Potenciais gravitacionais e a equação de Laplace em diversas métricas

R. Rocha Jr.
Instituto de Física Gleb Wataghin - UNICAMP
13083-970 - Campinas(SP) - Brasil
e-mail: roldao@ime.unicamp.br

e

E. Capelas de Oliveira
Departamento de Matemática Aplicada - IMECC - UNICAMP
13081-970 - Campinas(SP) - Brasil
e-mail: capelas@ime.unicamp.br

1 Resumo

A partir dos símbolos de Christoffel de primeira e segunda ordens é demonstrada a expressão para o laplaciano n-dimensional generalizado em coordenadas curvilíneas (também chamado de operador Laplace-Beltrami).

No presente texto resolvemos a equação de Laplace no Universo de de Sitter ($\mathcal{D}$), que é uma solução da equação de Einstein [1] com constante cosmológica não-nula a curvatura constante $1/R^2$, imersa em um espaço euclideano 5-dimensional [2]. Embora possa ser tratado através de um isomorfismo como uma variedade 4-dimensional (S^4), $\mathcal{D}$ não é o espaço onde a Relatividade Especial vale, pois ela é tratada em espaços munidos da geometria de Minkowski [3], onde o tensor curvatura é nulo. Queremos adaptar a Relatividade Especial à cosmologia, distinguindo o espaço absoluto dos infinitos espaços relativos a cada observador [4, 5](cada um deles constitui um

espaço tangente, também chamados de *espaço-tempo projetivo de Castelnuovo* ($\mho(x)$).

Surge a necessidade de uma correspondência entre $\mathcal{D}$ e $\mho(x)$ em cada ponto x de $\mathcal{D}$. Para isso utilizamos homeomorfismos entre esses espaços, através de projeções estereográficas, obtendo as métricas de Riemann [6], Börner-Dürr [2] e Beltrami [7]. Finalmente, através da parametrização dos espaços externo e interno são obtidas as métricas de Prasad [8] relativas a cada um desses dois espaços. Com uma diferente parametrização independente do raio do Universo [9], é possível voltar ao caso clássico.

A partir dos tensores métricos (também chamados de *potenciais gravitacionais* [10] ou *campos dinâmicos* [11]) relativos a cada uma das métricas acima, resolvemos a equação de Laplace generalizada para cada métrica. Com o uso do método usual de separação de variáveis, concluímos que a parte angular é a mesma para cada uma das seis métricas obtidas a qual admite como solução os harmônicos esféricos, enquanto que a parte radial difere, mas o caso clássico é obtido através do limite $R \to \infty$, onde R é o raio de $\mathcal{D}$. Todas as seis equações radiais são reconduzidas a seis equações de Riccati, através de uma mudança conveniente de variável.

Finalmente, como apêndice, fazemos a demonstração de que $\mathcal{D}$ apresenta uma topologia $S^3 \times \mathcal{R}$, introduzindo um difeomorfismo entre essas duas variedades Riemannianas.

2 Introdução

O espaço relativo a cada observador centrado em seu sistema referencial cartesiano $\mho(x)$ constitui a área de atuação da Relatividade Restrita. Considerando dois observadores distintos, habitantes de $\mathcal{D}$, em relação a cada um deles temos os espaços tangentes $\mho(x_1)$ e $\mho(x_2)$. A união de todos os espaços tangentes e seus respectivos pontos de tangência constitui o *fibrado tangente* de $\mathcal{D}$, que é uma variedade 8-dimensional. Esse resultado segue da análise em variedades, já que $\mathcal{D}$ é uma variedade 4-dimensional. A possibilidade do estabelecimento de coordenadas projetivas segue da orientabilidade de $\mathcal{D}$ [12].

As diversas métricas obtidas por tais homeomorfismos entre $\mathcal{D}$ e $\mho(x)$, $\forall x \in \mathcal{D}$ são distintas pela natureza de sua projeção. As métricas de Riemann e Börner-Dürr são obtidas fazendo-se a projeção a partir do pólo norte, enquanto que a métrica de Beltrami é originada por uma projeção a partir do centro de $\mathcal{D}$.

Além disso, podemos escrever $\mathcal{D} = \mathcal{D}_- + \mathcal{D}_+$, onde $\mathcal{D}_-$ é o espaço interno e $\mathcal{D}_+$ é o espaço externo, sendo que eles estão separados pelo cone de luz: nenhum evento em $\mathcal{D}_-$ pode ser percebido por um observador situado em $\mathcal{D}_+$ e vice-versa. A cada um desses espaços associamos um grupo de simetria: $\mathcal{D}_+ \to SO_{4,1}$ e $\mathcal{D}_- \to SO_{3,2}$. A partir do tratamento de tais espaços através dos grupos a eles associados, é possível definir uma forma quadrática e conseqüentemente as métricas interna e externa. Como no presente trabalho consideramos a métrica de Prasad em coordenadas não-estáticas, parametrizamos $\mathcal{D}_-$ e $\mathcal{D}_+$ utilizando 5 coordenadas paramétricas. É claro que as equações radiais diferem em $\mathcal{D}_-$ e $\mathcal{D}_+$ pelos sinais e comportamento oscilatório ou hiperbólico da coordenada temporal, concordando com o previsto por Dirac. Vemos que, nesse caso, as duas equações radiais são reduzidas a uma só equação de Riccati. O caso clássico é obtido com uma parametrização independente do raio do de $\mathcal{D}$.

3 O laplaciano generalizado a partir dos coeficientes de conexão de Christoffel

Seja um campo escalar $\psi : D_\psi \subseteq \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$. Escrevemos o diferencial desse campo escalar $d\psi = \dfrac{\partial \psi}{\partial y^i} dy^i$ em relação às coordenadas curvilíneas y^i $(1 \leq i \leq n)$. A lei do quociente [13] nos diz que $\dfrac{\partial \psi}{\partial y^i}$ deve ser um vetor covariante, pois os diferenciais dq^i são contravariantes. Podemos, então, escrever o gradiente do campo como $\nabla \psi = \dfrac{\partial \psi}{\partial y^i} e^i$, onde os e^i são os vetores tangentes às curvas coordenadas. Esses podem ser escritos como $e^i = \dfrac{1}{h_i} \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial y^i}$, onde $h_i \equiv \left|\left| \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial y^i} \right|\right|$.

Considere agora um campo vetorial $\mathbf{V} : D_\mathbf{V} \subseteq \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$, o qual pode ser expresso por suas componentes $\mathbf{V} = V^i e_i$ (Daqui em diante estará implícita a convenção de Einstein para somatórios [13]). Portanto,

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y^j} = \frac{\partial V^i}{\partial y^j} e_i + V^i \frac{\partial e_i}{\partial y^j} \tag{1}$$

Como $\dfrac{\partial e_i}{\partial y^j}$ é um vetor do espaço, podemos expressá-lo como uma combinação linear dos vetores da base

$$\frac{\partial e_i}{\partial y^j} = \Gamma^k_{ij} e_k$$

Lembrando que $e^m \cdot e_k = \delta^m_k$ temos a seguinte definição dos *coeficientes de conexão*, mais comumente chamados de *símbolos de Christoffel de segunda ordem*[1] [12]:

$$\Gamma^k_{ij} = e^k \cdot \frac{\partial e_i}{\partial y^j}$$

Os *símbolos de Christoffel de primeira ordem* são definidos por

$$[ij, k] = g_{mk}\Gamma^k_{ij} = g_{mk} e^m \cdot \frac{\partial e_i}{\partial y^j} = e_k \cdot \frac{\partial e_i}{\partial y^j}$$

