Condiciones suficientes de optimalidad en programación no lineal

Antonio Carlos Moretti
Marko Antonio Rojas-Medar
Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação
Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 6065
13081-970 - Campinas - SP - Brazil

June 6, 2000

Abstract

En este trabajo presentamos algunos criterios de optimalidad global en programación no lineal.

1 Introducción

Son bien conocidas las condiciones necesarias de optimalidad en programación matemática, en particular, las llamadas reglas de multiplicadores, explícitamente las de Lagrange y Karush-Kuhn-Tucker (K-K-T), ver por ejemplo [15],[2], [3]. Estas reglas son sólo necesarias, es decir, si x^* es una solución óptima entoces ella debe satisfacer ciertas ecuaciones (los llamados sistemas de Lagrange o K-K-T), las deficiencias naturales en estas condiciones de optimalidad son:

1. el carácter local y no global,
2. no son conclusivas.

Así, es necesario un análisis más profundo para decidir cuales de los puntos extremos es en efecto una solución óptima. Usualmente, para alcanzar los objetivos anteriores, se utilizan criterios de segundo orden o mayor [1],[2],[3], lo cual exige un grado mayor de diferenciabilidad de las funciones involucradas en el problema, o se impone convexidad (o variantes) sobre las funciones que definen el problema. Pero, es deseable tener criterios prácticos que nos permitan concluir si un punto satisfaciendo las condiciones necesarias, es en efecto un óptimo global. Vamos presentar tres caminos posibles para responder esta pregunta : problemas invexos, representación integral y finalmente una caracterización topológica. La noción de invexidad es relativamente reciente, fue introducida por Hanson [16] . Dado el carácter local del cálculo diferencial, en contraposición del cálculo integral, el cual es útil sobre conjuntos compactos y no vacíos, y por lo tanto tiene un carácter más global, su utilización en la problemática de optimización global es natural, y como las integrales no exigen diferenciabilidad de las funciones, el espectro de uso es mayor. La caracterización topológica que daremos no exige la continuidad usual de funciones, pero exige lo que llamaremos continuidad por niveles, así su uso en optimización global es mayor.

2 Preliminares

En esta sección vamos a recordar algunos resultados necesarios para las próximas secciones, como también estableceremos las notaciones que utilizaremos en el curso del trabajo.

El problema básico en programación no lineal (PNL) puede ser colocado de la siguiente manera: Dados un subconjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y una función $f : U \to \mathbb{R}$ queremos determinar x^* tal que solucione

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & x \in U, \end{array}\right\} \quad (PM)$$

es decir, tal que $x^* \in U$ y $f(x^*) \leq f(x)$ para todo $x \in U$. En el caso que

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ f_i(x) \leq 0 \ \forall \ i = 1, ...p, \} \tag{1}$$

es bien conocido el siguiente resultado de condiciones necesarias de optimalidad.

Teorema 1 : *(Karush-Kuhn-Tucker) Sea x^* una solución óptima (local o global) de (PM) con el conjunto U dado por (1) y que una condición de regularidad sea satisfecha. Entonces, existen escalares $\lambda_i, i = 1, ..., p$, tales que*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla f_i(x^*) \quad = \quad 0; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \lambda_i &\geq 0, i = 1, ..., p; && (3) \\ \lambda_i f_i(x^*) &= 0, i = 1, ..., p. && (4) \end{aligned}$$

Existen en la literatura varias condiciones de regularidad, quizás las más conocidas sean las siguientes

1. Condición de Slater,
2. Condición de Mangasarian-Fromovitz.

Usando el formalismo Lagrangeano, el sistema de ecuaciones (3-4) es reescrito de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathfrak{L}(x^*, \lambda) = 0; && (5) \\ \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, ..., p; && (6) \\ \lambda_i f_i(x^*) = 0, \quad i = 1, ..., p. && (7) \end{aligned}$$

Donde $\mathfrak{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ es la función de Lagrange, la cual es definida como

$$\mathfrak{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(x)$$

y $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$. Un punto estacionario de la Lagrangeana (es decir, un punto z tal que $\nabla_x \mathfrak{L}(z, \lambda) = 0$) es llamado un punto extremo de (PM). El sistema (3)-(4) recibe el nombre de sistema de Karush-Kuhn-Tucker.

Definición 1 : Si $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ es una función y $\alpha \in (0, \infty)$, entonces:

1. Definimos el $\alpha-$ **nivel** de f por

   $$\{f \geq \alpha\} = L_\alpha f = \{x \in X \ / \ f(x) \geq \alpha\}.$$

   Observe que $\alpha \leq \beta \Rightarrow L_\alpha f \supseteq L_\beta f$.

2. $x_0 \in X$ se dice un punto de máximo local proprio de f si

   $$0 < f(x_0) < \sup_{x \in X} f(x) \ \text{ para todo } \ x \in U.$$

   y existe una vecindad U de x_0 tal que

   $$f(x) \leq f(x_0),$$

Definición 2 : (Límites de Kuratowski) Sea $\{A_n\}_{n\in I\!N}$ una sucesión de subconjuntos de $X \subseteq I\!R^n$, entonces definimos el *límite superior en el sentido de Kuratowski* de la sucesión $\{A_n\}_{n\in I\!N}$, denotado $\limsup A_n$, como

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k\geq n} A_k}$$

y el límite inferior en el sentido de Kuratowski de la sucesión $\{A_n\}_{n\in I\!N}$, denotado $\liminf A_n$, como

$$\liminf A_n = \bigcap_{H} \overline{\bigcup_{k\in H} A_k},$$

donde H denota un subconjunto cofinal arbitrário de $I\!N$ y la intersección es sobre todo los H. Recordamos que H es un subconjunto cofinal de $I\!N$ si $\forall n \in I\!N$, $\exists m \in H$ tal que $m > n$.

