QUAIS ANÉIS MORAM EM ÁLGEBRAS DE DIMENSÃO FINITA. I (UMA HISTÓRIA DE UMA TEORIA)

Alexandre Ananin

Sejam K um corpo de característica p (que pode ser 0), A uma K-álgebra de dimensão finita e $R \subset A$ um subanel. (Consideramos só álgebras e anéis associativos; mas, em geral, não-comutativos e possivelmente sem 1.) Primeira observação: Com uso da construção $R \mapsto k \otimes_{\mathbb{Z}} R \supset R$, podemos supor que R é uma álgebra sobre corpo $k(\subset K)$. Talvez o caso particular de R finitamente gerada seja mais importante:

Teorema [A.I.Mal'tcev, 1943]**.** *Seja R uma k-álgebra comutativa e finitamente gerada, onde k é um corpo. Então R é residualmente finita*[1] *e existe uma K-álgebra A de dimensão finita sobre K tal que $R \subset A$, onde $k \subset K$ é um corpo apropriado*

Assim, para uma k-álgebra R finitamente gerada, R é uma k-subálgebra de uma K-álgebra A de dimensão finita sobre um corpo $K \supset k$ se e só se R é uma k-subálgebra da k-álgebra $\operatorname{Matr}_m C$ das matrizes sobre C, onde C é uma k-álgebra comutativa.

Definição 1. Uma k-álgebra R é dita *representável* se $R \subset \operatorname{Matr}_m C$, onde C é uma k-álgebra comutativa

Quais aspectos comuns têm álgebras comutativos e álgebras de dimensão finita? Elas satisfazem uma identidade não-trivial.[2]

A teoria de PI-álgebras (isto é, de algebras satisfazendas uma identidade não-trivial) foi começada em 1940 – 1950 por I.Kaplansky, S.A.Amitsur, N.Jacobson et al. Depois de aparecimento da teoria estrutural de PI-álgebras (muito linda), em 1957 I.Kaplansky conjeturou que cada PI-álgebra é representável. Rapidamente P.M.Cohn e V.N.Latyshev deram os contra-exemplos.

Como é conhecido, cada álgebra comutativa finitamente gerada é noeteriana. Em 1968 – 1970 V.N.Latyshev e I.V.L'vov foram estudando as condições de maximalidade para PI-álgebras na linguagem de identidades.

Definição 2. Uma álgebra R é dita *fracamente noeteriana* se R satisfaz a condição de maximalidade para ideais bilaterais

[1] Uma k-álgebra R é dita *residualmente finita* se $R \subset \prod_{i \in I} R_i$, onde cada k-álgebra R_i, $i \in I$, é de dimensão finita sobre k.

[2] Por exemplo, uma algebra de dimensão $m-1$ satisfaz a identidade $\sum_{\sigma \in \Sigma_m} (-1)^\sigma y_0 x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} y_2 \dots y_{m-1} x_{\sigma(m)} y_m = 0$, onde Σ_m denota o grupo das permutações e $(-1)^\sigma$ é o sinal da permutação σ.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Para falar na linguagem de identidades, usa-se a seguinte

Definição 3. Seja T um conjunto de identidades (isto é, um conjunto de polinômios não-comutativos sobre k). A classe $V(T)$ de todas as k-álgebras satisfazendas todas as identidades de T é dita uma *variedade* de k-álgebras

Um pouco estranho, mas na linguagem de identidades várias propriedades podem ser mesmas:

Teorema [1977]**.** *Seja V uma variedade de k-álgebras, onde k é um corpo infinito. Então são equivalentes:*

a. *V é localmente fracamente noeteriana (isto é, cada $R \in V$ finitamente gerada é fracamente noeteriana)*

b. *V é localmente residualmente finita (isto é, cada $R \in V$ finitamente gerada é residualmente finita)*

c. *V é localmente representável (isto é, cada $R \in V$ finitamente gerada é representável)*

d. *Existe uma identidade de tipo*

$$xy^n x = \sum_{0<i+j\leq n} a_{ij} y^i x y^{n-i-j} x y^j,$$

onde $a_{ij} \in k$, satisfeita em cada álgebra de V

e. *Existe uma identidade de tipo*[3]