Dessa forma

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = e_j \cdot \frac{\partial e_i}{\partial y^k} + e_i \cdot \frac{\partial e_j}{\partial y^k} = [ik, j] + [jk, i]$$

Então é possível reescrever (1) como

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y^j} = \left(\frac{\partial V^i}{\partial y^j} + V^k \Gamma^i_{kj} \right) e_i. \tag{2}$$

Quando $i = j$

$$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2} g^{im} \left[\frac{\partial g_{im}}{\partial y^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial y^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial y^m} \right]$$

e, apenas trocando alguns índices mudos, escrevemos:

$$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial y^k}.$$

Seja $g = det[g_{ij}]$. Pela teoria dos determinantes, temos

$$\frac{\partial g}{\partial g_{im}} = \Delta^{im} \equiv g g^{im}$$

onde Δ^{im} é a matriz dos cofatores. Utilizando a regra da cadeia

$$\frac{\partial g}{\partial g_{im}} = \frac{\partial g}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial g_{im}}$$

[1] Tais símbolos são simétricos em relação aos índices covariantes.

podemos escrever

$$\frac{\partial g}{\partial g_{im}} = \frac{\partial g_{im}}{\partial y_j} g g^{im}.$$

de onde segue que

$$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial y^k} = \frac{1}{g^{1/2}}\frac{\partial g^{1/2}}{\partial y^k} \left(= \frac{1}{g^{1/2}}\left[\frac{1}{2g^{1/2}}\frac{\partial g}{\partial y^k}\right]\right)$$

A partir dos resultados acima e utilizando (2), obtemos a seguinte expressão para o divergente do campo vetorial:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V^i}{\partial y^i} + V^k \frac{1}{g^{1/2}}\frac{\partial g^{1/2}}{\partial y^k} = \frac{1}{g^{1/2}}\frac{\partial}{\partial y^k}\left[g^{1/2}V^k\right]$$

Da definição de gradiente de vetores contravariantes

$$V^i = g^{ik}\frac{\partial \psi}{\partial y^k}$$

chegamos à *fórmula para o laplaciano generalizado n-dimensional em coordenadas curvilíneas*:

$$\nabla^2\psi = \nabla \cdot \nabla\psi = \frac{1}{g^{1/2}}\frac{\partial}{\partial y^k}\left[g^{1/2}g^{ik}\frac{\partial \psi}{\partial y^i}\right] \qquad (3)$$

onde o somatório sobre os índices i, k está implícita pela convenção de Einstein.

4 A métrica de Riemann

A projeção estereográfica do Universo de de Sitter ($\mathcal{D}$) no espaço euclideano E_3, que é um hiperplano tangente a $\mathcal{D}$, origina a *métrica* [2] *de Riemann*, dada por

$$ds^2 = \frac{4r^2}{4r^2 + \rho^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Façamos uma mudança de variáveis, introduzindo coordenadas esféricas em E_3:

$$x = \rho sen\theta \cos\varphi \qquad y = \rho sen\theta sen\varphi \qquad z = \rho\cos\theta$$

com

[2] Daqui em diante estará implícito o produto tensorial na própria métrica, ou seja, não faremos distinção entre $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ e $ds^2 = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$

$$0 \leq \varphi < 2\pi \ , \ 0 < \rho < \infty \ , \ 0 < \theta < \pi$$

Obtemos os diferenciais em relação a cada coordenada:

$$dx^2 = d\rho^2 sen^2\theta \cos^2\varphi + d\theta^2\rho^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + d\varphi^2\rho^2 sen^2\theta sen^2\varphi$$

$$+2d\rho d\theta sen\theta\cos\theta\cos^2\phi\rho - 2d\varphi d\rho sen^2\theta sen\varphi\cos\varphi\rho$$

$$-2\rho^2 d\varphi d\theta sen\theta\cos\theta sen\varphi\cos\varphi$$

$$dy^2 = d\rho^2 sen^2\theta sen^2\varphi + d\theta^2\rho^2\cos^2\theta sen^2\varphi + d\varphi^2\rho^2 sen^2\theta\cos^2\varphi$$

$$+2\rho d\rho d\theta sen\theta\cos\theta sen^2\varphi + 2\rho d\varphi d\rho sen^2\theta sen\varphi\cos\varphi$$

$$+2\rho^2 d\varphi d\theta sen\theta\cos\theta sen\varphi\cos\varphi$$

$$dz^2 = d\rho^2\cos^2\theta + \rho^2 sen^2\theta d\theta^2 - 2\rho d\rho d\theta sen\theta\cos\theta$$

A partir dessa transformação obtemos a métrica de Riemann na sua forma polar, isto é, em coordenadas esféricas:

$$ds^2 = \frac{4r^2}{4r^2+\rho^2}(d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 sen^2\theta d\varphi^2)$$

As componentes covariantes do tensor métrico agora obtido pelo produto interno entre os vetores tangentes às curvas coordenadas são dadas por

$$g_{11} = \frac{4r^2}{4r^2+\rho^2} \qquad g_{22} = \frac{4r^2\rho^2}{4r^2+\rho^2} \qquad g_{33} = \frac{4r^2\rho^2 sen^2\theta}{4r^2+\rho^2}$$

e $g_{ij} = 0 \ \ \forall i \neq j$.

Já havíamos definido em [14] o determinante associado a esse tensor como

$$g \equiv \det[g_{ij}] \tag{4}$$

portanto

$$g = \frac{64r^6\rho^4 sen^2\theta}{(4r^2+\rho^2)^3}.$$

Substituindo as componentes tensoriais, dadas acima, na expressão do laplaciano generalizado obtemos a equação de Laplace:

$$\nabla^2\Phi = \frac{(4r^2+\rho^2)^{3/2}}{4r^2\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{\rho^2}{(4r^2+\rho^2)^{1/2}}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right] + \frac{(4r^2+\rho^2)}{4r^2\rho^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[sen\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right]$$

$$+\frac{(4r^2+\rho^2)}{4r^2\rho^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=0 \tag{5}$$

Considere a seguinte separação de variáveis:

$$\Phi = R(\rho)Y(\theta,\varphi) \equiv RY$$

Portanto (5) é equivalente a

$$\nabla^2\Phi = \frac{(4r^2+\rho^2)^{3/2}Y}{4r^2\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{\rho^2}{(4r^2+\rho^2)^{1/2}}\frac{\partial R}{\partial\rho}\right] + \frac{(4r^2+\rho^2)R}{4r^2\rho^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[sen\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right]$$

$$+\frac{(4r^2+\rho^2)R}{4r^2\rho^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=0 \tag{6}$$

Podemos ainda dividir (6) por YR:

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{R}\frac{(4r^2+\rho^2)^{3/2}}{4r^2\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{\rho^2}{(4r^2+\rho^2)^{1/2}}\frac{\partial R}{\partial\rho}\right]$$

$$+\frac{1}{Y}\frac{(4r^2+\rho^2)}{4r^2\rho^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{Y}\frac{(4r^2+\rho^2)}{4r^2\rho^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=0 \tag{7}$$

Após simplificarmos ambos os lados de (7) pelo termo $\dfrac{4r^2+\rho^2}{4r^2\rho^2}$, vemos que o primeiro termo é independente das outras duas variáveis independentes, de modo que é possível separar a equação nas partes radial e angular, resultando em

$$\frac{1}{R}(4r^2+\rho^2)^{1/2}\frac{d}{d\rho}\left[\frac{\rho^2}{(4r^2+\rho^2)^{1/2}}\frac{dR}{d\rho}\right]=k \tag{8}$$

para a parte radial e

$$\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sen^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]=-k \tag{9}$$

correspondendo à parte angular, onde k é uma constante de separação. As expressões (8) e (9) podem ser reescritas como:

$$(4r^2+\rho^2)^{1/2}\frac{d}{d\rho}\left[\frac{\rho^2}{(4r^2+\rho^2)^{1/2}}\frac{dR}{d\rho}\right]=kR \tag{10}$$

e

$$\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sen^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+kY=0 \tag{11}$$

Relativamente à equação (11), a constante k é restrita aos seguintes valores: $k=\ell(\ell+1)$. Caso contrário haverá descontinuidade quando o ângulo azimutal assumir os valores $\theta=\pm\pi$, já que as séries, que são soluções da equação angular azimutal, exibem valores infinitos em tais pontos. Escolhemos valores inteiros para k, pois, ao assumir esses valores, tais séries se degeneram em polinômios e as soluções são contínuas em toda a reta real[13, 15].