Si $\liminf A_n = \limsup A_n = A$, entonces diremos que A es el límite de la sucesión $\{A_n\}_{n\in I\!N}$, o que la sucesión $\{A_n\}_{n\in I\!N}$ converge a A (en el sentido de Kuratowski), y se escribe

$$A = \lim A_n$$

donde $A_n \xrightarrow{k} A$.

Observación 1 : $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$

Observación 2 : $\liminf A_n$ *y* $\limsup A_n$ *son subconjuntos cerrados de* X*.*

Definición 3 : Sea $f : X \subseteq I\!R^n \to [0,\infty)$ y $M = \sup_{x\in X} f(x)$ (el cual puede ser $+\infty$). Dicemos que f es continua por niveles si $\alpha_p \to \alpha \Rightarrow L_{\alpha_p} f \xrightarrow{k} L_\alpha f$ para todo $\alpha \in (0, M)$.

Los siguientes ejemplos muestran que la continuidad usual y la continuidad por niveles son independientes.

Ejemplo 1 : *Sea* $X = [0,1] \subseteq I\!R$*. Defina* $f : X \to [0,\infty)$ *por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x \ \ \textit{se} \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \\ \frac{1}{2} \ \ \textit{se} \ \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Es claro que f es continua sobre X. Por otro lado, tomando $\alpha_p = \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$, $p \geq 2$, tenemos que

$$L_{\alpha_p} f = [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{p}],$$

para todo p. Así, $\limsup L_{\alpha_p} f = \bigcap_{p=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k \geq p} [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{k}]} = [0, \frac{1}{2}]$, *pero* $L_{\frac{1}{2}} f = [0, 1]$. *Consecuentemente, f no es continua por niveles.*

Ejemplo 2 : *Tome $X = [0,1] \subseteq I\!R$. Defina $f : X \to [0, \infty)$ por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x = 1, \\ \\ 0 & se\ x \neq 1. \end{cases}$$

Entonces, f no es continua sobre $[0,1]$. Pero, para cada $\alpha \in (0,1)$, tenemos $L_\alpha f = 1$. Por lo tanto, f es continua por niveles.

3 Condiciones suficientes de optimalidad para problemas invexos

La noción de función invexa fue introducida por Hanson [16],[17]. Esta clase de funciones es interesante, pues las clásicas condiciones necesarias de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker son también suficientes.

Definición 4 : *Sean Ω un subconjunto abierto, no vacío de $\mathbb{R}^n$ y la función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciable. La función f se dice **invexa** en $u \in \Omega$ si existe una función $\eta : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$f(x) - f(u) \geq < \nabla f(u), \eta(x, u) >$$

para cada $x \in \Omega$. Dicemos, simplemente, que f es invexa , si lo es en todo $u \in \Omega$.

Note que si f es una función convexa diferenciable, en particular, f es invexa: basta tomar $\eta(x, u) = x - u$.

Antes de enunciar y demostrar el teorema de las condiciones suficientes de optimalidad para el programa invexo (es decir, cuando todas las funciones en (P) son invexas, para una misma función η), necesitaremos de los siguientes lemas:

Lema 1 : *Una función f es invexa en Ω si y solamente si todo punto estacionario de f es punto de mínimo global.*

Demostración : Suponga f invexa en Ω y sea u un punto estacionario de f, es decir,$\nabla f(u)=0$. De la definición de invexidad, se sigue que

$$f(x)-f(u)\geq <0,\eta(x,u)>=0,$$

y, por lo tanto, $f(u)\leq f(x)$ para todo $x\in\Omega$ así, u es mínimo global de f.

Por otro lado, suponga que todo punto estacionario de f es punto de mínimo global.

Ahora, definamos:

$$\eta(x,u)=\begin{cases}\dfrac{|f(x)-f(u)|}{||\nabla f(u)||^2}.\nabla f(u) \text{ si } \nabla f(u)\neq 0\\ 0, \text{ caso contrario.}\end{cases}$$

Si $\nabla f(u)=0$, entonces $<\nabla f(u),\eta(x,u)>=0\leq f(x)-f(u)$, pues u es punto de mínimo global.

Si $\nabla f(u)\neq 0$, entonces $<\nabla f(u),\eta(x,u)>=f(x)-f(u)$

Así, en cualquier caso, la función f es invexa. $\blacksquare$

Lema 2 : *Si para cada $i=1,...,p$ tenemos $\lambda_i\geq 0$ y las funciones f_i son invexas para una misma función η, entonces la función $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i$ es invexa.*

Demostración : De la definición de invexidad se sigue que

$$f_i(x)-f_i(u)\geq <\nabla f_i(u),\eta(x,u)>, i=1,...,p.$$

Como $\lambda_i\geq 0$ para todo $\lambda_i\geq 0$, tenemos que

$$\lambda_i(f_i(x)-f_i(u))\geq <\lambda_i\nabla f_i(u),\eta(x,u)>, i=1,...,m.$$

Sumando sobre los índices i obtenemos

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(x)-\lambda_i f_i(u)\geq\sum_{i=1}^{p}<\lambda_i\nabla f_i(u),\eta(x,u)>.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(x)-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(u)\geq <\nabla[\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(u)],\eta(x,u)>.$$

Luego, la función $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$ es invexa. ∎

Ahora, estamos en condición de enunciar y demostrar el siguiente resultado.

