxo inverso de γ: $-\gamma_t(x) = \gamma_{-t}(x)$.

Teorema 3.1.8. *Seja $(S; A, A^*)$ um par atrator-repulsor de γ. As sequências de cofibração $\overline{c}_\gamma^{S(\eta)}(S; A, A^*)$ e $c_{-\gamma}(S; A, A^*)$ são Spanier-Whitehead duais por uma aplicação de dualidade que depende apenas do mergulho de B em S^{n+k}.*

Corolário 3.1.9. *As duas aplicações de conexão $\overline{\delta} : \overline{c}_\gamma^{S(\eta)}(A^*) \to \Sigma\overline{c}_\gamma^{S(\eta)}(A)$ e $\delta^* : c_{-\gamma}(A) \to \Sigma c_{-\gamma}(A^*)$ são Spanier-Whitehead duais. Em particular, se η é trivial, então δ^* é dual a aplicação de conexão $\delta : c_\gamma(A^*) \to \Sigma c_\gamma(A)$.*

Isto generaliza o trabalho de Franks entre as duas aplicações de conexão no caso quando A e A^* são dois pontos críticos sucessivos de um fluxo Morse-Smale. Se Q é um sucessor de P para um fluxo Morse-Smale então naturalmente P é um sucessor de Q para um fluxo inverso, assim a variedade de conexão para este fluxo é a mesma variedade $Z(P,Q)$ mas com um framing diferente e em geral estes framings de $Z(P,Q)$ representam diferentes classes de homotopia; contudo Franks mostra que se a variedade é estavelmente paralelizável então as duas classes de homotopia são estavelmente a mesma. No caso Morse-Smale e considerando pontos críticos consecutivos temos que δ e δ' são, respectivamente, a suspensão da aplicação de colagem relativa com relação ao fluxo γ e com relação ao fluxo inverso $-\gamma$, dada por Franks. Cornea mostra que as aplicações δ e δ' são Spanier-Whitehead duais no contexto estavelmente paralelizável e são duais módulo uma certa construção de Thom em geral (lembrando que a dualidade de Spanier-Whitehead de aplicações entre esferas é estavelmente igual, a menos de sinal).

Exemplo 3.1.10. Considere o toro T^2 e observe o fluxo γ na figura abaixo.

Considere A atrator e A^* repulsor, conforme figura.

Vamos construir a seqüência de cofibração deste par atrator-repulsor:

$$c_\gamma(A) \to c_\gamma(S) \to c_\gamma(A^*) \xrightarrow{\delta} \Sigma c_\gamma(A),$$

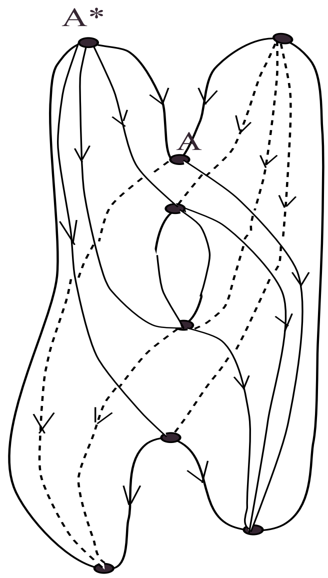

Figura 3.1: Fluxo γ sobre o toro T^2.

que, em nosso caso é dada por:

$$S^1 \to D^2 \to S^2 \xrightarrow{\delta} S^2.$$

Temos neste caso, que $Z(A, A^*) = \{\text{ponto}\}$ e a aplicação de colagem relativa dada por Franks é $\delta(A, A^*) : S^1 \to S^1$.

Considerando agora o fluxo inverso $-\gamma$, temos que a seqüência de cofibração deste par atrator-repulsor é

$$c_{-\gamma}(A^*) \to c_{-\gamma}(S) \to c_{-\gamma}(A) \xrightarrow{\delta} \Sigma c_{-\gamma}(A^*),$$

ou seja,

$$S^0 \to D^2 \to S^1 \xrightarrow{\delta^*} S^1.$$

3.2 Teorema da Variedade de Conexão de Cornea

Nesta seção vamos enunciar o teorema de Cornea que descreve a variedade de conexão *framed* como um elemento do anel de bordismo *framed* do *loop space* de M, ΩM, $\Omega_*^{fr}(\Omega M)$ [4].

Considere M uma variedade riemaniana, compacta e suave e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função de Morse-Smale suave, regular e constante sobre ∂M. Seja $\gamma : M \times \mathbb{R} \to M$ o fluxo induzido por $-\nabla f$. Assuma que P e Q são pontos críticos sucessivos de f, de índices p e q, respectivamente.

Lembremos que $Z(P,Q)$ é uma variedade de dimensão $p - q - 1$ chamada variedade de conexão de P e Q. Franks mostra que sua classe de bordismo *framed* $\{Z(P,Q)\} \in \Omega_*^{fr}$ corresponde (via a construção de Thom-Pontryagin) a classe de homotopia da aplicação de colagem relativa $\delta(P,Q)$ associada a colagens sucessivas das células correspondendo aos pontos críticos Q e P.

