A “REGRA DOS 70”, O TEMPO DE DUPLICAÇÃO E A MEIA-VIDA.

Antonio Carlos Gilli Martins
IMECC-UNICAMP

Introdução:

Dias atrás, sem querer, presenciei uma conversa entre o gerente de um Banco e um cliente que queria aplicar uma certa quantia de dinheiro. O aplicador estava ansioso em saber *“ quanto tempo”* levaria para duplicar a quantia a ser aplicada . Em tempos de juros baixos nas poupanças, ele estranhou que levaria muitos anos para ter seu capital duplicado. O gerente mostrou a ele a seguinte tabela:

i(% taxa de crescimento anual)	2	3	4	5
d(tempo de duplicação em anos)	35	$23,333$	$17,5$	14

onde esse tempo d, segundo o gerente, era aproximado, porém com maior confiança na aproximação para as taxas anuais mais baixas. Desanimado o cliente agradeceu e foi embora. Eu, muito curioso, me detive analisando a tabela e notei que, em cada caso, o número de anos vezes a taxa de aplicação, $d \times i$, era muito próxima de 70. Perguntei ao gerente como havia obtido tais tempos e ele me disse que *“essa era uma regra usada em finanças conhecida como a regra dos setenta ”.* Muito simples: dividindo 70 pela taxa i obtém-se o tempo desejado. O porquê de ser 70 ele não sabia, mas sabia que dava certo. Mais à frente iremos justificar o cálculo simplista do gerente nessa regra.

Problemas semelhantes a este, onde se deseja saber o tempo de duplicação de uma certa quantidade, ocorrem em toda parte. A seguir temos outro, não menos concreto, em lugares onde há crises de abastecimento de todos os tipos e é necessário se saber o comportamento de certas populações para não criar o caos no futuro.

A população do México era, em 1980, de aproximadamente 67,38 milhões de pessoas e passou para 78,59 milhões em 1986, tendo um crescimento anual da ordem de 2,6% ao ano. O conhecimento de tal crescimento, exponencial como se verá, pode levar a questionamentos do tipo: Em que ano a população do México será o dobro da atual, supondo-se que tal taxa de crescimento anual permaneça constante em 2,6% ao ano? O **tempo**

de duplicação de uma quantidade que cresce exponencialmente é o tempo necessário para que a quantidade dobre.

Um problema, não tão aparentemente distante quanto o do México acima, pode ocorrer a qualquer momento conosco ou com nossos filhos, quando temos que tomar remédios que podem nos causar intoxicações, ou provocar reações alérgicas, dada a administração sucessiva de doses e que não são totalmente eliminadas do organismo.

Quando se dá um medicamento a um paciente, a droga entra na corrente sanguínea. Ao passar pelo fígado e rins ela é metabolizada e começa ser eliminada a uma taxa que depende da droga dada. Por exemplo, para o antibiótico ampicilina (substância ativa), aproximadamente 40% da droga remanescente é eliminada a cada hora. Isso significa que, à cada hora adicional, é removida uma quantidade menor que na hora anterior, pois a eliminação incide sempre sobre a quantidade de droga presente no organismo num dado instante. Tal comportamento de decrescimento é do tipo exponencial. Para muitos fins, pode-se querer saber quanto tempo uma certa dose ingerida de ampicilina (em mg) leva para ser reduzida à sua metade. Tal tempo é conhecido como meia vida da ampicilina no corpo do paciente. A **meia-vida** de uma quantidade que decai exponencialmente é o tempo necessário para que a quantidade se reduza por um fator meio.

Os três casos acima dão também uma idéia da importância da Matemática e da sua aplicação a problemas ligados a outras áreas de conhecimento, vindo de encontro a orientações localizadas nos PCN, Parâmetros Curriculares Nacionais. Subjacente aos problemas aquí apresentados está o conceito de função exponencial e suas propriedades que serão discutidas a seguir.

A função exponencial geral

Diz -se que P é uma *função exponencial de t, de base a*, onde $0 < a \neq 1$, se

$$P(t) = P_0 a^t ,$$

onde P_0 é o valor de P em $t = 0$, e a é o fator pelo qual P varia quando o parâmetro t varia de uma unidade.

As funções exponenciais se dividem basicamente em dois tipos (RPM 33, pág. 25):

se $0 < a < 1$ temos um decaimento exponencial e se $1 < a$ temos um crescimento exponencial.

Exemplo: A tabela abaixo dá a população estimada do México, entre 1980 e 1986.