Ao fazermos $Y=Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\phi(\varphi)$, podemos separar a equação (11), obtendo

$$\frac{sen\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left[sen\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right]+sen^2\theta[\ell(\ell+1)]=-\frac{1}{\phi}\frac{d^2\phi}{d\varphi^2} \tag{12}$$

Cada lado em (12) possui sua variável independente; chamemos a constante de separação de m^2, com $-\ell\leq m\leq\ell, m\in\mathcal{N}$. Essa escolha é feita para a conservação da simetria rotacional da função ϕ: em cada direção, ϕ só assume um valor. Portanto

$$\phi(\varphi)=Ae^{\pm im\varphi} \tag{13}$$

com A constante.

A outra equação é como abaixo:

$$\frac{1}{sen\theta}\frac{d}{d\theta}\left(sen\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{sen^2\theta}\right]\Theta=0 \tag{14}$$

que é a *equação associada de Legendre* com solução regular na origem dada por $P_l{}^m(\cos\theta)$.

Assim introduzimos os harmônicos esféricos $Y(\theta,\varphi)=P_l{}^m(\cos\theta)e^{\pm im\varphi}$, onde $P_l{}^m(\cos\theta)$ é o *polinômio associado de Legendre.* [3]

[3] No presente caso $m\in\mathcal{N}$, o que é bastante útil sobretudo em Mecânica Quântica. É possível fazer o número quântico magnético $m\leq 0$. Além disso, a definição mais precisa dos *harmônicos esféricos* é dada por um fator de normalização a mais do que exposto no texto, isto é: $Y(\theta,\varphi)=(-1)^m\left[\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}\right]^{1/2}P_l{}^{|m|}(\cos\theta)e^{\pm im\varphi}$ [15].

Apenas reescrevendo a parte radial, equação (10),

$$(4r^2+\rho^2)^{1/2}\frac{d}{d\rho}\left[\frac{\rho^2}{(4r^2+\rho^2)^{1/2}}\frac{dR}{d\rho}\right]-\ell(\ell+1)R=0$$

e efetuando suas derivadas, obtemos:

$$\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2}+\left(2\rho-\frac{\rho^3}{4r^2+\rho^2}\right)\frac{dR}{d\rho}+\ell(\ell+1)R=0 \tag{15}$$

Introduzimos a seguinte mudança de variável:

$$\frac{1}{R}\frac{dR}{d\rho}=\eta \quad \Rightarrow \quad \frac{dR}{d\rho}=\eta R$$

de onde

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}=\frac{d}{d\rho}\left(\frac{dR}{d\rho}\right)=\frac{d}{d\rho}(\eta R)=R\frac{d\eta}{d\rho}+\eta\frac{dR}{d\rho}=R\frac{d\eta}{d\rho}+R\eta^2$$

$$=R\eta'+\eta^2R$$

A equação (15) pode ser reescrita como

$$\rho^2\eta'=-\rho^2\eta^2+\left(2\rho-\frac{\rho^3}{4r^2+\rho^2}\right)\eta+\ell(\ell+1) \tag{16}$$

que é uma equação de Riccati.

Além disso,

$$\lim_{r\to\infty}\left[\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2}+\left(2\rho-\frac{\rho^3}{4r^2+\rho^2}\right)\frac{dR}{d\rho}+\ell(\ell+1)R\right]=\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2}+2\rho\frac{dR}{d\rho}+\ell(\ell+1)R$$

$$=\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{dR}{d\rho}\right)+\ell(\ell+1)R=0$$

No caso particular em que $k=0$, ou seja, considerando que a partícula descrita por essa função de onda radial esteja no estado fundamental ($\ell=0$) retornamos ao caso clássico, pois $\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{dR}{d\rho}\right)=0$. Nesse caso o *campo escalar* (ou *potencial escalar*) tem simetria esférica: ele independe da orientação e pode ser escrito como $\phi=\phi(\rho)$.

5 A métrica de Beltrami

Um observador $\mathcal{O}$ em uma posição arbitrária no Universo de de Sitter ($\mathcal{D}$) é capaz de enxergar qualquer evento, como por exemplo um pulso de luz, em seu referencial, que é um espaço tangente, (P_{3+1}), a $\mathcal{D}$. De fato, o sinal luminoso segue a geodésica característica de $\mathcal{D}$, acompanhando sua curvatura intrínseca. Assim o observador $\mathcal{O}$ localiza esse pulso em uma direção tangente a S^3 no ponto $\mathcal{O}$.

Para conseguirmos uma representação fidedigna dos eventos em cada um dos infinitos espaços tangentes é necessário obter uma relação entre as coordenadas absolutas ξ^μ em $\mathcal{D}$ e as coordenadas relativas x^μ em P_{3+1}, também denominado *espaço-tempo projetivo de Castelnuovo.*

Dentre várias possibilidades, Beltrami escolhe fazer uma projeção a partir do centro de $\mathcal{D}$ em um plano tangente a $\mathcal{D}$ no pólo sul $(0, 0, 0, 0, -r)$, e, por semelhança de triângulos, são verificadas as seguintes relações:

$$\xi^4 = \frac{r}{A}, \qquad \xi^\mu = \frac{x^\mu}{A} \tag{17}$$

onde $A \equiv (1 + \frac{\rho^2}{r^2})^{1/2}$ e $\rho^2 \equiv x^\mu x_\mu = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ e r é o raio do Universo.

A partir de uma métrica pitagórica em $\mathcal{D}$ há uma métrica *projetiva* correspondente em P_{3+1} associada ao mesmo elemento de linha, a saber

$$ds^2 = d\mu^a d\mu_a = A^{-4}[A^2 dx^i dx_i - \frac{1}{r^2}(x_i dx_i)^2] \tag{18}$$

de onde obtemos diretamente o tensor métrico

$$g_{ik} = A^{-4}(A^2\delta_{ik} - \frac{1}{r^2}x_i x_k) \tag{19}$$

Após explicitarmos o valor de A em (18), obtemos:

$$ds^2 = \frac{r^2}{(r^2+\rho^2)^2}[(r^2+y^2+z^2)dx^2 + (r^2+x^2+z^2)dy^2 + (r^2+x^2+y^2)dz^2$$

$$-2xydxdy - 2xzdxdz - 2yzdydz]$$

A partir da correspondência entre as coordenadas cartesianas e as polares esféricas, por simples substituição paramétrica, obtemos

$$ds^2 = \frac{r^2}{(r^2+\rho^2)^2}[r^2 d\rho^2 + \rho^2(r^2+\rho^2)\sin^2\theta d\varphi^2 + \rho^2(r^2+\rho^2)d\theta^2]$$

