O laplaciano: de Gauss a Beltrami até Hodge-de Rham

Roldão da Rocha Jr.*
E. Capelas de Oliveira†
Jayme Vaz Jr.‡

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estat. e Computação Científica
UNICAMP
13083-970 - Campinas(SP) - Brasil

Abstract

Apresentamos e discutimos o operador de Laplace (ou simplesmente laplaciano) do ponto de vista do teorema de Gauss, isto é, a partir dos conceitos de curvas coordenadas sobre variedades, de onde emerge naturalmente que a lei do inverso do quadrado da distância está associada à tridimensionalidade do espaço físico. Com o advento da aplicação da geometria de Riemann na física, o assim chamado *laplaciano generalizado* (também conhecido como operador de Laplace-Beltrami) passa a englobar a curvatura do espaço. A expressão para esse operador é discutida a partir dos símbolos de Christoffel de segunda ordem, considerando a imersão isométrica da variedade n-dimensional em um espaço euclideano (n+1)-dimensional. Finalmente generalizamos o laplaciano para qualquer multiforma diferencial (agora denominado por operador de Laplace-Hodge-de Rham), definindo-o por meio de operadores sobre uma variedade de dimensão finita munida de uma álgebra de Grassmann em cada ponto. Tais operadores são intrínsecos e com o uso de cartas mostramos a equivalência desta definição à sua expressão coordenada usual.

*roldao@ime.unicamp.br
†capelas@ime.unicamp.br
‡vaz@ime.unicamp.br

1 Introdução

O laplaciano tem sido usado desde o século XIX no estudo da dissipação térmica em corpos, vibração em membranas e também em suas diversas aplicações na eletrostática, através da equação originalmente dada por Laplace[1]. A sua forma original é a de um operador $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ que age sobre um *campo escalar* $\phi : M \to R$, onde M é uma variedade 3-dimensional. O espaço euclideano é um espaço afim que podemos pensar como um conjunto de pontos, em cada qual está definido um espaço vetorial V, onde $dim(V) = 3$.

Uma generalização em relação à forma original do laplaciano é escrever $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (x^2)^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial (x^n)^2}$. Mas o que significa um operador sobre um espaço n-dimensional se nosso mundo se revela a nossos sentidos em 3 dimensões espaciais?

A interpretação física de um universo n-dimensional até hoje é complicada[1]. Menos difícil é a interpretação de um universo com 4 dimensões. Com o surgimento da Teoria da Relatividade Restrita (TRR), o universo passou a ser denominado espaço-tempo[2]. A partir de então, o tempo não mais seria visto como uma coordenada independente, mas acoplado ao próprio espaço. *O próprio espaço e o tempo irão mergulhar nas sombras e somente um tipo de união entre eles sobreviverá.*[3]

No dia 10 de junho de 1854 Riemann legou ao mundo sua geometria e a reação da comunidade científica na época foi de adverti-lo que sua geometria era abstrata demais. Einstein, 61 anos mais tarde, mostrou que a geometria de Riemann era a base matemática de sua *Teoria da Gravitação Generalizada* (Einstein era averso ao nome *Teoria da Relatividade Geral*) e, portanto, tal geometria se mostrava não tão abstrata assim. Pela sua teoria, o movimento dos corpos obedecia à própria geometria do espaço. O conceito de *variedade* sustentava-se fisicamente a partir de então. Até os últimos anos do século XIX, o laplaciano, apesar de ser expresso em diversos outros sistemas de coordenadas além do sistema cartesiano, era um operador inerente a um espaço euclideano.

Com o advento da aplicação da geometria de Riemann na física, o espaço poderia ser curvo e os experimentos feitos após a Primeira Guerra Mundial davam indícios que tal curvatura era uma possível explicação para os fenômenos observados. A curvatura do espaço-tempo, é diretamente expressa a partir do tensor métrico $g^{\mu\nu} = g(e^\mu, e^\nu)$, onde $\{e^\alpha\}$ formam uma base do espaço cotangente em cada ponto da

[1]Nos perguntamos se a percepção sensorial de um universo n-dimensional, mesmo que indireta, seja possível.

[2]Atualmente na TRR o universo é denominado *espaço-tempo de Minkowski.*

[3]Citação de Hermann Minkowski em R. P. Feynman, *The character of Physical Law*, Penguin Books, Londres, 1965.

variedade.