Teorema 2 : *(Condiciones suficientes de optimalidad para el programa invexo) Suponga que x^* sea un punto factible para (PM) y que las funciones f_0, f_i sean invexas en x^* para una misma función η y que existan multiplicadores $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., p$, tal que las condiciones de Karush- Kuhn-Tucker son satisfechas en x^* . Entonces x^* es un punto de mínimo global para (PM).*

Demostración : Por el lema anterior, la función $f_0 + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$ es invexa en x^* y de las condiciones de Karush- Kuhn- Tucker, se sigue que x^* es punto estacionario de $f_0 + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$. Entonces, por el Lema 1 , x^* es punto de mínimo global de $f_0 + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$. De este modo,

$$f_0(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(x) \geq f_0(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(x^*),$$

para todo punto factible para (PM).

Pero $\lambda_i f_i(x^*) = 0$ para todo índice i y, por lo tanto,

$$f_0(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(x) \geq f_0(x^*),$$

de donde se obtiene que

$$f_0(x) \geq f_0(x^*),$$

pues $\lambda_i f_i(x) \leq 0$ para todo x factible para (PM).

Luego, x^* es solución global de (PM).

Considere el problema

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f_0(x) \\ \text{sujeito a} & f_i(x) \leq 0, i = 1, ..., p, \end{array}\right\} \quad (P1)$$

donde las funciones f_i son diferenciables en el conjunto de restricciones $U = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ f_i(x) \leq 0 \ \forall \ i = 1, ...p\}$. Las condiciones de K-K-T en un punto estacionario $x^* \in U$ son:

$$\begin{aligned} \nabla f_0(x^*) + y^t \nabla F(x^*) &= 0, \\ y^t F(x^*) &= 0, \\ y &\geq 0, \\ F &= (f_1, f_2, ..., f_p), \end{aligned}$$

para algún $y \in \mathbb{R}^p$.

Con relación al problema (PM), $f_0(x)$ y $F(x)$ son funciones invexas en $x^* \in U$ con respecto a un $\eta(x,x^*)$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, si **para todo** $x \in U$

$$f_0(x) - f(x^*) \geq \eta(x,x^*)^t \nabla f_0(x^*)$$

y

$$F(x) - F(x^*) \geq \eta(x,x^*)^t \nabla F(x^*).$$

Observe que la invexidad definida aquí es en un punto x^* (como también son las condiciones de K-K-T), no necesariamente podemos afirmar que un mínimo local en U es un mínimo global en U.

Dados x e $x^* \in U$, podemos calcular el vector $\eta(x,x^*)$ usando programación lineal.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & b^t y \\ \text{sujeto a} & Ay = c \\ & y \geq 0, \end{array}\right\} \quad (P2)$$

donde

$$b = \begin{bmatrix} f_0(x) - f_0(x^*) \\ f_1(x) - f_1(x^*) \\ f_2(x) - f_2(x^*) \\ ... \\ ... \\ f_p(x) - f_p(x^*) \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} \nabla f_0(x^*) & \nabla f_1(x^*) & \nabla f_2(x^*) & ... & ... & \nabla f_p(x^*) \\ 0 & f_1(x^*) & f_2(x^*) & ... & ... & f_p(x^*) \\ 1 & 0 & 0 & ... & ... & 0 \end{bmatrix},$$

y $c = (0, 0, ..., 1)^t$.

Las restricciones de (P2) son satisfechas por un punto de K-K-T, x^*. Por lo tanto, para cualquier valor fijo de x el problema anterior tiene una solución óptima, pues y es acotado.

Considere ahora el problema dual de (P2)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & c^t \eta \\ \text{sujeto a} & A^t \eta \leq b, \end{array}\right\} \quad (P3)$$

que pode ser reescrito como

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & \eta_{n+2} \\ \text{sujeto a} & A^t \eta \leq b, \end{array}\right\} \quad (P4)$$

observe que el conjunto de restricciones de (P4) puede ser escrito como

$$\begin{array}{rcl} \nabla f_0(x^*)^t\eta + \eta_{n+2} & \leq & f_0(x) - f_0(x^*) \\ \nabla f_1(x^*)^t\eta + f_1(x^*)\eta_{n+1} & \leq & f_1(x) - f_1(x^*) \\ & & ... \\ & & ... \\ \nabla f_p(x^*)^t\eta + f_p(x^*)\eta_{n+1} & \leq & f_p(x) - f_p(x^*) \end{array}$$

donde $\eta = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)^t$.

Como $f_i(x^*) \leq 0$ para $i = 1, 2, ..., m$, entonces tenemos que $f_i(x)$ y $f_0(x)$ serán invexas en x^* para un x dado si $\eta_{n+2} \geq 0$ y $f_i(x^*)\eta_{n+1} \geq 0$, para $i = 1, ..., p$. Si esto ocurre podemos afirmar que x^* es un mínimo local, si este tipo de solución ocurre para todo $x \in U$ entonces podemos afirmar que x^* es un mínimo global.

El siguiente ejemplo ilustra una situación donde x^* es un mínimo global.

Ejemplo 3 : *Considere el siguiente problema*

$$\begin{array}{ll} Min & f_0(x) = x_1 - \sin(x_2) \\ sujeto\ a & \\ & f_1(x) = \sin(x_1) - 4\sin(x_2) \leq 0 \\ & f_2(x) = 2\sin(x_1) + 7\sin(x_2) + x_1 - 6 \leq 0 \\ & f_3(x) = 2x_1 + 2x_2 - 3 \leq 0 \\ & f_4(x) = 4x_1^2 + 4x_2^2 - 9 \leq 0 \\ & f_5(x) = -\sin(x_1) \leq 0 \\ & f_6(x) = -\sin(x_2) \leq 0 \end{array}$$

La región factible descrita por estas restricciones como también las curvas de nivel de la función son mostradas en la Figura 1 abajo.

