3151

EQUAÇÃO DE LAPLACE NO UNIVERSO DE de-SITTER-CASTELNUOVO

D. Gomes
e
E. Capelas de Oliveira

Julho RP 31/93

Relatório de Pesquisa

Instituto de Matemática Estatística e Ciência da Computação

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Campinas - São Paulo - Brasil

RESUMO – No presente trabalho, caracterizamos o modelo cosmológico de de-Sitter bem como sua representação plana, o chamado Cronotopo de Castelnuovo, através do grupo de Fantappié. No Cronotopo de Castelnuovo, obtemos e resolvemos a equação de Laplace dependente de um parâmetro chamado grau de homogeneidade (Equação de Laplace Generalizada) com simetria radial e discutimos a relação com o Laplaciano Clássico[1].
Ao estudarmos esta equação de Laplace com o grau de homogeneidade da função sendo um número inteiro, emerge uma nova classe de polinômios. Para tais polinômios discutimos as chamadas relações de recorrência, função geratriz e a possível conexão com os chamados polinômios clássicos. Finalmente discutimos os casos em que o grau de homogeneidade da função não é um número inteiro.

IMECC – UNICAMP
Universidade Estadual de Campinas
CP 6065
13081-970 Campinas SP
Brasil

Julho – 1993

A EQUAÇÃO DE LAPLACE NO UNIVERSO DE de-SITTER- CASTELNUOVO

*D. Gomes** e *E. Capelas de Oliveira*

Depto. Matemática Aplicada - IMECC - UNICAMP
13081-970 Campinas, São Paulo

Resumo. No presente trabalho, caracterizamos o modelo cosmológico de de-Sitter bem como sua representação plana, o chamado Cronotopo de Castelnuovo, através do grupo de Fantappié. No Cronotopo de Castelnuovo, obtemos e resolvemos a equação de Laplace dependente de um parâmetro chamado grau de homogeneidade (Equação de Laplace Generalizada) com simetria radial e discutimos a relação com o Laplaciano Clássico[1].

Ao estudarmos esta equação de Laplace com o grau de homogeneidade da função sendo um número inteiro, emerge uma nova classe de polinômios. Para tais polinômios discutimos as chamadas relações de recorrência, função geratriz e a possível conexão com os chamados polinômios clássicos. Finalmente discutimos os casos em que o grau de homogeneidade da função não é um número inteiro.

1. Introdução

A Relatividade Especial baseada no Grupo de Poincaré pode ser generalizada para um espaço com curvatura constante positiva $+1/R^2$ – O Univero de de-Sitter – obtendo assim a Relatividade Especial Projetiva[1], baseada no grupo de Fantappié, também com dez parâmetros do qual o grupo de Poincaré é um caso limite, obtido quando $R \to \infty$.

Esta teoria é desenvolvida de modo relativamente simples se utilizarmos a "representação geodésica" do Universo de de-Sitter, na qual suas geodésicas são representadas por retas no espaço projetivo P_4, conhecido como cronotopo de Castelnuovo, formado pelos pontos externos à quádrica absoluto de Cayley-Klein dada pela equação

$$A^2 = 1 + x_s x_s / R^2 = 0 \tag{1.1}$$

com $s = 1, 2, 3, 4$ e $x_1 = x$; $x_2 = y$; $x_3 = z$, $x_4 = ict$.

No espaço-tempo de Castelnuovo vale a métrica de Beltrami

$$A^4 ds = A^2(dx_i dx_i)^2 - (x_i dx_i / R)^2 \qquad i = 1, 2, 3, 4. \tag{1.2}$$

---

*Bolsista CAPES

que corresponde a representação geodésica do Universo de de-Sitter.

Introduzindo coordenadas projetivas homogêneas no Universo de de-Sitter $\overline{x}_A$, $A = 0,1,2,3,4$ temos as seguintes relações com as coordenadas cartesianas x_i do cronotopo de Castelnuovo, correspondente às coordenadas projetivas não homogêneas.

$$x_i = R\frac{\overline{x}_i}{\overline{x}_0}. \tag{1.3}$$

Impondo a condição de normalização de Weierstrass

$$\overline{x}_A\overline{x}_A = R^2 \tag{1.4}$$

e eliminando a variável $\overline{x}_0$ resulta que

$$\overline{x}_i = \frac{x_i}{A}, \qquad \overline{x}_0 = \frac{R}{A} \tag{1.5}$$

A partir da métrica (1.2), a equação de Laplace generalizada para o espaço-tempo de Castelnuovo, é dada por

$$A^2\{\Delta + (x_i x_k \partial_i \partial_k + 2x_i\partial_i)/R^2\}\psi(x_j) = 0 \tag{1.6}$$

onde Δ é o laplaciano clássico, e

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

É importante observar que não temos dependência temporal na equação acima; $x_4 = 0$.