A partir de então todos os conceitos, por exemplo o gradiente, o divergente, o rotacional e o laplaciano teriam que ser reformulados, de modo a expressarem corretamente o termo de curvatura do espaço[4]. Neste artigo iremos, a partir de considerações sobre a geometria da variedade em estudo, apresentar e discutir de três maneiras distintas a expressão para o laplaciano generalizado (que deve englobar a informação da curvatura do espaço), acompanhando o desenvolvimento das estruturas matemáticas vigentes na época. Veremos também que, através do laplaciano, podemos mostrar que toda força que pode ser descrita pelo gradiente de um potencial tem ação inversamente proporcional ao quadrado da distância devido à tridimensionalidade do espaço físico. Para $dim(V) = n$, com $n \neq 3$, veremos que isso não é verdade.

Uma generalização da TRR à Cosmologia denominada *Relatividade Projetiva* (RP) trata o espaço-tempo de Minkowski como um espaço tangente a uma variedade S^4 difeomorfa[2] ao *Universo de de Sitter*. Esse universo é uma das soluções da equação de Einstein e nele cada observador é centro de um desses espaços tangentes ao longo do universo. Diversos conceitos foram reformulados, tais como a massa, que passou a ser definida na década de 40, segundo a RP, como o autovalor do operador de Laplace-Beltrami. Forças conservativas ainda podiam ser expressas pelo gradiente de um campo escalar, mas o operador ∇ foi sutilmente elaborado de tal forma a englobar a curvatura da variedade em questão. É claro que, em toda generalização, a teoria anterior deve ser obtida como um caso particular. Na RP, o espaço-tempo de Minkowski é obtido fazendo o raio da hiperesfera S^4 tender ao infinito[4, 5, 6]. Todas as equações radiais são reconduzidas às equações de campos clássicos da TRR [7, 8].

Todo o desenvolvimento descrito acima foi feito através do uso de coordenadas. Mas um tratamento independente das coordenadas pode ser feito. O estudo das variedades segundo o cálculo de formas diferenciais de Cartan, onde essas formas satisfazem a uma álgebra de Grassmann, é apropriado ao estudo dos problemas sem o uso de coordenadas. O uso de uma carta (sistema de coordenadas locais) é criterioso a fim de estabelecermos uma correspondência local entre a vizinhança de um ponto sobre a variedade e o R^n.

Em cada ponto da variedade construímos uma estrutura algébrica, dotando o espaço vetorial do *produto exterior*. Com a aquisição de uma métrica, essa estrutura é uma álgebra de Grassmann, que generaliza a álgebra de Gibbs[5] e o cálculo vetorial usual. Através dos conceitos de multivetores e formas diferenciais sobre

[4]Geralmente esse laplaciano generalizado a espaços curvos é chamado de *Operador Laplace-Beltrami [1]*.

[5]Essa álgebra somente é válida para o espaço tridimensional.

variedades, discutimos uma forma mais elaborada para a expressão do laplaciano, além das duas demonstrações prévias, a primeira utilizando uma variedade imersa isometricamente em um espaço euclideano e a segunda utilizando os conceitos da geometria de Riemann e derivadas covariantes. Com isso ilustramos o enriquecimento da estrutura matemática quando essa é munida de uma álgebra de Grassmann sobre uma variedade.

Este artigo está organizado da seguinte maneira: na seção 2 demonstramos a expressão para o laplaciano generalizado a partir do Teorema de Gauss, utilizando os conceitos de curvas coordenadas sobre variedades. Ilustramos o uso de tal expressão na subseção 2.2, provando que a lei do inverso do quadrado da distância está ligada à tridimensionalidade do espaço físico. Na seção 3 são usados conceitos da geometria de Riemann para a discussão do laplaciano generalizado; esta expressão é um pouco mais geral que a primeira, porém ainda temos que considerar a variedade imersa isometricamente em um espaço de maior dimensão. Na seção 4 há uma definição mais simples para o laplaciano, através da construção de uma álgebra de Grassmann sobre uma variedade. São utilizados operadores intrínsecos à variedade e não mais é necessário o uso de coordenadas nem supor a imersão isométrica da variedade em um espaço de maior dimensão.

2 O laplaciano a partir do teorema de Gauss

2.1 A expressão para o laplaciano

Nesta primeira demonstração iremos adotar uma variedade euclideana E onde em cada ponto está definido um espaço vetorial $V \simeq T_x(E)$, onde $T_x(E)$ é o espaço tangente a E no ponto $x \in E$, dotado de uma métrica $g : V \times V \to R$. Para o estabelecimento de um sistema de coordenadas criamos uma carta na vizinhança de cada ponto dessa variedade ao R^n.