$$[x, \underbrace{y, \ldots, y}_{m}] \cdot z^m \cdot [t, \underbrace{u, \ldots, u}_{m}] = 0$$

satisfeita em cada álgebra de V

f. *Cada $R \in V$ finitamente gerada satisfaz a identidade de tipo (l depende de R)*

$$[x_1, \ldots, x_l] \cdot y_1 \cdot \ldots \cdot y_l \cdot [z_1, \ldots, z_l] = 0 \tag{1}$$

O caso de álgebras que não são finitamente geradas foi mais difícil. Existiam o problema de L.W.Small

- É representável cada álgebra nilpotente?

o problema de D.Passman

- É representável a álgebra kG de um grupo G, caso kG satisfaça uma identidade não-trivial?

e um fato só provado por J.Lewin: Cada k-álgebra satisfazenda a identidade $[x, y] \cdot [z, t] = 0$ é uma subálgebra da álgebra $\mathrm{Tr}_2\, C$ das matrizes 2×2 triangulares sobre C, onde C é uma álgebra comutativa.

Teorema [1989]**.** *Se uma k-álgebra R satisfaz as identidades* (1) *e*

$$[x_1, y_1] \cdot \ldots \cdot [x_l, y_l] = 0, \tag{2}$$

então R é uma subalgebra de $\mathrm{Tr}_m\, C$, onde C é uma algebra comutativa (m depende só de l)

Em 1976 o autor conjecturou o

Corolário [1989]**.** *Seja k um corpo de característica* 0*. Então uma variedade V de k-álgebras é representável se e só se V satisfaz as identidades de tipos* (1) *e* (2)

[3]Onde $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ e, por indução, $[x_1, x_2, \ldots, x_{l+1}] = [[x_1, x_2, \ldots, x_l], x_{l+1}]$.

O Corolário dá uma resposta positiva ao problema de D.Passman.

Como cada vez só mergulhos em álgebras de tipo $\mathrm{Tr}_m\, C$ apareciam, assim o autor começou estudar os condições necessários e suficientes para existência de tal mergulho.

Consideremos o polinômio não-comutativo de tipo

$$f(x_i^{(1)},\ldots,x_i^{(m)}) = f(a_i^{(1)},\ldots,a_i^{(m+1)},x_i^{(1)},\ldots,x_i^{(m)}) = \sum_{i\in I} a_i^{(1)}x_i^{(1)}a_i^{(2)}x_i^{(2)}\ldots x_i^{(m)}a_i^{(m+1)},$$

onde I é um conjunto finito de índices. Para cada $1\le j\le m$ e cada $i\in I$, definimos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i^{(j)}} = f(x_1,\ldots,x_m)|_{x_i^{(j)}=1,\, x_{i'}^{(j)}=0 \text{ para cada } i'\in I \text{ tal que } i'\neq i}$$

Por indução obtemos as derivadas de tipo $\dfrac{\partial^r f}{\partial x_{i_1}^{(j_1)}\cdot\ldots\cdot\partial x_{i_r}^{(j_r)}}$, onde $1\le j_1<\cdots< j_r\le m$ e $i_1,\ldots,i_r\in I$.

É possível verificar que $\mathrm{Tr}_m\, C$ com C comutativa satisfaz a propriedade seguinte: Para quaisquer $a_i^{(1)},\ldots,a_i^{(m+1)},x_i^{(1)},\ldots,x_i^{(m)}\in \mathrm{Tr}_m\, C$, a implicação

$$\bigwedge_{\substack{j_1<\cdots<j_r\\ 0<r}} \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1}^{(j_1)}\cdot\ldots\cdot\partial x_{i_r}^{(j_r)}} = 0 \quad\Rightarrow\quad f=0 \tag{3}$$

é válida.