Todas las funciones anteriores satisfacen la definición de invexidade con

$$\eta = \begin{bmatrix} \frac{\sin(x_1) - \sin(x_1^*)}{\cos(x_1^*)} \\ \frac{\sin(x_2) - \sin(x_2^*)}{\cos(x_2^*)} \end{bmatrix},$$

para todo $x, x^* \in U$ y siendo x^* un punto de K-K-T.

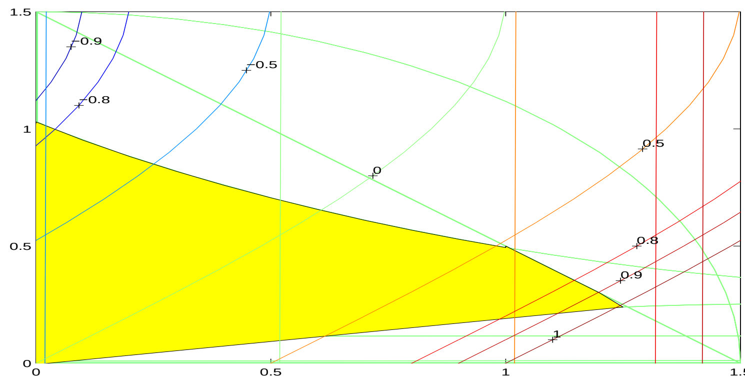

Figure 1: Región factible y curvas de nivel de la función $f_0(x)$

Vamos a verificar computacionalmente que $x^* = (0, \arcsin(\frac{6}{7}))$ es un punto de K-K-T resolviendo el seguiente problema de programación lineal.

$$\text{Min} \quad 0.877y_1 + 1.9903y_2 - 1.1852y_3 - 0.0594y_4 - 2.2411y_5 - 0.4794y_6 + 0.3777y_7$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
y_1 + y_2 + 3y_3 + 2y_4 + 0y_5 - y_6 + 0y_7 &= 0 \\
-0.5151y_1 - 2.0603y2 + 3.6056y3 + 2y_4 + 8.2376y_5 + 0y_6 - 0.5151y_7 &= 0 \\
0y_1 - 3.4286y_2 + 0.y_3 - 0.9406y_4 - 4.7589y_5 + 0y_6 - 0.8571y_7 &= 0 \\
y1 + 0y_2 + 0y_3 + 0y_4 + 0y_5 + 0y_6 + 0y_7 &= 1 \\
y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7 &\geq 0
\end{aligned}$$

La solución para tal problema es $y^* = (1, 0, 0.1429, 0, 0, 1.4286, 0)$, indicando así que el punto x^* es un punto de K-K-T. Por lo tanto, el problema dual tiene solución factible y nos proporciona el valor de η en un punto fijo x y $x^* = (0, \arcsin(\frac{6}{7}))$. Para calcular η basta resolver el problema

$$\text{Max} \quad \eta_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
\eta_1 - 0.5151\eta_2 + 0\eta_3 + \eta_4 &\leq 0.8777 \\
\eta_1 - 2.0603\eta_2 - 3.4286\eta_3 + 0\eta_4 &\leq 1.9903 \\
3\eta_1 + 3.6056\eta_2 + 0\eta_3 + 0\eta_4 &\leq -1.1852
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} 2\eta_1 + 2\eta_2 - 0..9406\eta_3 + 0\eta_4 & \leq -0.0594 \\ 0\eta_1 + 8.2376\eta_2 - 4.7589\eta_3 + 0\eta_4 & \leq -2.2411 \\ -\eta_1 + 0\eta_2 + 0\eta_3 + 0\eta_4 & \leq -0.4794 \\ 0\eta_1 - 0.5151\eta_2 - 0.8571\eta_3 + 0\eta_4 & \leq 0.3777, \end{array}$$

donde $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ son variables libres.

La solución obtenida es $\eta^* = (0.4794, -0.7276, 0, 0.0235)$ que satisface las condiciones de que $\eta \geq 0$, $f_i(x^*)\eta_3 \geq 0, i = 1, 2, ..., 6$. Por lo tanto, las funciones son invexas en x^* y podemos afirmar que x^* es un mínimo local. Pero, no podemos por medio de este procedimiento decir que x^* sea un mínimo global, ya que calculamos η^* com un x dado y nada nos permite concluir que las condiciones $\eta_4 \geq 0$ y $f_i(x^*)\eta_3 \geq 0$ serán respetadas para todo $x \in U$. En este caso, sabemos que x^* es un mínimo global porque conseguimos una expresión explícita para $\eta(x, x^*)$.

4 Representación integral

Sean $X \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto conexo y $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. En esta sección discutiremos el siguiente problema (PNL): encontrar un $x^* \in X$ tal que $f(x^*) = \sup_{x \in X} f(x)$.

Los resultados que presentamos a continuación también son aplicables para el problema de minimización:$f(x^*) = \inf_{x \in X} f(x)$. (Basta observar que $\inf_{x \in X} g(x) = -\sup_{x \in X} g(x)$.)

Antes de seguir nuestra discusión, necesitaremos de los siguientes lemas.

Lema 3 : *Sea $g : X \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función continua, con $g(x) \geq 0$ para todo $x \in X$. Suponga X compacto,con interior no vacío. Entonces, para todo $\alpha \in [0, 1]$, todo $x \in X$ y todo $r, s \in [0, \infty)$, tenemos*

$$[g(x)]^{\alpha r + (1-\alpha)s} \leq \alpha [g(x)]^r + (1-\alpha)[g(x)]^s. \tag{8}$$

Demostración : Para cada $x \in X$ dado, considere la función $F(r) = [g(x)]^r$. Para mostrar la desigualdad (8) , basta mostrar que F es convexa.