As componentes do tensor métrico são dadas por

$$g_{11} = \frac{r^4}{(r^2+\rho^2)^2}, \quad g_{22} = \frac{r^2}{(r^2+\rho^2)} r^2\rho^2, \quad g_{33} = \frac{r^2}{(r^2+\rho^2)} r^2\rho^2\sin^2\theta$$

e $g_{ik} = 0$, para $i \neq k$. Então, o determinante associado a esse tensor é dado por

$$g = \frac{r^8}{(r^2+\rho^2)^4}\rho^4\sin^2\theta$$

De posse das expressões acima, conseguimos expressar o laplaciano generalizado no Universo de Castelnuovo onde as geodésicas em $\mathcal{D}$ são levadas em retas paralelas em P_{3+1}, isto é:

$$\frac{r^4\rho^2\sin\theta}{(r^2+\rho^2)^2}\nabla^2\phi = \frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{r^4\rho^2\sin\theta}{(r^2+\rho^2)^2}\frac{(r^2+\rho^2)^2}{r^4}\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right]$$
$$+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{r^4\rho^2\sin\theta}{(r^2+\rho^2)^2}\frac{(r^2+\rho^2)^2}{\rho^2 r^2(r^2+\rho^2)}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right] + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{r^4\rho^2\sin\theta}{(r^2+\rho^2)^2}\frac{(r^2+\rho^2)^2}{\rho^2 r^2(r^2+\rho^2)\sin^2\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right]$$

A equação de Laplace é expressa como:

$$\nabla^2\phi = \frac{(r^2+\rho^2)^2}{r^4\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{(r^2+\rho^2)}{r^2\rho^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{(r^2+\rho^2)}{\rho^2 r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

Após dividirmos ambos os lados da equação acima por $\frac{(r^2+\rho^2)}{\rho^2 r^2}$, chegamos a

$$\nabla^2\phi = \frac{(r^2+\rho^2)}{r^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0 \quad (20)$$

Introduzimos a seguinte separação de variáveis: $\phi(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi)$. Assumimos que a constante de separação seja $\ell(\ell+1)$, com $\ell = 0, 1, 2, 3...$, pelos mesmos motivos citados anteriormente. Com isso podemos escrever a equação angular

$$\frac{1}{Y}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Y}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\ell(\ell+1)=0 \tag{21}$$

A equação acima tem como solução os harmônicos esféricos dados por $Y(\theta,\varphi)=P_l{}^m(\cos\theta)e^{\pm im\varphi}$. A outra equação (radial) é dada por

$$\frac{(r^2+\rho^2)}{r^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{dR}{d\rho}\right)-\ell(\ell+1)R=0 \tag{22}$$

A equação radial pode ser explicitada como

$$(r^2+\rho^2)\frac{\rho^2}{r^2}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2\rho}{r^2}(r^2+\rho^2)\frac{dR}{d\rho}-\ell(\ell+1)R=0 \tag{23}$$

É importante verificar o limite do raio do cronotopo de de Sitter tendendo ao infinito, o qual deve estar de acordo com as observações relativistas do universo de Minkowski livres de fontes ou sorvedouros. Assim, fazendo-se $r\to\infty$ na equação acima obtemos $\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{dR}{d\rho}\right)=0$, recuperando, assim à solução clássica.

Introduzindo a mesma mudança de variável feita para a métrica de Riemann, a saber:

$$\mu=\frac{1}{R}\frac{dR}{d\rho}\qquad\Rightarrow\frac{d^2R}{d\rho^2}=R\left(\frac{d\mu}{d\rho}+\mu^2\right)$$

podemos reescrever (23) como:

$$\rho^2\mu'=-\mu^2\rho^2-2\rho\mu+\ell(\ell+1)\frac{r^2}{r^2+\rho^2} \tag{24}$$

que é uma equação de Riccati.

6 A métrica de Börner e Dürr

Essa métrica é obtida pela parametrização do hiperbolóide

$$\xi^a\eta_{ab}\xi^b=-r^2,\qquad \text{com}\quad \eta_{ab}=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1,-1)\qquad a,b=0,\cdots,4.$$

por coordenadas conformes (x^μ), através da projeção estereográfica do pólo norte $(0,0,0,0,r)$ em uma hiperplano tangente no pólo sul $(0,0,0,0,-r)$:

$$\xi^\mu = \zeta(x^2)x^\mu, \quad \xi^4 = -r\zeta(x^2)\left(1 + \frac{x^2}{4r^2}\right)$$

com $\zeta(x^2) = \left(1 - \dfrac{x^2}{4r^2}\right)$, $\qquad x^2 = x^\mu x_\mu = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$

Perante essas transformações, o elemento de linha em $\mathcal{D}$ se reduz a

$$ds^2 = -\zeta(x^2)dx^\mu \eta_{\mu\nu} dx^\mu$$

onde $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ e $\mu, \nu = 0, \cdots, 3$.

Efetuando-se a parametrização por coordenadas polares esféricas, obtemos o tensor métrico

$$\frac{(r^2+\rho^2)}{r^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2 \frac{dR}{d\rho}\right) - \ell(\ell+1)R = 0 \tag{25}$$

$$g_{ij} = -\zeta(x^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 sen\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

com determinante dado por

$$g = \zeta^4(x^2)\rho^4 c^2 \sin^2\theta$$

Depois de aplicada a fórmula do laplaciano generalizado

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{g^{1/2}}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{g^{1/2}}{g_{ii}}\frac{\partial\phi}{\partial y_j}\right)$$

e utilizando o tensor métrico descrito acima, a equação de Laplace é escrita como [4] :

$$\nabla^2\phi = -\zeta(x^2)\left(\frac{1}{\rho^2}\partial_\rho(\rho^2\partial_\rho\phi) + \frac{1}{\rho^2 sen\theta}\left[\partial_\theta(sen\theta\partial_\theta\phi) + \frac{1}{sen^2\theta}\right] + \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\phi\right) = 0$$

[4] Aqui fizemos a transformação de variáveis $x_0 \to ict$, onde c (constante) e t têm dimensão de velocidade e tempo, respectivamente.

Pelo método de separação de variáveis, consideramos

$$\phi(\rho, t, \theta, \varphi) = A(\rho, t)Y(\theta, \varphi) \equiv AY$$

A partir dessas duas funções, podemos escrever duas equações diferenciais parciais, cada uma dependendo de apenas duas coordenadas [5]:

$$\partial_\rho \left(\rho^2 \partial_\rho A\right) + \frac{\rho^2}{c^2} {\partial_t}^2 A = -kA \tag{26}$$

$$\frac{1}{sen\theta} \partial_\theta (sen\theta \partial_\theta Y) + \frac{1}{sen^2\theta} {\partial_\phi}^2 Y + kY = 0 \tag{27}$$

onde k é uma constante de separação.

Já conhecemos a solução da equação (26) e, visto que já foi discutida anteriormente, voltaremos a atenção para a equação (25) [6]. Para a obtenção da parte *radial* será necessária uma separação adicional de variáveis. Seja $A(\rho, t) = R(\rho)T(t)$. Substituindo na equação temos

$$\frac{1}{R}\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2 \frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} + \frac{k}{\rho^2} = 0$$

Denominando a constante de separação por a^2, a equação acima pode ser separada da seguinte forma:

$$\frac{1}{R}\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2 \frac{dR}{d\rho}\right) - \frac{k}{\rho^2} = a^2 \tag{28}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = a^2 \tag{29}$$

A solução de (28) é da forma $T(t) = A_1 e^{\pm\gamma t}$, com A_1 constante. De fato, (28) pode ser escrita como $T'' = a^2c^2T$. Substituindo a solução exponencial nessa expressão encontramos o valor de $\gamma(\gamma = \pm ac)$.