Seja um ponto $\vec{r} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ do sistema cartesiano e um outro sistema de coordenadas, no qual $\vec{r} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. A transformação dessas coordenadas é definida como:

$$x_i = x_i[y_j] \qquad\qquad i, j = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Se a matriz jacobiana $J \equiv \dfrac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}$ for não singular, então podemos escrever

$$y_j = y_j[x_i] \qquad\qquad i, j = 1, 2, 3 \ldots, n.$$

Pode-se definir *hipersuperfícies coordenadas* quando para algum $h \in \mathcal{N}$ tal que $1 \leq h \leq n$, y_h é constante. As *curvas coordenadas* y_w, para algum $w \in \mathcal{N}$ tal que

$1 \leq w \leq n$ são definidas fixando-se todas as coordenadas curvilíneas e deixando somente y_w variar.

Um vetor tangente à curva, digamos, y_j, é dado por $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial y_j}$. Define-se o conjunto $\zeta_0 = (e_{y_1}, \ldots, e_{y_n})$ da seguinte maneira:

$$e_{y_i} = \frac{1}{h_{y_i}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i}$$

onde $h_i \equiv \left\| \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} \right\|$.

Para a contrução do operador de Laplace n-dimensional válida para um espaço curvo, consideramos o produto escalar $g(e_{y_i}, e_{y_j}) = \delta_{y_i y_j}$, isto é, primeiramente para o caso particular de um espaço euclideano. Para um dado campo escalar

$$\Phi : E \rightarrow \mathcal{R}$$

o laplaciano, $\nabla^2\Phi$, pode ser calculado por $\nabla \cdot \nabla\Phi$.[6]

Seja $\gamma_i : V \rightarrow \mathcal{R}$, com a seguinte propriedade:

$$\nabla\Phi = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \; e_{y_i}$$

Torna-se necessário encontrar uma expressão que defina γ_i. Tomando-se a diferencial total do campo escalar Φ, pode-se expressá-lo como o diferencial total de cada componente y_i da seguinte maneira:

$$d\Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} dy_i = \nabla\Phi \cdot d\vec{r}$$

O elemento de arco $d\vec{r}$ é definido a partir da expressão:

$$d\vec{r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} \; dy_i$$

logo

$$d\Phi = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \; h_{y_i} \; dy_i$$

já que

$$e_{y_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} = \frac{1}{h_{y_i}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} = h_{y_i}$$

[6] O divergente de um campo vetorial genérico é definido como o traço da matriz Jacobiana.

Podemos comparar as duas expressões obtidas para o diferencial total $d\Phi$, onde encontramos:

$$\gamma_i = \frac{1}{h_{y_i}} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}$$

Portanto

$$\nabla \Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_{y_i}} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \, e_{y_i}$$

Da mesma forma feita para o gradiente, podemos obter uma forma explícita, similar para o divergente, como faremos a seguir.

Pelo teorema de Gauss, o divergente de um vetor $\vec{V} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ é dado por:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\int \vec{V} \cdot d\vec{\sigma}}{\int d\tau}$$

sendo o diferencial de volume igual a:

$$d\tau = \prod_{j=1}^{n} h_j \, dy_j$$

A integral de área relativa às hipersuperfícies y_h é dada por:

$$\int \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} = \left[V_h \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq h}}^{n} h_i + \frac{\partial}{\partial y_h} \left(V_h \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq h}}^{n} h_i \right) dy_h \right] \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq h}}^{n} dy_h - V_h \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq h}}^{n} h_i dy_i$$

logo,

$$\int \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} = \frac{\partial}{\partial y_h} \left(V_h \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq h}}^{n} h_i \right) \prod_{i=1}^{n} dy_h$$

Ao fazer h tomar o valor de todos os índices $(1, 2 \ldots, n)$, pode-se fazer o mesmo procedimento anterior para todas as *hiperfaces* do hiperelemento infinitesimal de volume contido no $\mathcal{R}^n$. Para obtermos $\nabla \cdot \vec{V}$, basta dividir a expressão para a integral de fluxo pelo elemento de volume após somar as contribuições das demais hiperfaces:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} h_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (h_k V_j) \right]$$

Finalmente, para a obtenção do laplaciano, lembramos que

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \nabla \Phi$$

Daí

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} h_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{1}{h_j}\left(\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} h_k\right)\frac{\partial \Phi}{\partial y_j}\right]$$

Consideremos agora uma forma bilinear simétrica definida em cada ponto pelos seus coeficientes tensoriais

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_j} \tag{1}$$

Na geometria riemanniana, os g_{ij} são tensores[7]simétricos que relacionam diretamente o elemento de arco com deslocamentos infinitesimais nas coordenadas curvilíneas, através da expressão $ds^2 = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$, onde está implícita a notação de Einstein para os índices.