Ano	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
População(milhões)	$67,38$	$69,13$	$70,93$	$72,77$	$74,66$	$76,60$	$78,59$

Para reconhecer se uma dada tabela, como a acima, corresponde a uma função exponencial do tipo $P(t) = P_0 a^t$, deve-se, de acordo com a definição de função exponencial de base a, verificar se existem razões constantes entre os valores igualmente espaçados de t. No caso em questão, onde $t = 0$ corresponde ao ano 1986:

$$\begin{aligned} \frac{P(t+1)}{P(t)} &= a \quad , \\ \frac{69,13}{67,38} &= a = 1,023 = \frac{70,93}{69,13} = \frac{72,77}{70,93} = ... \end{aligned}$$

o que vem justificar que o crescimento, aproximado, da população do México era de 2,6% ao ano naquele período e, assim, do tipo exponencial. Uma expressão para tal crescimento é dada então por: $P(t) = 67,38\,(1,026)^t$ onde $P(0) = 67,38$ milhões de habitantes.

Geralmente o crescimento exponencial é descrito em termos de taxas em porcentagens: A população do México cresce a uma taxa de 2,6% ao ano; 40% da ampicilina é removida a cada hora . Isso leva à apresentação de fórmulas alternativas, equivalentes, para a função exponencial em termos dessas taxas: se r é a taxa de crescimento, então $a = 1 + r$ é o fator de crescimento e $P(t) = P_0(1+r)^t = P_0 a^t$; se r é a taxa de decrescimento, então $a = 1 - r$ é o fator de decaimento e $P(t) = P_0(1-r)^t = P_0 a^t$. Neste formato, a quantidade r é comumente chamada de taxa de crescimento relativo ou percentual. Quando as funções exponenciais são escritas em termos da base a, a base mais comumente usada é dada pelo número $e = 2,71928...$ e por ser usada com muita frequência, é chamada de base natural. A função exponencial de base e, $y(t) = e^t$, é conhecida como *"a função exponencial "*.

É sabido que "para todo número positivo a, podemos escrever $a = e^k$ para algum k real. Se $a > 1$ então $k > 0$ e se $0 < a < 1$ então $k < 0$."(Isso é uma consequência do Teorema 4, pág. 25, RPM 33, do artigo "Crescimento linear e crescimento exponencial", por Elon L. Lima). Assim, o quadro abaixo sintetiza as formas das funções exponenciais:

$$P = P_0 a^t = P_0 (1+r)^t = P_0 e^{kt}$$

se $a > 1$ e $k > 0$ para crescimento,

$$P = P_0 a^t = P_0 (1-r)^t = P_0 e^{-kt}$$

se $0 < a < 1$ e $k > 0$ para decaimento exponencial.

A função logaritmo natural

Define-se a função logarítmo natural de x, denotada por $\ln(x)$, como sendo a função inversa da exponencial e^x.

" O *logarítmo natural de* x é a potência de e necessária para se obter x."

$$\text{Assim} \quad y = \ln(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y.$$

Enquanto o domínio de e^x é o conjunto de todos os números reais, o de $\ln(x)$ é constituido de todos os números reais que são estritamente maiores que zero.

A função logarítmo natural pode aparecer também definida de outro modo(vide o livro "Logarítmos", por Elon L.Lima, da Coleção do Professor de Matemática, SBM). Porém, para os propósitos deste trabalho, a definição acima é bastante prática e irá ajudar a resolver o problema do tempo de duplicação e o da meia-vida. Já para a "Regra dos 70" será necessária uma forma prática de calcular o valor numérico do logarítmo, mesmo que aproximado.Tal expressão se encontra apresentada, com notas históricas, em RPM 26 , pág 6, e que foi obtida, por volta de 1665 , por I. Newton e é a que se segue:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... \quad \text{onde} \quad |x| < 1.$$

Tal expressão, que também é conhecida como a Série de Taylor da função $\ln(x)$ em torno de $x = 1$, permite calcular os valores do logarítmo de um número perto do 1 por meio de um polinômio em x, onde x é a diferença entre esse número e o 1, desde que ela seja pequena.Também permite a seguinte aproximação:

$$\ln(1+x) \approx x \qquad , \text{quando } 0 \leq \ |x| << 1 \ .$$

Em tempo: o leitor mais atento e/ou rigoroso pode estar questionando quão precisa é essa aproximação, ou que tipo de erro pode ser cometido quando se procede assim. Para estimativas bastante precisas sobre tais erros o leitor poderá consultar o livro "Calculus", Michael Spivak, 3^aEd., Publish or Perish, Inc,1994, em seu capítulo 4. Tal discussão não será feita aquí dado o caráter ingênuo que se pretende dar a esse tema.