A equação radial (27), após as derivações, pode ser escrita como [7]:

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho} - \frac{kR}{\rho^2} - a^2R = 0$$

---

[5] $\partial_\zeta \equiv \dfrac{\partial}{\partial_\zeta}$.

[6] Lembramos que para qualquer descrição física de eventos $k = \ell(\ell + 1)$.

[7] Essa equação diferencial ordinária é uma equação de Bessel[16].

Introduzindo a mudança de variável

$$\frac{1}{R}\frac{dR}{d\rho} \equiv \mu$$

chegamos a uma equação de Riccati:

$$\mu' = -\mu^2 - \frac{2}{\rho}\mu + \frac{k}{\rho^2} + a^2 \tag{30}$$

7 A métrica de Prasad

O universo de de Sitter($\mathcal{D}$) pode ser descrito pela soma $\wp_1 + \wp_2$ onde $\wp_1$ é o espaço externo (dimensões espacial finita e temporal infinita) e $\wp_2$ é o espaço interno (dimensões espacial infinita e temporal finita), onde correspondem, respectivamente aos grupos $SO_{4,1}$ e $SO_{3,2}$ [17].

7.1 O espaço externo ($\wp_1$)

Tal espaço possui curvatura constante $1/R^2$ e tem a ele associado a seguinte forma quadrática (a qual define o elemento de linha):

$$R^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 - (x_4)^2 + (x_5)^2$$

Uma possível parametrização para a forma acima, utilizando-se coordenadas não-estáticas é:

$$\begin{aligned}
x_1 &= R\mathrm{sen}\chi\mathrm{sen}\theta cos\varphi cht \\
x_2 &= R\mathrm{sen}\chi\mathrm{sen}\theta sen\varphi cht \\
x_3 &= R\mathrm{sen}\chi cos\theta cht \\
x_4 &= Rsht \\
x_5 &= Rcos\chi cht
\end{aligned}$$

permitindo-nos escrever:

$$ds_+{}^2 = R^2ch^2t[d\chi^2 + sen^2\chi(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2)] - R^2dt^2 \tag{31}$$

O tensor métrico é dado por

$$g_{ij} = R^2 \begin{pmatrix} ch^2t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sen^2\chi ch^2 t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sen^2\chi sen^2\theta ch^2 t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

com determinante $g = -R^8 ch^6 t sen^4\chi sen^2\theta$.

Após a substituição desses termos na fórmula do laplaciano generalizado obtemos a equação de Laplace:

$$(R^2 ch^2 t sen^2\chi)\nabla^2\phi = \frac{sen^2\chi}{cht}\partial_t(ch^3 t\partial_t\phi) - \partial_t(sen^2\chi\partial_\chi\phi) + \frac{1}{sen\theta}\partial_\theta(sen\theta\partial_\theta\phi)$$

$$+\frac{1}{sen^2\theta}\partial_{\varphi\varphi}\phi = 0 \tag{32}$$

Tomando o campo escalar ϕ como o seguinte produto funcional

$$\phi(\chi, t, \theta, \varphi) = \Gamma(\chi, t)Y(\theta, \varphi)$$

podemos separar a equação de Laplace em duas equações, onde cada uma só depende de duas variáveis independentes:

$$\frac{1}{Y}\frac{1}{sen\theta}\partial_\theta(sen\theta\partial_\theta Y) + \frac{1}{Y}\frac{1}{sen^2\theta}\partial_{\varphi\varphi}Y = -\ell(\ell+1) \tag{33}$$

$$\frac{1}{cht}\partial_t(ch^3 t\partial_t\Gamma) - \frac{1}{sen^2\chi}\partial\chi(sen^2\chi\partial\chi\Gamma) - \frac{\ell(\ell+1)}{sen^2\chi}\Gamma = 0 \tag{34}$$

com $\ell = 0, 1, 2, 3, \cdots$.

Relativamente à equação (33), considere que

$$\Gamma(\chi, t) = \Pi(\chi)\Omega(t)$$

e que a constante de separação[8] seja α^2. Assim (33) pode ser separada em

$$\frac{1}{sen^2\chi}\frac{d}{d\chi}\left(sen^2\chi\frac{d\Pi}{d\chi}\right) + \frac{\ell(\ell+1)}{sen^2\chi}\Pi - \alpha^2\Pi = 0 \tag{35}$$

$$\frac{1}{cht}\frac{d}{dt}\left(ch^3 t\frac{d\Omega}{dt}\right) - \alpha^2\Omega = 0 \tag{36}$$

[8] $\alpha = 0, 1, 2, 3, \cdots$ corresponde ao espectro dos autovalores da equação de Gegenbauer.

Daremos ênfase à equação (34), isto é, a parte radial.[9] Utilizando a *regra da cadeia* para a derivação de (34), podemos reescrevê-la como

$$\frac{1}{sen^2\chi}\left[2sen\chi cos\chi\frac{d\Pi}{d\chi}+sen^2\chi\frac{d^2\Pi}{d\chi^2}+\ell(\ell+1)\Pi-\alpha^2\Pi sen^2\chi\right]=0$$

ou ainda

$$\frac{d^2\Pi}{d\chi^2}+2cotg\chi\frac{d\Pi}{d\chi}+\frac{\ell(\ell+1)}{sen^2\chi}\Pi-\alpha^2\Pi=0 \tag{37}$$

Introduzindo a variável $j \equiv cos\chi$, temos

$$\frac{d}{dx}=\frac{d}{dj}\frac{dj}{dx}=-\frac{d}{dj}sen\chi \Rightarrow 2cotg\chi\frac{d\Pi}{d\chi}=-2cos\chi\frac{d\Pi}{dj}$$

bem como

$$\frac{d^2}{d\chi^2}=\frac{d}{d\chi}\left(-\frac{d}{dj}sen\chi\right)=-\frac{d}{dj}\frac{d}{dj}\frac{dj}{d\chi}sen\chi-\frac{d}{dj}cos\chi=\frac{d^2}{dj^2}(sen^2\chi)-\frac{d}{dj}cos\chi$$

A equação (36) pode ser reescrita, com a substituição feita acima, como:

$$\frac{d^2\Pi}{dj^2}(1-j^2)-3j\frac{d\Pi}{dj}-\alpha^2\Pi+\frac{\ell(\ell+1)}{1-j^2}\Pi=0 \tag{38}$$

Além disso, introduzindo a variável μ dada por

$$\frac{1}{\Pi}\frac{d\Pi(j)}{dj}\equiv\mu(j)$$

podemos escrever (37) como

$$\mu'=-\mu^2+\frac{1}{1-j^2}\left[3j\mu+\alpha^2-\frac{\ell(\ell+1)}{1-j^2}\right] \tag{39}$$

que é uma equação de Riccati.

[9] Aqui a variável χ é definida a partir de sen$\chi=\dfrac{(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2}{R^2}$. Embora sen$\chi$ não seja o raio propriamente dito, ele é o *raio normalizado adimensional*.

7.2 O espaço interno ($\wp_2$)

Esse espaço tem curvatura negativa $-1/r^2$ e pode ser caracterizado pelo grupo de simetria $SO_{3,2}$. Em virtude desse grupo, fica definida a forma quadrática:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_6^2 = r^2$$

Prasad [8] propõe a seguinte parametrização, novamente com coordenadas não estáticas:

$$\begin{aligned} x_1 &= rsh\chi sen\theta cos\varphi cost \\ x_2 &= rsh\chi sen\theta sen\varphi cost \\ x_3 &= rsh\chi cos\theta cost \\ x_4 &= rsent \\ x_6 &= rch\chi cost \end{aligned}$$

Desse modo o elemento de linha tem a seguinte forma:

$$ds_-{}^2 = r^2cos^2t[d\chi^2 + sh^2\chi(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2)] - r^2dt^2 \tag{40}$$

O tensor métrico associado ao espaço interno é, então, dado por

$$g_{ij} = r^2 \begin{pmatrix} cos^2t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos^2tsh^2\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos^2tsh^2\chi sen^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

com determinante $g = -r^8cos^6tsh^4\chi sin^2\theta$.