Si $g(x) = 0$, el resultado es immediato. Ahora, suponga $g(x) \neq 0$.

Note que $F''(r) = [g(x)]^r [\ln g(x)]^2 \geq 0$. Luego la función es convexa. ∎

Obtenemos casi inmediatamente del Lema 3 el siguiente resultado.

Lema 4 : *Bajo las hipótesis del lema anterior, tenemos que la función* $\mathcal{P}(t) = \int\limits_X [g(x)]^t d\mu$ *es convexa sobre* $[0, \infty)$.

Demostración : Se sigue del Lema 3 que

$$[g(x)]^{\alpha r + (1-\alpha)s} \leq \alpha [g(x)]^r + (1-\alpha)[g(x)]^s,$$

para todo $\alpha \in [0,1]$, todo $x \in X$ y todo $r, s \in [0, \infty)$.
Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\alpha r + (1-\alpha)s) &= \int\limits_X [g(x)]^{\alpha r + (1-\alpha)s} d\mu \\
&\leq \alpha \int\limits_X [g(x)]^r d\mu + (1-\alpha) \int\limits_X [g(x)]^s d\mu \\
&= \alpha \mathcal{P}(r) + (1-\alpha)\mathcal{P}(s)
\end{aligned}$$

∎

En lo siguiente, supondremos que en el problema de programación no lineal la función f es no negativa, para cada $x \in X$. Nada perdemos en suponer esto, pues la función $g(x) = \exp(f(x))$ alcanza su máximo en los mismos puntos que f. En el próximo teorema, discutiremos la optimalidad de un punto dado, digamos, x^*. Si $f(x^*) = 0$, el resultado es immediato. Supondremos que $f(x^*) = 1$. En efecto, si tuviesemos $f(x^*) > 1$, basta considerar la función $g(x^*) = \dfrac{f(x)}{f(x*)}$.

Teorema 3 : *(Representación integral de soluciones óptimas globales) Sean* $X \subset \mathbb{R}^n$ *un compacto con interior no vacío,* $f : X \to [0, \infty)$ *una función continua y* $x^* \in X$ *tal que* $f(x^*) = 1$. *Entonces* $\mathcal{P}(t) = \int_X [f(x)]^t d\mu \to \infty$ *cuando* $t \to \infty$ *si y solamente si* x^* *no es solución global de (PNL).*

Demostración : Primero, supongamos que x^* no es solución global de (PNL). Entonces, existe un $x^0 \in X$ tal que $f(x^0) > 1$.

Como f es continua, se sigue que existe V una vecinidad de x^0 tal que para $\tau > 0$ suficientemente pequeño

$$f(x) > 1 + \tau, \text{ para todo } x \in V \cap X.$$

Luego,

$$\mathcal{P}(t) = \int_X [f(x)]^t d\mu = \int_{X \setminus V} [f(x)]^t d\mu + \int_{X \cap V} [f(x)]^t d\mu$$

Pero f es no negativa, de donde obtenemos,

$$\mathcal{P}(t) \geq \int_{X\cap V}[f(x)]^t d\mu \geq (1+\tau)^t \mu(V\cap X).$$

Ya que X es un compacto, el conjunto $V \cap X$ tiene volumen positivo. Además, tenemos $\tau > 0$ de donde se sigue de la desigualdad anterior que $\mathcal{P}(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$.

Para probar la recíproca, suponga que x^* es solución global de (PNL).

En este caso, para todo $x \in X$, tenemos $f(x) \leq f(x^*) = 1$ y, por lo tanto,

$$\mathcal{P}(t) = \int_X [f(x)]^t d\mu \leq \int_X d\mu = \mu(X) < \infty,$$

pues X es compacto. Así, la función $\mathcal{P}(t)$ es acotada, de donde se sigue que $\mathcal{P}(t) \nrightarrow \infty$. ∎

Corolario 2 : *Bajo las hipótesis del teorema anterior, defina la sucesión* $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de la siguiente manera :*

$$\mathcal{P}_n = \int_X [f(x)]^n d\mu.$$

Entonces x^* *es una solución óptima global de* (PNL) *si y solamente si la sucesión* $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge.* ∎

Observación 3 : *La convexidad de* $\mathcal{P}(t)$ *nos dá un método que podría ser útil para eliminar candidatos* x^* *que no son óptimos globales. Puesto que, si* $\mathcal{P}(t) \to \infty$ *cuando* $t \to \infty$*, la función* $\mathcal{P}$ *debe ser monótona creciente despues de algún punto* t_0 *y monótona decreciente en el intervalo* $[1, t_0]$*. Luego, si es posible obtener dos puntos* $1 \leq t_1 \leq t_2$ *tal que* $\mathcal{P}(t_2) > \mathcal{P}(t_1)$*, se sigue inmediatamente que* x^* *no es un punto de máximo global para el problema* (PNL)*. En términos de sucesiones tenemos*

Corolario 3 : *Bajo las hipótesis del Teorema 3, suponga que* $\mathcal{P}_{n+1} > \mathcal{P}_n$ *para algún* n*. Entonces* x^* *no es una solución óptima global para el problema* (P)*.* ∎