Observação 3.2.1. $Z(P,Q) \hookrightarrow S^u(P) = W^u(P) \cap f^{-1}(a)$ com um framing de seu fibrado normal.

Considere o seguinte fluxo γ_1, conforme Figura 3.2:

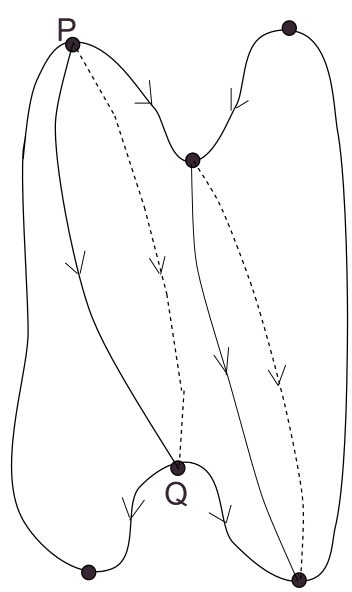

Figura 3.2: Fluxo γ_1.

Neste caso temos que $Z(P,Q) = S^0$ e $S^u(P) = S^1$. Veja Figura 3.3.

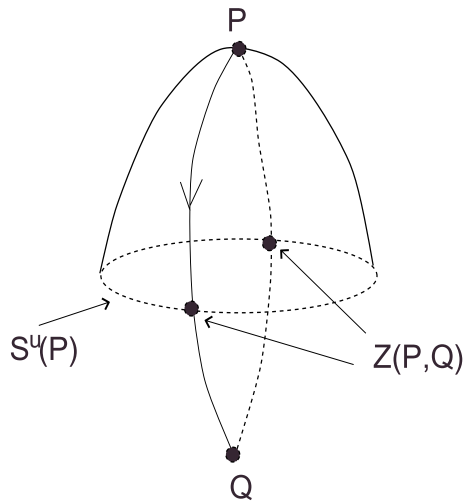

Figura 3.3: Variedade de Conexão

$(W^u(P) \approx Int(D^p), W^s(Q) \approx Int(D^{n-q})$; este framing vem da escolha da trivialização para $(T_Q W^s(Q))^{\perp})$.

O fecho do espaço de todos os pontos situados sobre alguma curva integral unindo P a Q é identificado a suspensão não reduzida $\Sigma Z(P,Q)$. Portanto, temos uma inclusão $\Sigma Z(P,Q) \hookrightarrow M$ e M é simplesmente conexa. Vamos assumir

$$\iota(P,Q) : Z(P,Q) \to \Omega M,$$

onde $\Omega M = \{(S^1, *) \to (M, P)\}$ é o *loop space*.

Assim, dado $z \in Z(P,Q)$, pela aplicação $\iota(P,Q)$, é um laço dado pela linha de fluxo contendo z e unindo P a Q fechado por um caminho ω (de Q a P) (Ver Figura 3.4). Logo, $Z(P,Q)$, juntamente com o framing e a aplicação $\iota(P,Q)$ faz com que possamos considerar $[Z(P,Q)] \in \Omega^{fr}_{p-q-1}$ (classe de cobordismo *framed*) e assim $[[Z(P,Q)]] \in \Omega^{fr}_{p-q-1}(\Omega M)$ (a aplicação sendo $\iota(P,Q)$).

Lembremos que pelo Teorema de Thom- Pontryagin, temos que, $\Omega^{fr}_k(X) \simeq \pi^s_k(X) = lim_{p\to\infty}\pi_{k+p}(\Sigma^p X) = lim_{p\to\infty}[(S^{k+p}, *), (\Sigma^p X, *)]$.

Note que $[Z(P,Q)] \in \Omega^{fr}_{p-q-1} \approx \pi^S_{p-q-1} = lim_{k\to\infty}[S^{p-q-1+k}, S^k]$ e $\delta(P,Q) : S^{p-1} \to S^q \in [S^{p-q-1+g}, S^q]$, e assim, $[Z(P,Q)] = \{\delta(P,Q)\}$.

O framing normal de Z juntamente com a aplicação $\iota(P,Q)$ produz, via construção de Thom-Pontryagin, uma classe de homotopia $T(P,Q) : S^{p-1} \to \Sigma^q(\Omega M^+) = S^q \vee S^q \wedge \Omega M$.

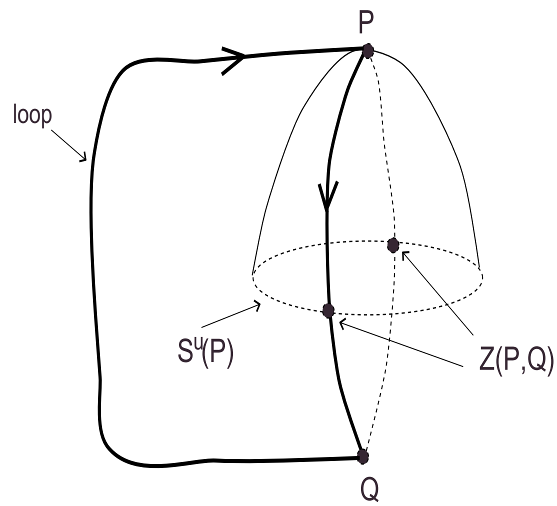

Figura 3.4: Loop.