Após algumas simplificações e substituição dos coeficientes do tensor métrico dado acima, a equação de Laplace pode ser escrita como:

$$r^2cos^2tsh^2\chi\nabla^2\phi = -\frac{sin^2\chi}{cost}\partial_t(cos^3t\partial_t\phi) + \partial_\chi(sh^2\chi\partial_\chi\phi) + \frac{1}{sen\theta}\partial_\theta(sen\theta\partial_\theta\phi)$$
$$+\frac{1}{sen^2\theta}\partial_{\varphi\varphi} = 0 \tag{41}$$

Admitimos que a equação seja separável e definimos o seguinte produto funcional:

$$\phi(\rho, t, \theta, \varphi) = \Lambda(\rho, t)Y(\theta, \varphi) \equiv \Lambda Y.$$

Assim separamos a equação de Laplace, onde a constante de separação é dada por $\ell(\ell+1)$ quando está envolvida a descrição geométrica de eventos; logo:

$$-\frac{1}{\Lambda}\frac{sh^2\chi}{cost}\partial_t(cos^3t\partial_t\Lambda)+\frac{1}{\Lambda}\partial\chi(sh^2\chi\partial_\chi\phi)=\ell(\ell+1) \tag{42}$$

$$\frac{1}{Y}\frac{1}{sen\theta}\partial_\theta(sen\theta\partial_\theta\phi)+\frac{1}{Y}\frac{1}{sen^2\theta}\partial_{\varphi\varphi}\phi=-\ell(\ell+1) \tag{43}$$

É interessante notar que (42) é exatamente a parte angular para todas as métricas obtidas anteriormente.

Tendo como objetivo separar (41) em uma parte temporal e outra radial, que será tratada com mais detalhes, escrevemos

$$\Lambda(\chi,t)=\Xi(\chi)\Psi(t)$$

de onde podemos reescrevê-la como

$$\frac{1}{\Psi}\frac{sen^2\chi}{cost}\partial_t(cos^3t\partial_t\Psi)+\frac{1}{\Xi}\partial_\chi(sh^2\chi\partial\chi\Xi)=\ell(\ell+1)$$

e, após dividirmos ambos os lados da equação acima por $sh^2\chi$, podemos separá-la, e, admitindo que a constante de separação seja β^2, obtemos[10] as equações ordinárias

$$\frac{1}{\Psi}\frac{1}{cost}\frac{d}{dt}\left(cos^3t\frac{d\Psi}{dt}\right)=\beta^2 \tag{44}$$

e

$$\frac{1}{\Xi}\frac{1}{sh^2\chi}\frac{d}{d\chi}\left(sh^2\chi\frac{d\Xi}{d\chi}\right)-\frac{\ell(\ell+1)}{sh^2\chi}=-\beta^2 \tag{45}$$

Mais uma vez utilizando a regra da cadeia para funções reais podemos escrever (44) como

$$\frac{d^2\Xi}{d\chi^2}+2cotgh\chi\frac{d\Xi}{d\chi}-\left[\frac{\ell(\ell+1)}{sh^2\chi}-\beta^2\right]\Xi=0 \tag{46}$$

Seja $m=ch\chi$. Com essa substituição, a equação (45) pode ser escrita como

[10] $\beta=0,1,2,3,\cdots$ corresponde ao espectro dos autovalores da equação de Gegenbauer.

$$(m^2-1)\frac{d^2\Xi}{dm^2}+3m\frac{d\Xi}{dm}-\left[\frac{\ell(\ell+1)}{m^2-1}-\beta^2\right]\Xi=0 \tag{47}$$

Definindo, ainda

$$\mu(m)=\frac{1}{\Xi}\frac{d\Xi(m)}{dm}$$

podemos reescrever (46):

$$\mu'=-\mu^2+\frac{1}{1-m^2}\left(3m\mu+\beta^2-\frac{\ell(\ell+1)}{1-m^2}\right) \tag{48}$$

que também é uma equação de Riccati.

8 A métrica de Prasad com raio do Universo independente da parametrização

No caso anterior, com a parametrização hiperbólica de $\mathcal{D}$, não foram obtidos os campos clássicos, fazendo $\mathcal{R}\to\infty$. Com uma nova parametrização, somos capazes de obter o caso clássico no limite acima proposto.

O grupo que age no espaço externo $\mathcal{D}_+$ é o $SO_{4,1}$, enquanto que o espaço interno $\mathcal{D}_-$ somente é afetado pelo grupo de transformações $SO_{3,2}$. Em coordenadas cartesianas, podemos expressar os elementos de linha interno e externo respectivamente:

$$ds_+{}^2=dx_1{}^2+dx_2{}^2+dx_3{}^2-dx_4{}^2+dx_5{}^2$$
$$ds_-{}^2=dx_1{}^2+dx_2{}^2+dx_3{}^2-dx_4{}^2-dx_6{}^2$$

A partir das transformações propostas por Tolman [18] a saber

$$x_5\pm x_4=R_+exp[\pm t/R_+](1-r^2/R_+{}^2)^{1/2}$$

para $\mathcal{D}_+$ e

$$x_4\pm ix_6=R_-exp[\pm it/R_-](1+r^2/R_-{}^2)^{1/2}$$

para $\mathcal{D}_-$, podemos substituir essas expressões nos elementos de linha, resultando em

$$ds\pm^2 = \frac{dr^2}{1 \mp r^2/{R_\pm}^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 - (1 \mp r^2/{R_\pm}^2)dt^2$$

onde o tensor métrico pode ser escrito da seguinte forma matricial:

$$g_{ij}{}^{\mp} = \begin{pmatrix} (1 \mp r^2/{R_\pm}^2)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(1 \mp r^2/{R_\pm}^2) \end{pmatrix}$$

Utilizando a expressão do laplaciano generalizado

$$\nabla^2 \psi = \nabla \cdot \nabla \psi = \frac{1}{g^{1/2}} \frac{\partial}{\partial y^k} \left[g^{1/2} g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial y^i} \right] \tag{49}$$

e o tensor métrico acima, obtemos a equação de Laplace

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2(1 \mp \Lambda_\pm r^2)\frac{\partial \psi}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \\ \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{1 \mp \Lambda_\pm r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \tag{50}$$

onde $\Lambda\pm \equiv 1/{R_\pm}^2$.

Propomos o método da separação de variáveis, a partir da substituição $\psi(r,t,\theta,\varphi) = Y(\theta,\varphi)\Gamma(r,t)$ na equação acima, obtendo

$$\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2(1 \mp \Lambda_\pm r^2)\frac{\partial \Gamma}{\partial r}\right] - \frac{1}{\Gamma}\frac{r^2}{(1 \mp \Lambda_\pm r^2)}\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} = A \tag{51}$$

para a parte não-angular e

$$\frac{1}{Y}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{Y}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} = -A \tag{52}$$

para a parte angular

Ao fazermos a constante de separação assumir valores inteiros ($\ell(\ell + 1)$), a equação acima admite como solução os harmônicos esféricos, dados por $Y(\theta,\varphi) = {P_l}^m(\cos\theta)e^{\pm im\varphi}$, onde ${P_l}^m(\cos\theta)$ é o *polinômio associado de Legendre*.