Ejemplo 4 : *Considere el polinomio,*

$$q(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x,$$

donde $X = [0, 3]$*. Observamos que el punto* $x^* = 1$ *satisface*

$$q'(1) = 0,$$

luego el es un punto crítico, además, el satisface

$$q''(1) < 0.$$

Así, él es al menos local. Veamos si es um máximo global. Una cota inferior es obtenida de la siguiente observación,

$$q(x) \geq -\frac{3x^2}{2},$$

para todo $x \in [0,3]$, *consecuentemente*

$$q(x) \geq -\frac{27}{2},$$

para todo $x \in [0,3]$. *En* $x^* = 1$, *tenemos* $q(1) + \frac{27}{2} = \frac{43}{3}$. *Así, consideremos la función*

$$f(x) = \frac{3}{4}(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + \frac{27}{2}),$$

la cual no es negativa y tiene valor 1 *en* $x^* = 1$. *Además,* q *y* f *poseen los mismos puntos extremos locales y globales.*

Así, si la función

$$\mathcal{P}(n) = \int_0^3 f(x)^n dx$$

es una función convexa no monótona, entonces tenemos que x^* *será solamente un punto de máximo local, pues,* $\mathcal{P}(n)$ *tendrá un único mínimo global en* n^*. *Por lo tanto, sea* $n^+ = \lceil n^* \rceil$ *y consecuentemente,* $\mathcal{P}(n^+) > P(n^*)$, *pues* n^* *es un punto de mínimo global para la función* $\mathcal{P}(n)$. *La Figura 2 ilustra lo que queremos mostrar, en ella esta reperesentada la curva* $\mathcal{P}(n) = \int_0^3 f(x)^n dx$ *donde* $f(x)$ *fue calculada de tal manera que* $f(x^*) = 1$ *y* $f(x) \geq 0$ *para todo* $x \in X$.

En este caso, el n^*, *obtenido usando un procedimiento de búsqueda local en* $\mathcal{P}(n)$, *fue igual a* 19.47. *Luego,* $n^+ = \lceil n^* \rceil = 20$ *y tenemos que*

$$\mathcal{P}(n^*) = 2.82263865172199 < \mathcal{P}(n^+) = 2.82297109479478,$$

indicando que $x^* = 1$ *no es un óptimo global de* $q(x)$ *para* $x \in X$.

Ahora, vamos testar si el punto $x^* = 3$ *es un óptimo global o no. Tomemos como límite inferior de* $q(x)$ *el mismo límite usado anteriormente, a saber,* $q(x) \geq \frac{-27}{2}$. *Así, en* $x^* = 3$, *tenemos*

$$q(3) + \frac{27}{2} = 9 - \frac{27}{2} + 6 + \frac{27}{2} = 15,$$

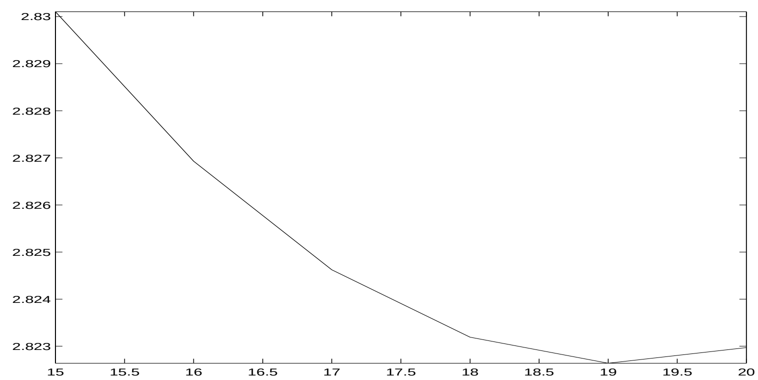

Figure 2: Función $\mathcal{P}(n)$ generada para $x^* = 1$

y, la función $f(x)$ se transforma

$$f(x) = \frac{1}{15}(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + \frac{27}{2})$$

como generadora de la función

$$\mathcal{P}(n) = \int_0^3 f(x)^n dx.$$

Al aplicarse el mecanismo de búsqueda local para encontrarse n^*, que minimice $\mathcal{P}(n)$, observamos que nunca alcanzamos tal punto, lo que indica que la función $P(n)$ es monótona decreciente (vea Figura 3). Esto quiere decir que $x^* = 3$ es un punto de máximo global para el problema $q(x), \quad x \in X$.

5 Caracterización topológica

Antes de dar una caracterización topológica de optimalidad global, necesitaremos del siguiente resultado auxiliar:

Lema 5 : *Una función $f : X \to [0, \infty)$ es siempre continua por niveles por la izquierda, es decir, si tenemos $\alpha_p \nearrow \alpha$, entonces $L_{\alpha_p} f \xrightarrow{K} L_\alpha f$.*

Demostración : Para demostrar esta afirmación, probaremos la inclusión $\limsup L_{\alpha_p} f \subset L_\alpha f \subset \liminf L_{\alpha_p} f$.

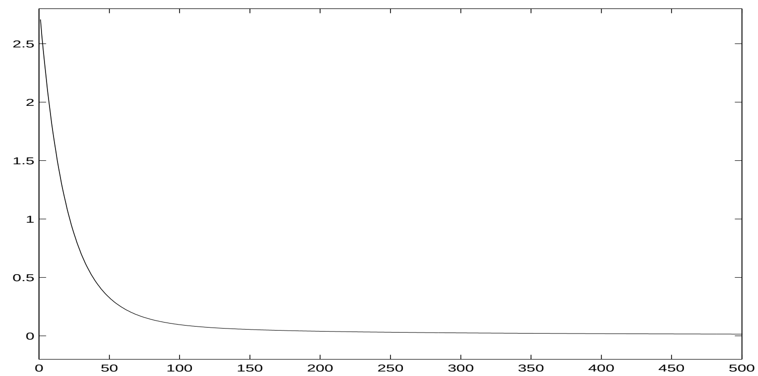

Figure 3: Función $\mathcal{P}(n)$ generada para $x^* = 3$

Tome $x \in \bigcap_{p=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k \geq p} L_{\alpha_k} f} = \limsup L_{\alpha_p} f$.