Visto que temos

$$e_{y_i} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i}$$

onde $h_i = ||\partial\vec{r}/\partial y_i||$, é claro que $g_{ij} = e_{y_i} \cdot e_{y_j} h_i h_j = 0$ para $i \neq j$ pois as coordenadas são ortogonais e

$$g_{ii} = e_{y_i} \cdot e_{y_i} h_i^2 = h_i^2$$

pois a base é ortogonal.

A partir das duas últimas equações podemos escrever

$$g_{ij} = h_i h_j \delta_{ij} \tag{2}$$

onde δ_{ij} é a função delta de Kronecker.

Ao calcularmos $\det[g_{ij}]$, somente são não-nulos os elementos da diagonal, daí:

$$g \equiv \det[g_{ij}] = \prod_{i=1}^{n} h_i^2 \tag{3}$$

Lembrando da equação obtida para o laplaciano a partir do Teorema de Gauss podemos escrever

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{g^{1/2}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{g^{1/2}}{g_{ii}}\frac{\partial \Phi}{\partial y_j}\right) \tag{4}$$

Essa primeira demonstração foi feita utilizando-se uma matemática um pouco antiga e precária. Seu resultado é a fórmula do laplaciano generalizado, dependente

[7]Na Relatividade Geral é comum denominarmos o tensor métrico por *Potencial Gra-vitacional*; em verdade a geometrodinâmica oferece base para essa denominação[8].

do sistema de coordenadas e válido somente para métricas diagonais. Não foi feita qualquer distinção entre vetores e seus respectivos covetores, pertencentes ao espaço vetorial dual V^*.

2.2 A lei do inverso do quadrado da distância

Aqui apresentamos o fato de que a lei do inverso do quadrado da distância está associada à tridimensionalidade do espaço físico. Introduzimos as coordenadas hiperesféricas $(r, \theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{n-2}, \varphi)$ e estabelecemos uma relação direta através de dois sistemas de coordenadas, definida por:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\theta_1 \\
x_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\
x_3 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\
\ldots &= \ldots \\
x_{n-1} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\varphi \\
x_n &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\sin\varphi
\end{aligned}$$

sendo $r < 0$; $0 < \theta_j < \pi$, com $j = 1, 2, 3, \ldots, n-2$ e $0 \leq \varphi < 2\pi$.

A partir dessa definição, é possível obter uma expressão para o laplaciano em coordenadas hiperesféricas. Definimos:

$$\begin{aligned}
h_1 &= \|\partial\vec{r}/\partial\theta_1\| = r \\
h_2 &= \|\partial\vec{r}/\partial\theta_2\| = r\sin\theta_1 \\
h_3 &= \|\partial\vec{r}/\partial\theta_3\| = r\sin\theta_1\sin\theta_2 \\
\ldots &= \ldots \\
h_k &= \|\partial\vec{r}/\partial\theta_k\| = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\ldots\sin\theta_{k-1} \\
h_{n-1} &= \|\partial\vec{r}/\partial r\| = 1 \\
h_n &= \|\partial\vec{r}/\partial\varphi\| = r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}
\end{aligned}$$

Dessa maneira explicitamos a equação de Laplace em tais coordenadas a seguir:

$$\begin{aligned}
\nabla^2\Phi = r^{-n-1}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + r^{-2}(\sin\theta_1)^{2-n}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left[(\sin\theta_1)^{n-2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_1}\right] \\
+r^{-2}(\sin\theta_1)^{-2}(\sin\theta_2)^{3-n}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left[(\sin\theta_2)^{\mathrm{n}-3}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_2}\right] \\
+r^{-2}(\sin\theta_1\sin\theta_2)^{-2}(\sin\theta_3)^{4-n}\frac{\partial}{\partial\theta_3}\left[(\sin\theta_3)^{n-4}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_3}\right] + \cdots \\
\cdots + r^{-2}(\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-3})^{-2}(\sin\theta_{n-2})^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-2}}\left[(\sin\theta_{n-2})\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_{\mathrm{n}-2}}\right]
\end{aligned}$$

$$+r^{-2}(\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2})^{-2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=0$$

Consideremos agora o caso radial, isto é, suponha que $\Phi = \Phi(r)$, ou seja, o campo escalar não é dependente de seus $n-1$ parâmetros angulares. Portanto para $j = 1, 2, 3, \ldots, n-2$, podemos escrever

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_j}=0, \qquad\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}=0$$

Assim, a equação de Laplace para n dimensões fica restrita à dependência radial:

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}h_i}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left[\prod_{\substack{k=1\\k\neq n-1}}^{n}h_k\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right]\right)=0$$

Substituindo os valores para h_k, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ obtidos na seção anterior, a expressão acima torna-se:

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right]=0$$

Como o vetor posição $\mathbf{r}$ não está definido para $r = 0$, pois há a hipótese de que $J \neq 0$, e, além disso o campo é escalar $\Phi = \Phi(r)$ (ou seja, só há dependência radial), podemos escrever:

$$\frac{d}{dr}\left[r^{n-1}\frac{d\Phi}{dr}\right]=0$$

Integrando ambos os lados da equação obtemos:

$$r^{n-1}\frac{d\Phi}{dr}=c \qquad\qquad c\in\mathcal{R}.$$

Da expressão anterior podemos escrever

$$\frac{d\phi}{dr}dr=\frac{c}{r^{n-1}}dr$$

e, efetuando a integral, obtemos:

$$\Phi(r)=\frac{c}{r^{n-2}}\frac{1}{2-n}+d \qquad\qquad c,d\in\mathcal{R}$$

Ora, essa equação não está definida no plano. Nesse caso (para n=2) a expressão a ser integrada torna-se:

$$\frac{d\Phi}{dr}dr=\frac{c}{r}dr$$

ou ainda

$$\Phi(r) = c \ln r + k,$$

onde c e k são constantes.

A partir do Teorema fundamental para integrais de linha, isto é, seja

$$f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$$

um campo vetorial contínuo em um conjunto aberto conexo $S \subseteq \mathcal{R}^n$ e suponha que a integral de linha de f seja independente do caminho em S.

Defina

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{\vec{a}}^{\vec{r}} f \cdot d\alpha$$

onde $\vec{a} \in S$ e α é uma trajetória suave por partes que liga $\vec{a}$ a $\vec{r}$. Então o gradiente $\nabla\Phi$ existe e é dado por

$$\nabla\Phi(\vec{r}) = f(\vec{r}),\ \forall \vec{r} \in S.$$

Campos vetoriais

$$f : \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$$

tais como o elétrico e o gravitacional diminuem sua ação proporcionalmente ao inverso do quadrado da distância. Os ângulos θ_j e φ correspondem aos agentes de posicionamento angular do vetor, sendo portanto parâmetros de rotação. Toda rotação é uma transformação unitária[8], e, como tal, deixa inalterada a norma do vetor.

Portanto podemos considerar novamente que $\Phi = \Phi(r)$, para estudar o comportamento de campos vetoriais genéricos que podem ser obtidos de $\Phi(\vec{r})$ diretamente, pelo teorema acima.

$$\nabla\Phi(r) = \frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{c}{r^{n-1}} = f(\vec{r})$$

Conclui-se que o único espaço que a lei do inverso do quadrado da distância é válido é o E^3 e qualquer variação isomorfa de tal espaço.

3 O laplaciano e os símbolos de Christoffel

Nesta segunda demonstração para o laplaciano generalizado supomos ainda que uma variedade M n-dimensional esteja imersa isometricamente em um espaço euclideano de dimensão m, onde $n \leq m$. Estamos omitindo a composição $\gamma \circ \Psi : M \to R$, onde

[8]Definida por um operador U, que satisfaz a seguinte condição: $U^{-1} = U^{\dagger}$.

$\gamma : R^n \rightarrow R$ é uma aplicação real de vetores de R^n e $\Psi : M \rightarrow R^n$ é uma carta, ou seja, o estabelecimento de um sistema de coordenadas.

Considere um campo vetorial $\mathbf{V} : M \rightarrow \mathcal{R}^n$, o qual pode ser expresso por suas componentes $\mathbf{V} = V^i e_i$, em cada ponto[9] de M. Portanto,

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y^j} = \frac{\partial V^i}{\partial y^j} e_i + V^i \frac{\partial e_i}{\partial y^j} \tag{5}$$

Como $\dfrac{\partial e_i}{\partial y^j}$ é um vetor do espaço, podemos expressá-lo como uma combinação linear dos vetores da base

$$\frac{\partial e_i}{\partial y^j} = \Gamma^k_{ij} e_k$$

Lembrando que $e^m \cdot e_k = \delta^m_k$ temos a seguinte definição dos *coeficientes de conexão*, mais comumente chamados de *símbolos de Christoffel de segunda ordem*[10]:

$$\Gamma^k_{ij} = e^k \cdot \frac{\partial e_i}{\partial y^j}.$$

Os símbolos de Christoffel de *primeira ordem* são definidos por

$$[ij, k] = g_{mk} \Gamma^k_{ij} = g_{mk} e^m \cdot \frac{\partial e_i}{\partial y^j} = e_k \cdot \frac{\partial e_i}{\partial y^j}$$