Ao separarmos a equação não-angular, através da substituição $\Gamma(r,t) = R(r)T(t)$, temos

$$\frac{1}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -B$$

Se estivermos na estrutura interna do Universo de de Sitter($\mathcal{D}_-$), a equação temporal acima tem solução oscilatória

$$T_-(t) = \tau_- exp(\pm iHt/R_-)$$

associada com o número quântico "hipercarga" (H) [19]. Se estivermos tratando de $\mathcal{D}_+$, o tempo terá um caráter hiperbólico descrito pela equação associada aos autovalores de energia (E)

$$T_+(t) = \tau_+ exp(\pm Et/R_+)$$

A equação radial, por sua vez, toma a seguinte forma:

$$\frac{1 \mp \Lambda_\pm r^2}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2(1 \mp \Lambda_\pm r^2)\frac{dR}{dr}\right] - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}(1 \mp \Lambda_\pm r^2)R = BR \tag{53}$$

Essa equação pode ser transformada em uma equação de campo clássico (por exemplo, o campo elétrico ou o gravitacional em espaços vazios). Fazendo $R \to \infty$, pela definição ($\Lambda_\pm = 1/{R_\pm}^2$), no limite, $\Lambda_\pm \to 0$. Com os resultados do tratamento da Mecânica Quântica em universos hiperesféricos, tanto em $\mathcal{D}_+$, onde vale $B = Y^2/{R_-}^2$, quanto em $\mathcal{D}_-$, onde vale $B = E^2/{R_+}^2$, no limite onde $R \to \infty$ temos o resultado $B \to 0$. Portanto a equação radial se reduz a

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = 0 \tag{54}$$

no estado fundamental, onde $\ell = 0$.

Com a mudança de variáveis

$$\frac{1}{R}\frac{dR}{d\rho} = \eta \quad \Rightarrow \quad \frac{dR}{d\rho} = \eta R$$

podemos reconduzir a equação radial (6) a uma equação de Riccati

$$\eta' = -\eta^2 - \eta\left(\frac{2}{r} \mp \frac{2\Lambda_\pm r}{1 \mp \Lambda_\pm r^2}\right) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2(1 \mp \Lambda_\pm r^2)} + \frac{B}{1 \mp \Lambda_\pm r^2} \tag{55}$$

9 Conclusões

Em relação à métrica de Prasad as equações radiais diferem pelos sinais e pelo caráter hiperbólico ou oscilatório de cada uma das equações, mas ambas são reconduzidas à mesma equação de Riccati. Aqui, com a parametrização, o caso clássico de um campo escalar esfericamente simétrico não pode ser obtido fazendo-se o raio do Universo tender ao infinito. Isso já era previsto, pois em coordenadas cartesianas o raio do universo está desacoplado das coordenadas, enquanto que em coordenadas curvilíneas a parametrização vincula o raio do Universo: ele é a própria coordenada paramétrica radial. Dessa maneira, pelo fato de resolvermos $\nabla^2\Phi = 0$, há perda de informação sobre o raio, pois esse pode ser posto em evidência para as derivadas de todas as coordenadas, e, pela homogeneidade da equação, essa informação é perdida. Com a parametrização independente do raio do Universo, recuperamos o caso clássico.

Um caso semelhante ocorre para a métrica de Börner-Dürr. Essa métrica é conforme e podemos escrever:

$$ds^2 = -\zeta(x^2)dx^\mu \eta_{\mu\nu} dx^\mu$$

onde $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$, com $\mu, \nu = 0, \cdots, 3$

Pela mesma razão, a homogeneidade da equação de Laplace, $\zeta(x^2)$ desaparece e a informação sobre o raio vai juntamente com esse fator.

Para as métricas de Riemann e Beltrami ocorre a obtenção do caso clássico da equação radial, isto é

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left[\rho^2\frac{dR}{d\rho}\right] = 0$$

quando o raio tende ao infinito.

Todas as seis equações de Laplace exibem a mesma equação angular

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \ell(\ell+1)Y = 0$$

que admite como solução os harmônicos esféricos

$$Y(\theta, \varphi) = P_l{}^m(\cos\theta)e^{\pm im\varphi}$$

onde $P_l{}^m(\cos\theta)$ é o *polinômio de Legendre associado* .

Com relação à parte radial obtivemos uma equação diferencial ordinária de segunda ordem e a recondução a uma equação de Riccati, para cada uma das métricas, isto é:

$$\rho^2 \frac{d^2R}{d\rho^2} + \left(2\rho - \frac{\rho^3}{4r^2+\rho^2}\right)\frac{dR}{d\rho} + \ell(\ell+1)R = 0 \tag{56}$$

$$\rho^2 \eta' = -\rho^2\eta^2 + \left(2\rho - \frac{\rho^3}{4r^2+\rho^2}\right)\eta + k \tag{57}$$

para a **métrica de Riemann**,

$$(r^2+\rho^2)\frac{\rho^2}{r^2}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2\rho}{r^2}(r^2+\rho^2)\frac{dR}{d\rho} - \ell(\ell+1)R = 0 \tag{58}$$

$$\rho^2\mu' = -\mu^2\rho^2 - 2\rho\mu + \ell(\ell+1)\frac{r^2}{r^2+\rho^2} \tag{59}$$

para a **métrica de Beltrami**,

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho} - \frac{kR}{\rho^2} - a^2R = 0 \tag{60}$$

$$\mu' = -\mu^2 - \frac{2}{\rho}\mu + \frac{k}{\rho^2} + a^2 \tag{61}$$

para a **métrica de Börner-Dürr**,

$$\frac{d^2\Pi}{d\chi^2} + 2cotg\chi\frac{d\Pi}{d\chi} + \frac{\ell(\ell+1)}{sen^2\chi}\Pi - \alpha^2\Pi = 0 \tag{62}$$

$$\mu' = -\mu^2 + \frac{1}{1-j^2}\left[3j\mu + \alpha^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{1-j^2}\right] \tag{63}$$

e

$$\frac{d^2\Xi}{d\chi^2} + 2cotgh\chi\frac{d\Xi}{d\chi} - \left[\frac{\ell(\ell+1)}{sh^2\chi} - \beta^2\right]\Xi = 0 \tag{64}$$

$$\mu' = -\mu^2 + \frac{1}{1-m^2}\left[3m\mu + \beta^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{1-m^2}\right] \tag{65}$$

para as **métricas externa e interna de Prasad**, respectivamente.

Note que as duas últimas equações de Riccati, provenientes da métrica de Prasad vêm de equações radiais distintas, porém, a menos das variáveis, trata-se da mesma equação.

Apresentamos, finalmente, as equações

$$\frac{1 \mp \Lambda_\pm r^2}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2(1 \mp \Lambda_\pm r^2)\frac{dR}{dr}\right] - \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}(1 \mp \Lambda_\pm r^2) + B\right] R = 0 \quad (66)$$

$$\eta' = -\eta^2 - \eta\left(\frac{2}{r} \mp \frac{2\Lambda_\pm r}{1 \mp \Lambda_\pm r^2}\right) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2(1 \mp \Lambda_\pm r^2)} + \frac{B}{1 \mp \Lambda_\pm r^2} \quad (67)$$

para a **métrica de Prasad com parametrização independente do raio do Universo**.

10 Agradecimentos

Um dos autores (R. Rocha Jr.) agradece ao prof. Paulo Ruffino (IMECC) pelas sugestões feitas em relação às definições usadas na demonstração da topologia assumida pelo Universo de de Sitter. Sou grato à FAPESP pelo apoio financeiro durante um ano de pesquisa, sem o qual esse trabalho não teria sido possível.