Entonces

$$x \in \overline{\bigcup_{k \geq p} L_{\alpha_k} f}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Suponga por reduccíon al absurdo que $x \notin L_\alpha f$ es decir, que $f(x) < \alpha$.

Existe $p_0 \in N$ tal que $f(x) < \alpha_k$, para todo $k \geq p_0$, pero $L_{\alpha_k} f$ es cerrado; de esto y de la afirmación anterior se sigue que existe una vecindad U de x tal que

$$U \cap L_{\alpha_{p_0}} f = \phi.$$

Tenemos $\bigcup_{k \geq p_0} L_{\alpha_k} f \subset L_{\alpha_{p_0}} f$ y por lo tanto $U \cap \bigcup_{k \geq p_0} L_{\alpha_k} f = \phi$, de donde se sigue que $x \notin \overline{\bigcup_{k \geq p_0} L_{\alpha_k} f}$, contradiciendo (1). Luego $f(x) \geq \alpha$, es decir $x \in L_\alpha f$.

Ahora, sea $x \in L_\alpha f$ y sea H un subconjunto cofinal de $\mathbb{N}$.

Entonces, $f(x) \geq \alpha \geq \alpha_k$, para todo k, es decir, $x \in L_{\alpha_k} f$ y, con mayor razón, $x \in \overline{\bigcup_{k \in H} L_{\alpha_k} f}$. Como H es arbitrario, $x \in \bigcap_{H} \overline{\bigcup_{k \in H} L_{\alpha_k} f} = \liminf L_{\alpha_p} f$.

Por lo tanto, $L_{\alpha_p} f \xrightarrow{K} L_\alpha f$. ∎

Con el auxilio del Lema 5 , demostraremos el teorema siguiente, el cual da una interesante caracterización de continuidad por niveles.

Teorema 4 : *Sean $f : X \to [0,\infty)$ una función y $M = \sup_{x\in X} f(x)$. Suponga que para cada α se tiene que $L_\alpha f$ es un conjunto cerrado. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) f no tiene puntos de máximos locales propios;

(ii) para cada $\alpha \in (0, M)$, $L_\alpha f = \overline{\{f > \alpha\}}$

(iii) f es continua por niveles.

Demostración :

(i)$\Rightarrow$(ii):

Sea $0 < \alpha_0 < M$. Como el conjunto $\{f \geq \alpha_0\}$ es cerrado, es verdadera la inclusión $\overline{\{f > \alpha_0\}} \subset \{f \geq \alpha_0\}$.

Ahora, suponga que $\overline{\{f > \alpha_0\}} \neq \{f \geq \alpha_0\}$, entonces existe un $x_0 \in \{f \geq \alpha_0\}\backslash\overline{\{f > \alpha_0\}}$.

En este caso, existe una vecindad U de x_0 tal que $U \cap \{f > \alpha_0\} = \phi$. Luego, tenemos $f(x) \leq \alpha_0 = f(x_0) < M$, es decir, x_0 no es un punto de máximo local propio de f, contradiciendo la hipótesis.

(ii)$\Rightarrow$(i):

Sea x_0 um máximo local propio de f.

Entonces, tenemos $0 < f(x_0) = \alpha_0 < M$ y existe una vecindad U de x_0 satisfaciendo $f(x) \leq f(x_0) = \alpha_0$, para todo $x \in U$.

Luego tenemos que $x_0 \in \{f \geq \alpha_0\}$ y también $U \cap \{f > \alpha_0\} = \phi$.

Por lo tanto, $x_0 \in \{f \geq \alpha_0\}\backslash\overline{\{f > \alpha_0\}}$, contradiciendo $L_{\alpha_0} f = \overline{\{f > \alpha_0\}}$.

(iii)$\Rightarrow$(ii):

Sea $\alpha \in (0, M)$. Tenemos $\overline{\{f > \alpha\}} \subset \{f \geq \alpha\}$.

Para probar la inclusión opuesta, tomamos un $x_0 \in \{f \geq \alpha\}$ y consideramos una sucesión $\alpha_p \searrow \alpha$ (estrictamente). Como f es continua por niveles, tenemos $L_{\alpha_p} f \xrightarrow{K} L_\alpha f$,por lo tanto, $L_\alpha f = \bigcap_{p=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k\geq p} L_{\alpha_k} f}$.

Sea U una vecindad (arbitraria) de x_0.

Suponga $U \cap \{f > \alpha\} = \phi$. Entonces, $U \cap \{f \geq \alpha_k\} = \phi$, para todo k. Por lo tanto, $U \cap [\bigcup_{k\geq p} L_{\alpha_k} f] = \phi$ para todo p. Así, $x_0 \notin \overline{\bigcup_{k\geq p} L_{\alpha_k} f}$, $\forall p$, de donde se sigue que $x_0 \notin \bigcap_{p=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k\geq p} L_{\alpha_k} f} = L_\alpha f$, lo cual es una contradicción. Además, $U \cap \{f > \alpha\} \neq \phi$ y $x_0 \in \overline{\{f > \alpha\}}$.