O tempo de duplicação

Para se calcular o tempo de duplicação, d, de uma quantidade que cresce exponencialmente com o tempo, primeiramente nota-se que:

Teorema 1: Toda função que cresce exponencialmente tem um tempo de duplicação fixo.

Demonstração: Seja $a > 1$ e $P(t) = P_0 a^t$ uma tal função. Ela é crescente e sua imagem é o conjunto dos números reais positivos. Assim existe um número real positivo d tal que tal que $a^d = 2$. Esse número d é o tempo de duplicação, ou seja $P\left(t+d\right) = 2P\left(t\right)$ qualquer que seja o valor de $P\left(t\right)$. De fato

$$P\left(t+d\right) = P_0 a^{(t+d)} = (P_0 a^t)(a^d) = (P_0 a^t).2 = 2P\left(t\right).$$

A igualdade $(P_0 a^t)(a^d) = (P_0 a^t).2$ ainda permite explicitar o valor do d:

$$a^d = 2 \ \Leftrightarrow d\ln(a) = \ln 2 \Longleftrightarrow d = \frac{\ln 2}{\ln a} \text{ (propriedade do } \ln\text{)}.$$

Tal resultado mostra que não importa qual seja a quantidade inicial em uma população, cujo crescimento é exponencial, que tal quantidade sempre dobrará depois de d unidades de tempo. Porém tal tempo depende explicitamente da base a que determina o crescimento.

São deixados aos leitores os seguintes exercícios:

a) Obter resultado semelhante para a meia vida;

b) Mostrar, com os dados da tabela do crescimento populacional do México, que em 2007 sua população será o dobro da de 1980. Logo seu tempo de duplicação $d = 27$ anos.

O resultado a seguir estabelece uma relação entre o tempo de duplicação d e a taxa percentual de crescimento, r, da população.

Corolário: Se $P(t) = P_0 (1+r)^t$, onde $r > 0$, então o tempo de duplicação d é dado por

$$d = \frac{\ln 2}{\ln(1+r)}.$$

Demonstração: Basta tomar, no Teorema 1, $a = 1 + r$.

A "regra dos 70"

Chegou agora o momento de justificar a regra dos 70:

"Para calcular o tempo aproximado de duplicação de um investimento(ou população) divida 70 pela taxa percentual anual de juros(ou de crescimento)."

O Teorema 1 garante que o tempo de duplicação não depende da quantidade inicial, mas, sim, da taxa e que esse tempo é

$$d = \frac{\ln 2}{\ln(1+r)} \text{ onde } r\,(\%) = \frac{r}{100} \text{ é a taxa anual de crescimento.}$$

$$\begin{aligned} \text{Como } \ln 2 &= 0,693... \approx 0,70 \text{ e } \ln(1+\frac{r}{100}) \approx \frac{r}{100}\ , \\ d &\approx \frac{0,70}{\frac{r}{100}} = \frac{70}{r}, \text{ como estabelecida pela regra dos 70.} \end{aligned}$$

Para finalizar, a tabela seguinte, onde os valores reais e os aproximados de crescimento populacional podem ser comparados, mostra que essa**"regra dos 70"** é uma aproximação razoavelmente boa para tais cálculos aproximados quando as taxas de crescimentos são bem pequenas.

i ((%) taxa anual de crescimento)	2	3	4	5
d (tempo de duplicação, em anos)	$35,003$	$23,450$	$17,673$	$14,207$
$\frac{70}{i}$ (tempo de duplicação) aproximado, em anos	$35,000$	$23,333$	$17,500$	$14,000$

Como se pode observar ao longo deste artigo, houve uma preocupação muito maior com o tempo de duplicação do que com a meia-vida. Isso foi proposital, apesar do título, visto que tudo o que se fez acima pode ser refeito com as funções exponenciais decrescentes e isso é deixado ao leitor, acompanhado das seguintes perguntas(que ele, após efetuar seus cálculos, poderá tranquilamente responder):

1.) A regra dos 70 vale também para o cálculo aproximado da meia-vida de uma população?

2.) Numa taxa média anual de 6% ao ano, nas aplicações financeiras, calcule o tempo de duplicação, d, para essa taxa pelos dois processos: o"real" e pela" regra dos 70".Compare-as.