Apêndice

A topologia $S^3 \times \mathcal{R}$ do Universo de de Sitter

Def. 1:

Uma *variedade diferenciável* de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $x_a : V_a \subset \mathcal{R}^n \to M$ de abertos V_a de $\mathcal{R}^n$ em M tais que:

(1) $\bigcup_a x_a(V_a) = M$.

(2) para todo par a, b, com $x_a(V_a) \cap x_b(V_b) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_a^{-1}(W)$ e $x_b^{-1}(W)$ são abertos em $\mathcal{R}^n$ e as aplicações $x_b^{-1} \circ x_a$ são diferenciáveis.

A aplicação x_a com $p \in x_a(U_a)$ é chamada *parametrização* de M em p. A família $[(V_a, x_a)]$ satisfazendo (1) e (2) é chamada uma *estrutura diferenciável* em M [12].

Def. 2:

Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \to M_2$ é *diferenciável* em $p \in M_1$ se, dada uma parametrização $y : Z \subset \mathcal{R}^m \to M_2$ em $\varphi(p)$, existe uma parametrização $x : V \subset \mathcal{R}^n \to M_1$ em p tal que $\varphi(x(V)) \subset y(Z)$ e a aplicação $y^{-1} \circ \varphi \circ x : V \subset \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ é diferenciável em $x^{-1}(p)$.

Def. 3:

Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\psi : M_1 \to M_2$ é um *difeomorfismo* se ela é diferenciável, biunívoca, sobrejetiva e sua inversa ψ^{-1} é diferenciável.

Def. 4:

Seja $f : \mathcal{R}^{k+1} \to \mathcal{R}$ de classe C^∞ em todas suas componentes. Um ponto $p \in \mathcal{R}^{k+1}$ é dito *ponto regular* de f se, pelo menos uma das $\partial f / \partial x^i$, com $i = 1, 2, \ldots k+1$ é não nula. Um número real r é dito *valor regular de f* se $f^{-1}(r)$ consiste em pontos regulares.

O Universo de de Sitter é identificado como uma variedade com hipersuperfície de nível contida em $\mathcal{R}^5$. Dados dois vetores $x, y \in \mathcal{D}$, então o produto interno é definido como:

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 - x_5 y_5$$

e, consequentemente, a forma quadrática como

$$Q(x) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2 - (x_5)^2$$

de onde

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = 2x_i \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x_5} = -2x_5$$

portanto $r = R$ (o raio não-nulo da pseudoesfera) é valor regular de Q.

Então, podemos enunciar o seguinte:

Lema 1:

Se r é um valor regular de $f : \mathcal{R}^{k+1} \to \mathcal{R}$ então $f^{-1}(r)$ é vazio ou uma variedade k-dimensional.

Pelo Lema 1, o conjunto

$$Q^{-1}(R^2) = \{x \in \mathcal{R}^5 : (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2 - (x_5)^2 = R^2\}$$

é uma variedade 4-dimensional de $\mathcal{R}^5$. $\mathcal{D} = Q^{-1}(R^2)$ é um hiperbolóide de uma folha em $\mathcal{R}^5$. $\big(R = R(t) = e^{ct/r} \neq 0\big)$. Seções paralelas ao hiperplano $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ são *discos* que representam hiperesferas $\mathcal{S}^3$. Então, deste resultado, enunciamos o

Teorema 1:

O espaço-tempo de de Sitter é difeomorfo a $\mathcal{S}^3 \times \mathcal{R}$.

Prova:

Considere o seguinte conjunto:

$$\mathcal{S}^3 \times \mathcal{R} = \{(y_1, y_2, y_3, y_4, t) : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 1 \ -\infty < t < \infty\}$$

(nessa definição consideramos o raio de $\mathcal{D}$ unitário, sem perda de generalidade, o que só é verdadeiro para t=0). Defina um atlas $F : S^3 \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}^5$ por

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4, t) = [(1+t^2)^{1/2}] \left(y_1, y_2, y_3, y_4, \frac{t}{(1+t^2)^{1/2}} \right)$$

de onde obtemos para as derivadas

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = (1+t^2)^{1/2}(1,1,1,1,0) \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{t}{(1+t^2)^{1/2}}(y_1, y_2, y_3, y_4, 1)$$

Portanto F é suave. F também é injetiva uma vez que: considere $F(y) = F(y_1, y_2, y_3, y_4, t_1)$ e $F(x) = F(x_1, x_2, x_3, x_4, t_2)$, então se $F(y) = F(x)$ temos, em primeiro lugar, que $t_1 = t_2$ e, a partir daí $x = y$.

Agora

$$Q(F) = (1+t^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) - t^2$$

$$= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + t^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - 1) = (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = 1$$

Assim F é um atlas em $\mathcal{D}$.

Considere $G : \mathcal{D} \to S^3 \times \mathcal{R}$ definido por

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1 + x_5^2)^{-1/2} \left[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5(1+x_5^2)^{1/2} \right]$$

G é suave e, além disso, $G[F(y_1, y_2, y_3, y_4, t)] = (y_1, y_2, y_3, y_4, t)$ o que prova, assim, ser $G = F^{-1}$; portanto F é um difeomorfismo entre $\mathcal{D}$ e $S^3 \times \mathcal{R}$.

Fica provado que $\mathcal{D}$ realmente é um hiperbolóide em $\mathcal{R}^5$ com coeficientes reais. Ao fazermos $x_5 \to ix_5$, $\mathcal{D}$ é uma hiperesfera S^4, também chamada de *pseudoesfera*.

11 Referências

1. W. de Sitter, *On the relativity of inertia. Remark concerning Einstein's latest hypothesis*, Proc. Royal Acad. Amsterdam **19**, 1217 (1917).

2. G. Börner and H. P. Dürr, *Classical and Quantum fields in de Sitter space*, N. Cimento **64A**, 669 (1969).

3. G. L. Naber, *Spacetime and singularities, an introduction*, Cambridge University Press, Cambridge (1948).

4. G. Arcidiacono, *A new projective relativity based on the de Sitter Universe*, Gen. Rel. Grav. **7**, 805 (1976).

5. G. Arcidiacono, *The de Sitter Universe and Mechanics*, Gen. Rel. Grav. **8**, 865 (1977).

6. G. Arcidiacono, *Relatività e Cosmologia*, Veschi, Roma (1987).

7. G. Arcidiacono, *Projective, Relativity, Cosmology and Gravitation*, Hadronic Press, Cambridge, USA (1986).

8. R. Prasad, *The de Sitter Model for Elementary Particles with nonstatic Frame*, N. Cimento, **52A**, 972, (1967).

9. R. Prasad, *De Sitter Model for Elementary Particles*, N. Cimento, **44A**, 299, (1966).

10. C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman, San Francisco (1973).

11. A. Pais,*"Subtle is the Lord"...The Science and the Life of Albert Einstein*, Oxford University Press (1982).

12. M. Perdigão do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro (1988).

13. G. B. Arfken, H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Acad. Press, Inc. (1995).

14. Roldão da Rocha Junior, *Relatório parcial de Iniciação Científica*, FAPESP 06/97-01/98.

15. J. Mathews, R. Walker, *Mathematical Methods of Physicists*, W. A. Benjamin, Menlo Park (1970).

16. E. Capelas de Oliveira, J. Emílio Maiorino, *Introdução aos Métodos da Matemática Aplicada*, Editora da Unicamp, Campinas (1997).

17. B. Wybourne, *Classical Groups for Physicists*, John Wiley & Sons, New York (1974).

18. R. C. Tolman, *Relativity Thermodynamics and Cosmology*, Oxford, 1958.

19. P. A. M. Dirac, *Proc. Royal Soc. London* A **167**, 148 (1938)