Teorema [N.Nesterenko, 1989 e 1989′]. *Uma k-álgebra R é uma subálgebra de $\mathrm{Tr}_m\, C$ com C comutativa se e só se todos os quasiidentidades de tipo* (3) *são válidas em R*

A partir de 1980, o Teorema existia na forma de conjetura.[4]

O problema central na teoria de PI-álgebras foi o problema de Specht:

- Seja k um corpo de característica 0. Tem cada variedade V de k-algebras uma base de identidades finita? Isto é, $V=V(T)$ para um conjunto finito T de identidades.

Seja V uma variedades de k-álgebras. Denotemos por $T(V)$ o conjunto de todos os identidades que são satisfeitas em cada álgebra de V. É claro que $T(V)\lhd k\langle X\rangle$, onde $k\langle X\rangle$ denota a k-álgebra (dos polinômios não-comutativos) livremente gerada por $X=\{x_1,x_2,\ldots\}$. A álgebra $k\langle X\rangle/T(V)$ é dita a *álgebra livre* na *variedade V* (livremente) gerada por X ou a *álgebra relativamente livre.*

Teorema [A.R.Kemer, 1988]. *Sejam k um corpo de característica 0 e V uma variedade própria de k-álgebras. Então cada álgebra finitamente gerada e livre em V é representável*[5]

[4]O autor pensou que tinha uma prova da conjectura e, sendo bastante preguiçoso, escreveu só 12 páginas de formulas sem palavras. Depois não teve jeito reconstruir a prova. Puxa vida! Nunca façam isto.

[5]Uma coisa secreta, que ficará entre nós: Concluimos que existe a $\mathbb{C}$-álgebra de dimensão finita "livre". Qual pode ser a estrutura de tal álgebra?

Corolário [A.R.Kemer, 1987]**.** *Cada variedade de álgebras sobre um corpo de característica* 0 *tem uma base finita de identidades*[6]

A idéia básica da prova: A.R.Kemer conseguiu interpretar as propriedades estruturais da álgebra relativamente livre pelas identidades apropriadas.

Pensando um pouco, podemos ver a razão porquê para variedades as várias propriedades são equivalentes. A linguagem não precisa de identidades não dá para distinguir algumas propriedades. Portanto, vale a pena concentrar-se no estudo de cada álgebra separavelmente.

Dada uma k-álgebra R. Cada elemento $a \in R$ define duas transformações k-lineares $r_a : R \to R$, $r_a : x \mapsto xa$, e $l_a : R \to R$, $l_a : x \mapsto ax$, as *multiplicações direita* e *esquerda* por a. Denotemos por r_R (por l_R) a álgebra de todas as transformações r_a's (l_a's), $a \in R$. Ponhamos $M_R = r_R \cdot l_R = l_R \cdot r_R$. A álgebra M_R é dita a *álgebra* de *multiplicações* de R. Temos a ação natural de M_R em R. Os M_R-submódulos de R são exatamente os ideais bilaterais de R.

Seja R uma k-álgebra finitamente gerada e representável. Então temos uma K-álgebra A de dimensão finita sobre $K \supset k$ tal que $R \subset A$. As condições sequintes são válidas em R:

m. Os conjuntos de tipo $\operatorname{Ann}_R S = \{a \in R \mid aS = 0\}$, $S \subset M_R$, satisfazem a condição de maximalidade

l. (I.V.L′vov) Para cada $I \triangleleft R$, existe um subconjunto finito $S \subset I$ tal que $\operatorname{Ann}^l_R I = \operatorname{Ann}^l_R S$, onde $\operatorname{Ann}^l_R S = \{a \in R \mid aS = 0\}$

r. (I.V.L′vov) Para cada $I \triangleleft R$, existe um subconjunto finito $S \subset I$ tal que $\operatorname{Ann}^r_R I = \operatorname{Ann}^r_R S$, onde $\operatorname{Ann}^r_R S = \{a \in R \mid Sa = 0\}$

Realmente, $\operatorname{Ann}_R S = R \cap \operatorname{Ann}_A S$ e $\operatorname{Ann}_A S$ tem K-dimensão finita. Pelos mesmos argumentos (**l**) e (**r**) são válidas.