Dessa forma

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = e_j \cdot \frac{\partial e_i}{\partial y^k} + e_i \cdot \frac{\partial e_j}{\partial y^k} = [ik, j] + [jk, i].$$

Então é possível reescrever a eq.(5) como

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y^j} = \left(\frac{\partial V^i}{\partial y^j} + V^k \Gamma^i_{kj} \right) e_i \tag{6}$$

Quando $i = j$

$$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2} g^{im} \left[\frac{\partial g_{im}}{\partial y^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial y^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial y^m} \right]$$

Rearranjando alguns índices mudos, escrevemos:

$$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial y^k}$$

[9] Daqui em diante estará implícita a convenção de Einstein para somatórios.

[10] Tais símbolos são simétricos em relação aos índices covariantes.

Seja $g' = det[g_{ij}]$. Da definição dos determinantes temos

$$\frac{\partial g}{\partial g_{im}} = \Delta^{im} \equiv g' g^{im}$$

onde Δ^{im} é a matriz dos cofatores. Utilizando a regra da cadeia

$$\frac{\partial g'}{\partial g_{im}} = \frac{\partial g'}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial g_{im}}$$

podemos escrever

$$\frac{\partial g'}{\partial g_{im}} = \frac{\partial g_{im}}{\partial y_j} g' g^{im}$$

de onde segue que

$$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial y^k} = \frac{1}{g^{1/2}}\frac{\partial g^{1/2}}{\partial y^k} \left(= \frac{1}{g^{1/2}} \left[\frac{1}{2g^{1/2}} \frac{\partial g}{\partial y^k} \right] \right)$$

A partir dos resultados acima e utilizando a eq.(2), obtemos a seguinte expressão para o divergente do campo vetorial:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V^i}{\partial y^i} + V^k \frac{1}{g^{1/2}} \frac{\partial g^{1/2}}{\partial y^k} = \frac{1}{g^{1/2}} \frac{\partial}{\partial y^k} \left[g^{1/2} V^k \right]$$

Da definição de gradiente de vetores contravariantes

$$V^i = g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial y^k}$$

chegamos à fórmula para o laplaciano generalizado n-dimensional em coordenadas curvilíneas:

$$\nabla^2 \psi = \nabla \cdot \nabla \psi = \frac{1}{g^{1/2}} \frac{\partial}{\partial y^k} \left[g^{1/2} g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial y^i} \right] \tag{7}$$

4 O laplaciano de Hodge-de Rham

Dada uma variedade M, em cada ponto de M definimos um espaço vetorial V, tangente a M, o qual podemos munir com um produto denominado *produto exterior*[10]. O par $(V, \wedge)$ é denominado *álgebra exterior*. Ao considerarmos um vetor $v \in V$, temos associado a ele um elemento $\alpha : V \to \mathcal{R}$ (chamado de *funcional linear*) do espaço dual V^*.

Ao efetuarmos a multiplicação exterior entre 1-formas, obtemos 2-formas, 3-formas, ..., k-formas[11] ($1 \leq k \leq n$), dependendo do número de vezes que efetuamos o produto exterior (o mesmo vale para os vetores). Cada k-forma pertence a uma álgebra, digamos $\Lambda^k(V)$. Além disso essa álgebra não é fechada em relação ao produto exterior, pois se $\Psi_k \in \Lambda^k(V)$ e $\Psi_m \in \Lambda^m(V)$ então $\Psi_k \wedge \Psi_m \in \Lambda^{m+k}(V)$. Para contornarmos essa situação não desejada, definimos a álgebra $\Lambda(V) = \oplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(V)$. Dada uma base $\{e_i\}$ de vetores unitários de V e a correspondente base dual $\{e^i\}$, onde no caso de bases coordenadas $e^i = dx^i$ e $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ temos $dxi(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_i^j$, podemos escrever uma multiforma diferencial $\Psi \in \Lambda(V)$ como

$$\Psi = a + a_i e^i + a_{ij} e^i \wedge e^j + a_{ijk} e^i \wedge e^j \wedge e^k + \cdots + b e^1 \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge e^n \qquad (8)$$

Além disso se admitirmos que M tenha a métrica $g : V^* \times V^* \to \mathcal{R}$, definimos a operação linear *correlação* como $\tau^{-1}(\alpha)(\beta) = g(\alpha, \beta)$.