Pelo resultado de Franks a projeção de $T(P,Q)$ sobre S^q é $\delta(P,Q)$. Seja $h(P,Q) \in \pi_{p-1}(\Sigma^q \Omega M)$ a projeção de $T(P,Q)$ sobre o segundo fator.

Cornea continua o trabalho de Franks dando uma descrição puramente homotópica do ambiente das classes de bordismo *framed* de $Z(P,Q)$, $[Z(P,Q)]^{fr} \in \Omega^{fr}_{p-q-1}(\Omega M)$. Ele mostra que $\Sigma h(P,Q)$ é igual a suspensão de um certo invariante de Hopf, $H(P,Q)$, associado a colagem de células sucessivas correspondentes de Q e P. Como $T(P,Q)$ representa $[Z(P,Q)]^{fr}$ conclui que esta classe de bordismo é igual a imagem estável de $H(P,Q) + \delta(P,Q)$. Mais precisamente, temos:

Teorema 3.2.2. *Temos a igualdade:* $\Sigma h(P,Q) = \Sigma H(P,Q)$. *Em particular,* $[Z(P,Q)]^{fr} \in \Omega^{fr}_{p-q-1}$ *é igual a imagem estável de* $H(P,Q) + \delta(P,Q)$.

Observação 3.2.3. A demonstração é bastante técnica, e já está inclusa nos nossos próximos estudos.

Tabela de Símbolos

Ordem alfabética

A	atrator
A^*	repulsor
B	espaço base de um fibrado
$B(\xi)$	espaço base de um fibrado vetorial associado ao fibrado ξ
$c_\gamma(A)$	índice de Conley de A com respeito ao fluxo γ
C_f	*mapping cone*
CW	complexo CW
df_x	derivada da aplicação f com relação a x
$f_{\partial\sigma}$	aplicação de colagem para a célula σ
f_σ	aplicação característica da célula σ
$h(S)$	indíce homotópico de S
$H_*(X, A)$	grupo de homologia do par (X, A)
$\tilde{H}_*(X, A)$	grupo de homologia reduzido
I	intervalo unitário $[0, 1]$
$Inv(N)$	subconjunto invariante maximal de N
K^n	n-ésimo esqueleto de um complexo CW
M_f	*mapping cylinder*
(N_1, N_0)	par-índice para um conjunto invariante isolado
Ob	objetos de uma categoria
S	conjunto invariante isolado
S^q	esfera unitária em $\mathbb{R}^{q+1}$
$sgn(x)$	sinal de x

TM	espaço tangente a M
TM_x	espaço tangente a M em x
$TN^\perp$	espaço de vetores normais a N
$TN_x^\perp$	espaços de vetores normais a N em x

Símbolos

$\simeq$	equivalência de homotopia
$/$	quociente
$\vee$	união em um ponto de espaços pontuados
$\wedge$	produto *smash*
$\times$	produto cartesiano
$\cup$	união de espaços
$\cap$	interseção de espaços
$\circ$	composição de aplicações
∂	fronteira (bordo)
$\|\|x\|\|$	norma de um vetor
$\approx$	isomorfismo
$[f]$	classe de homotopia de f
$[M; S]$	classe de homotopia das aplicações de M em S

Letras gregas

γ	fluxo gamma
δ	aplicação de conexão
Π^n	n-ésimo grupo de homotopia
Σ	suspensão de um espaço ou de uma aplicação
$\Omega^n(X)$	grupo de bordismo
ΩM	espaço dos laços em M
ξ, η	fibrados

Lista de Figuras

Índice Remissivo

Referências Bibliográficas

[1] Bredon, G. E., Topology and Geometry. *Springer-Verlag, New York-Berlin,* 1993.

[2] Bröquer, T.; Jänich, K., Introduction to differential topology. *Cambridge University Press,* 1982.

[3] Cornea, O., Homotopical dynamics: suspensão and duality.*Ergod. Th.* & *Dynam. Sys.* **20***(2000)*, 379-391.

[4] Cornea, O. , Homotopical Dynamics II: Hopf Invariants, Smoothings and the Morse Complex; *preprint.*

[5] Franks, J. M., Morse-Smale flows and homotopy theory. *Topology* **18***(1979)*, 199-215.

[6] Milnor, J. W., Topology from the differentiable viewpoint. *Princeton University,* 1965.

[7] Salamon, D., Connected simple systems and the Conley index of invariants sets. *Trans. Amer. Math. Soc.* **291***(1985)*, 1-41.