Teorema [1992]**.** *Seja R uma* PI-*álgebra finitamente gerada sobre um corpo k.*

a. *Se R é noeteriana à direita, então R é representável*

b. *Se R é fracamente noeteriana e satisfaz a condição* (**m**)*, então R é representável*

c. *Se R tem um único ideal bilateral minimal não-nulo e satisfaz as condições* (**l**) *e* (**r**)*, então R é de dimensão finita*[7]

O Teorema (**a**) dá respostas positivas aos problemos de I.V.L′vov e V.T.Markov: É representável (residualmente finita) cada PI-álgebra noeteriana à direita?

O teorema seguinte pode ser um começo da pergunta do rodapé número 5:

[6]Durante cinco anos, as vezes, A.R.Kemer perguntava ao autor como um especialista em álgebras representáveis, qual é a probabilidade da validade do Teorema mencionado. O autor não sabia que o problema de Specht e a pergunta eram relacionados e cada vez respondia — 0! Nunca acreditem nos especialistas.

[7]É bem conhecido que cada álgebra é uma subálgebra do produto direto das álgebras que têm o minimal ideal não-nulo. Portanto, para provar que uma álgebra é residualmente finita, é suficiente tratar do caso de tais álgebras. Observemos também que a propriedade "representável" é mais ou menos a propriedade "ser residualmente finita" genérico.

Teorema [1992′]. *Seja $1 \in R$ uma PI-álgebra finitamente gerada sobre um corpo k. Denotemos por N o radical de R.*[8] *Consideremos as condições seguintes*:

(1) *Para cada $I \triangleleft R$ e cada $i \geq 0$ tais que $IN^{i+1} = 0$ e $IN^i \neq 0$ (onde $N^0 = R$ por definição), temos $\{a \in R \mid IaN^i = 0\} = N$*

(2) *O centro módulo N (isto é, uma subálgebra $Z \subset R$ tal que $N \subset Z$ e Z/N é o centro de R/N) satisfaz a identidade*

$$[x_1, \ldots, x_l] = 0$$

para algum $l > 1$

(3) *R é uma k-subálgebra de K-álgebra A de dimensão finita sobre um corpo $K \supset k$, $A = KR$ e o quociente de A por seu radical é uma K-álgebra simples*

Então (1) *e* (2) *implicam* (3), (3) *implica* (1) *e, caso K seja algebricamente fechado,* (3) *implica* (2)

Para tratar do case em que uma álgebra não é finitamente gerada, consideremos a parte II:

"PI-Categiorias Representáveis"

(A continuar)

Literatura

[A.I.Mal′tcev, 1943] *On representations of infinite algebras*, Matem. Sbornik **13**, 263–286 (em Russo)

[1977] *Residually finite and locally representable varieties of algebras*, Algebra i logika **16**, No.1, 3–23 (em Russo)

[1979] *Embedding of algebras into algebras of triangle matrices*, Matem. Sbornik **108**, No.2, 168–186 (em Russo)

[1989] *Representable varieties of algebras*, Algebra i logika **28**, No.2, 127–143 (em Russo)

[N.Nesterenko, 1989] *Algebras that can be represented by triangular matrices*, Soviet Math. Dokl. **39**, No.2, 285–288

[N.Nesterenko, 1989′] *Anan′in's conjecture on algebras that can be represented by triangular matrices*, Trudy Inst. Mat. (Novosibirsk) **16**, Issled. po Teor. Kolets i Algebr, 101–110 (em Russo)

[A.R.Kemer, 1988] *Representability of reduced-free algebras*, Algebra i logika **27**, No.3, 274–294 (em Russo)

[A.R.Kemer, 1987] *Finite basis property of identities*, Algebra i logika **26**, No.5, 597–641 (em Russo)

[1992] *Representability of noetherian finitely generated algebras*, Arch. der Math. **59**, 1–5

[1992′] *On representability of finitely generated algebras*, Arch. der Math. **59**, 204–208

[8] É bem conhecido que o radical de Jacobson e nilpotente em cada PI-álgebra finitamente gerada.