O laplaciano[12] pode ser definido em termos da derivada exterior $d : \Lambda^k(V) \to \Lambda^{k+1}(V)$ e do operador codiferencial $\delta : \Lambda^k(V) \to \Lambda^{k-1}(V)$[13]. Dado uma multiforma $\Psi \in \Lambda(V) = \oplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(V)$ o laplaciano é então definido[13] [14] por

$$\Delta \Psi = -(d\delta + \delta d)\Psi \qquad (9)$$

A fim de encontrarmos a mesma expressão que obtivemos nas seções anteriores, fazemos $\Psi = f \in \Lambda_0(V)$, a álgebra das aplicações reais.

Utilizamos o *operador dual de Hodge* $* : \Lambda^p(V) \to \Lambda^{n-p}(V)$, que pode ser definido como

$$*df = \tau^{-1}(df) \rfloor \eta \qquad (10)$$

onde $\eta = e^1 \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge e^n$ é o elemento de volume unitário no ponto da variedade. Pela definição de d, $d^2 f = d(df) = 0$, escrevemos o laplaciano como

$$\Delta f = \delta df = *^{-1} d * (df) \qquad (11)$$

Escrevemos o diferencial de f como combinação linear das 1-formas da base do espaço cotangente à variedade (em um ponto arbitrário) $df = \dfrac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$, interpretada nos livros básicos de cálculo como a *regra da cadeia*.

[11] Para uma interpretação geométrica plausível dessas entidades, um elucidador artigo é [11]

[12] Em alguns textos encontramos tal operador com o nome de *Operador de Laplace-Hodge-de Rham* [12].

[13] Aqui definimos com um sinal negativo a mais, o que não é incomum.

Podemos escrever as 1-formas unitárias como combinação linear das 1-formas $\{dx^j\}$

$$e^i = h^i_j dx^j. \tag{12}$$

Considerando η^{ij} a métrica (p,q) de Lorentz $(p+q=n)$ é claro que

$$g(e^i, e^j) = \eta^{ij} = g(h^i_k dx^k, h^j_l dx^l) = h^i_k h^j_l g(dx^k, dx^l) = h^i_k h^j_l g^{kl}, \tag{13}$$

portanto

$$\eta^{ij} = h^i_k h^j_l g^{kl}. \tag{14}$$

Tomando-se o determinante em ambos os lados da equação acima encontramos que

$$1 = \frac{[det(h)]^2}{detg'} \tag{15}$$

onde denominamos $det(g') \equiv g$ o determinante da matriz g_{kl} que é dada por $g_{kl}g^{lm} = \delta^m_k$. Com o elemento de volume $\eta = \mid det(h) \mid dx^1 \wedge dx^2 \cdots \wedge dx^n$, concluímos que

$$\eta = g^{1/2} dx^1 \wedge dx^2 \cdots \wedge dx^n. \tag{16}$$

Pela relação entre vetores e covetores respectivamente sobre os espaços tangentes e cotangentes à variedade notamos que

$$\tau^{-1}(dx^i) = g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j} \tag{17}$$

Dessa maneira escrevemos o operador dual de Hodge aplicado à diferencial de f como:

$$\begin{aligned} \Rightarrow *df &= \left(g^{1/2}\frac{\partial f}{\partial x^i} g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\rfloor(dx^1 \wedge dx^2 \cdots \wedge dx^n) \\ &= g^{1/2}\frac{\partial f}{\partial x^i} g^{ij}(-1)^{j-1} dx^1 \wedge dx^2 \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n \end{aligned} \tag{18}$$

O produto $dx^1 \wedge dx^2 \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n$ simboliza o produto exterior das n 1-formas $\{dx^l\}$ *exclusive* a 1-forma dx^j. Agora precisamos tomar a diferencial desse termo acima para continuar o cálculo do laplaciano e a conseqüente correspondência entre a definição dada e a fórmula final da seção anterior. Então,

$$d * df = (-1)^{2j-1}\left[g^{1/2} g^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial f}{\partial x^i} g^{1/2}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^j} + + \frac{\partial f}{\partial x^i} g^{ij}\frac{1}{2g^{1/2}}\frac{\partial g}{\partial x^j}\right]\eta g^{-1/2} \tag{19}$$

Agora devemos calcular $- *^{-1} d * df$. Como o operador dual de Hodge é linear, portanto temos que calcular $*dx^1 \wedge dx^2 \cdots \wedge dx^n$. Algumas propriedades podem ser demonstradas, utilizando-se simplesmente o operador dual de Hodge:

$$*1 = \eta = g^{1/2}(dx^1 \wedge dx^2 \cdots \wedge dx^n) \Rightarrow **1 = g^{1/2} * (dx^1 \wedge dx^2 \cdots \wedge dx^n)$$
$$\Rightarrow *(dx^1 \wedge dx^2 \cdots \wedge dx^n) = \frac{1}{g^{1/2}}$$