(ii)$\Rightarrow$(iii):

Para esto, suponga que f no es continua por niveles en $\alpha_0 \in (0, M)$. Entonces, existe una sucesión (α_p), con $\alpha_p \to \alpha_0$ y tal que

$$L_{\alpha_p} f \overset{K}{\nrightarrow} L_{\alpha_0} f \tag{1}$$

Sin pérdida de generalidad, debido al lema , podemos suponer $\alpha_p \searrow \alpha_0$ (estrictamente).

Así, tenemos para cada k , $L_{\alpha_k} f \subset L_{\alpha_0} f$ y ya que $L_{\alpha_0} f$ es cerrado, resulta que $\overline{\bigcup_{k \geq p} L_{\alpha_k} f} \subset L_{\alpha_0} f$, para cada p, es decir,

$$\bigcap_{p=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k \geq p} L_{\alpha_k} f} = \limsup L_{\alpha_p} f \subset L_{\alpha_0} f \tag{2}$$

Por otro lado, si $x \in \{f > \alpha_0\}$ entonces existe un $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) > \alpha_k$ para todo $k \geq p_0$. Además, $x \in L_{\alpha_k} f$, para todo $k \geq p_0$, lo que implica $x \in \overline{\bigcup_{k \in H} L_{\alpha_k} f}$ para todo H subconjunto cofinal de $\mathbb{N}$.

Por lo tanto, $x \in \bigcap_{H} \overline{\bigcup_{k \in H} L_{\alpha_k} f} = \liminf L_{\alpha_p} f$.

Ya que $\liminf L_{\alpha_p} f$ es cerrado y $\{f > \alpha_0\} \subset \liminf L_{\alpha_p} f$, concluimos que

$$\overline{\{f > \alpha_0\}} = L_{\alpha_0} f \subset \liminf L_{\alpha_p} f \tag{3}$$

Luego, de (2) y (3), se sigue que $L_{\alpha_p} f \overset{K}{\to} L_{\alpha_0} f$, contradiciendo (1), lo que concluye la prueba. ∎

Um corolário imediato es el siguiente resultado.

Corolario 1 : *Si f es continua por niveles entonces cualquier máximo local de f es necesariamente un máximo global.*

Ejemplo 5 : *En el ejemplo 1 todos los puntos $x \in (\frac{1}{2}, 1]$ son máximos locales própios.*

Ejemplo 6 : *En el ejemplo 2 , $x \neq 1$ no son máximos locales própios, puesto que $f(x) = 0$ para $x \neq 1$, y $x = 1$ es en efecto un máximo global de f.*

Observación 4 : *Los resultados de la sección de representación integral pueden ser extendidos para una clase de funciones discontinuas, para esto referimos a los trabajos de Chew y Zheng [12], Zheng [5], Torn y Zilinskas [13], donde tanbién son presentados algunos resultados numéricos. Esta sección es desarrollada en Falk [11].*

Observación 5 : *En el Teorema 4 la hipótesis $L_\alpha f$ cerrado para cualquier α es satisfecha, por ejemplo, por las funciones semicontinuas superiores, en particular es automáticamente satisfecha por las funciones continuas usuales. Otros trabajos en esta dirección son los de Martin [4], Zheng [6], Horts y Tach [9]. La presentación de esta sección está basada en el trabajo [10]. Un resumen interesante para condiciones que garantizan la optimalidad global es el trabajo de Hiriart-Urruty [8].*

References

[1] H. Kawasaki, Second order necessary conditions of the Kuhn-Tucker type under new constraints qualifications, JOTA 57 (2), 253-261 (1998)

[2] A. Ben-Tal, Second order and related extremality conditions in nonlinear programming, JOTA 31 (2), 143-165, 1980.

[3] G. Still, M. Streng, Optimality conditions in smooth nonlinear programming (Survey paper), JOTA 90 (3), 483-515, 1996.

[4] D.H. Martin, Connected level sets, minimizing sets, and uniqueness in optimization, JOTA 36 (1982), 71-91.

[5] Q. Zheng, Robust analysis and global optimization, Comp. Math. Applic. 21 (1991), 17-24.

[6] Q. Zheng, discontinuity and measurability of robust functions in the integral global minimization, Comp. Math. Applic. 25 (1993), 79-88.

[7] Q. Zheng, L. Zhang, Global minimization of constrained problems with discontinuous penalty functions, Comp. Mat. Applic. 37 (1999), 41-58.

[8] J.B. Hiriart-Urruty, Conditions for global optimality, Handbook of Global Optimization,

[9] R. Horts, P.T. Thach, A topological property of lines-arcwise strictly quasiconvex functions, J. Math. Anal. Appl. 134, 426-430, 1988.

[10] H. Román-Flores, M.A. Rojas-Medar, Level-continuity of functions and applications, Comp. Math. Appl. 38 (1999), 143-149.

[11] J.E. Falk, Conditions for global optimality in nonlinear programming, Operations Researc 21 (1973), 337-340.

[12] S.H. Chew, Q. Zheng, Integral global optimization, Lect. Not. Economic and Math. systems, Vol. 298, Springer-Verlag, 1988.

[13] A.A. Torn, A. Zilinskas, Global optimization, Lect. Not. Computer Science, Vol. 350, Springer-Verlag, 1988.

[14] L. Contesse Becker, Introducción a la optimización con restricciones

[15] O.L. Mangasarian, Nonlinear Programming, Classics in Applied Mathematics 10, SIAM.

[16] M.A. Hanson, On Sufficiency if the Kuhn-Tucker Conditions, J. Math. Anal. Appl. 80 , pp. 545-550, 1981.

[17] M.A. Hanson, Invexity and the Kuhn-Tucker Theorem, Journal of Mathematical Analysis and Applications 236, pp. 594-604 (1999).