Então dada uma variedade e uma carta local (M, ϕ) podemos escrever o laplaciano como

$$\Delta f = - *^{-1} d * df = g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^j} + \frac{\partial f}{\partial x^i} g^{ij} \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^j} =$$
$$= \frac{1}{g^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(g^{1/2} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \tag{20}$$

A expressão $\Delta\Psi = -(d\delta + \delta d)\Psi$ generaliza o laplaciano para qualquer multiforma diferencial, construída a partir de uma forma diferencial por meio do produto exterior. Excetuando-se a expressão acima, as expressões anteriores, obtidas nas seções 2 e 3, somente eram válidas para uma 0-forma (campo escalar). Com o formalismo das formas diferenciais de Cartan sobre uma variedade munida em cada ponto de uma álgebra de Grassmann, generalizamos o conceito de laplaciano.

5 Conclusões

Nesse artigo vimos a evolução das estruturas geométricas usadas no desenvolvimento do operador laplaciano. Nessa seqüência, sempre são construídas estruturas mais ricas que acabam por simplificar a teoria em questão. Com essa terceira demonstração generalizamos o conceito de laplaciano com o uso das formas diferenciais de Cartan, que satisfazem a uma álgebra de Grassmann. A partir de uma definição sucinta em termos de operadores sobre uma variedade, onde essa é munida de uma álgebra de Grassmann em cada ponto, chegamos à expressão para o laplaciano generalizado outrora construído com estruturas menos ricas. Além disso, o laplaciano pode ser aplicado a multiformas diferenciais, não somente a campos escalares (0-formas), como era feito até então.

Também nesse último caso não foi preciso supor que a variedade estivesse imersa em um espaço de maior dimensão. Não necessitamos do uso de coordenadas; entretanto vimos que essa definição é equivalente ao laplaciano generalizado quando fazemos uso de uma carta e seu correspondente sistema de coordenadas. A construção de estruturas sobre uma variedade acaba por aumentar o grau de aplicabilidade do formalismo desenvolvido: além de chegarmos, na última seção, aos mesmos resultados das seções anteriores, conseguimos descrever teorias que não eram descritíveis pelos formalismos anteriores. Um caso particular é a aplicação desses formaslismo em teorias de Gauge e teorias supersimétricas.

Referências

1. Laplace, Mémoire sur la theorie de l'anneaux de Saturne, 1787.

2. R. Prasad, *The de Sitter Model for elementary particles with nonstatic frame*, N. Cimento **52A**, 972 (1967).

3. E. Schrödinger, *Expanding Universes*, Cambridge, 1957.

4. Roldão da Rocha Jr. and E. Capelas de Oliveira, *Potenciais gravitacionais e a equação de Laplace em diversas métricas*, Relatório de Pesquisa RP-56/98, IMECC, UNICAMP.

5. Roldão da Rocha Jr. and E. Capelas de Oliveira, *Radial field equations in the de Sitter Universe*, Relatório de Pesquisa RP-62/98, IMECC, UNICAMP.

6. Roldão da Rocha Jr. and E. Capelas de Oliveira, *The Prasad metric and the topology of the de Sitter Universe*, Relatório de Pesquisa RP-76/98, IMECC, UNICAMP.

7. Roldão da Rocha Jr. and E. Capelas de Oliveira, *Campos Dinâmicos no Universo de de Sitter*, Resumos XXI CNMAC, p. 241 (1998).

8. Roldão da Rocha Jr. and E. Capelas de Oliveira, *On the gravitational Potentials and the Riccati like equations*, Relatório de Pesquisa RP-24/99, IMECC, UNICAMP.

9. C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman, San Francisco (1973).

10. Pertti Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

11. Bernard Jancewicz, *The extended Grassmann algebra of* $\mathcal{R}^{\ni}$, em *Clifford (geometric) algebras with applications in physics, Mathematics and Engineering*, editado por W. Baylis (editor), Birkhäuser, Boston, 1995.

12. G. de Rham, *Variétés Différentiables, Formes, Courants, Formes Harmoniques*, Hermann, Paris (1955).

13. Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette and M. Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds and Physics*, North-Holland, Amsterdam (1982).

14. R. Bishop and S. Goldberg, *Tensor Analysis on Manifolds*, Dover, New York, 1995.