Utilizando-se dos métodos da Relatividade Projetiva[1], supondo que a função $\overline{\varphi}(\overline{x}_A)$ seja homogênea de grau λ, generalizamos a equação (1.6) obtendo a equação de Laplace Projetiva, que é escrita em coordenadas cartesianas como:

$$A^2\{\Delta + [x_i x_k \partial_i \partial_k + 2x_i\partial_i + \lambda(\lambda + k - 1)]/R^2\}\psi(x_j) = 0 \tag{1.7}$$

onde $k = 1,2,3$ (dimensão espacial) correspondendo a uma equação de autovalores.

No limite $R \to \infty$, as equações (1.6) e (1.7) se reduzem a equação clássica de Laplace. Isso de certa forma é óbvio pois no limite, o Universo de de-Sitter torna-se plano, valendo o grupo de Poincaré.

2. A Equação de Laplace Generalizada no Universo de de-Sitter - Castelnuovo

Considerando-se

$$\rho = \frac{1}{R}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \tag{2.1}$$

a equação (1.6) com simetria esférica é escrita como[3]

$$\left\{(1+\rho^2)\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}[(k-1) + 2\rho^2]\frac{d}{d\rho}\right\}\psi_k(\rho) = 0 \tag{2.2}$$

cuja solução geral será dada nos seguintes casos

i) $k = 1$ (potencial unidimensional).

$$\psi(\rho) = a \quad \text{arctag}\rho + b \tag{2.3}$$

ii) $k = 2$ (potencial bidimensional)

$$\psi(\rho) = a \ln\left(\frac{\rho}{1+\sqrt{\rho^2+1}}\right) + b \tag{2.4}$$

iii) $k = 3$ potencial tridimensional.

$$\psi(\rho) = \frac{a}{\rho} + b \tag{2.5}$$

onde a, b são constantes arbitrários.

É interessante observar, restringindo a uma aproximação linear, no limite $R \to \infty$, as equações (2.3) e (2.4) fornecem a solução clássica da equação de Laplace. No caso tridimenional a equação (2.4) coincide com a equação clássica de Laplace, evidentemente temos a mesma solução.

3. A equação de Laplace Projetiva

Consideremos a equação de Laplace projetiva (1.7) com simetria esférica, no caso tridimensional ($k = 3$). Introduzindo a mudança de variável (2.1) esta equação assume a forma[2]

$$\left\{\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho} + \frac{\lambda(\lambda+2)}{(1+\rho^2)^2}\right\}\psi(\rho) = 0 \tag{3.1}$$

Fazendo a mudança de variável independente

$$\psi(\rho) = \frac{A^{-\lambda}X(\rho)}{\rho} \tag{3.2}$$

obtemos a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\left\{(1+\rho^2)\frac{d^2}{d\rho^2} - 2\lambda\rho\frac{d}{d\rho} + \lambda(\lambda+1)\right\} X(\rho) = 0 \tag{3.3}$$

Para estudar esta equação desenvolveremos sua solução em série de potências,

$$X(\rho) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \rho^s \tag{3.4}$$

segue assim, a fórmula de recorrência

$$a_{s+2} = \frac{2\lambda s - s(s-1) - \lambda(\lambda+1)}{(s+1)(s+2)} a_s \tag{3.5}$$

Tomando $a_0 = 1, a = 1$ ou $a_0 = 0, a_1 = 1$ obtemos duas soluções linearmente independentes (soluções fundamentais) A_λ e B_λ, logo

$$X_\lambda(\rho) = aA_\lambda + bB_\lambda \tag{3.6}$$

onde a, b são constantes arbitrárias.

Se $a_{s+2} = 0$ então A_λ e B_λ serão truncados e teremos solução polinomial, evidentemente isto ocorre se e somente se,

$$\lambda^2 - (2s-1)\lambda + s(s-1) = 0$$

ou seja para $\lambda = s$ ou $\lambda = s - 1$. Logo para λ inteiro positivo a solução de (3.3) é dada por um polinômio.

A solução geral da equação (3.3) pode ser escrita do seguinte modo

$$X_\lambda(\rho) = \alpha(1+i\rho)^{\lambda+1} + \beta(1-i\rho)^{\lambda+1} \tag{3.7}$$

com α, β constantes arbitrárias.

Observando a relação, válida para ρ real:

$$(1+i\rho)^{\lambda+1} = A_\lambda(\rho) + iB_\lambda(\rho) \tag{3.8}$$

podemos escrever (3.7) como

$$X_\lambda = aA_\lambda(\rho) + b\,B_\lambda(\rho) \tag{3.9}$$

onde a, b são constantes arbitrárias, pois as soluções fundamentais são conjugadas complexas.

Aplicando a fórmula de Moivre na equação (3.8) temos

$$A_\lambda = A^{\lambda+1} \cos[(\lambda+1) \text{ arctang}\rho]$$
$$B_\lambda = A^{\lambda+1} \text{ sen}[(\lambda+1) \text{ arctang } \rho] \tag{3.10}$$

das quais segue a relação

$$A_\lambda^2 + B_\lambda^2 = A^{2(\lambda+1)} \tag{3.11}$$

A partir da equação (3.8) temos as seguintes fórmulas de recorrência.

$$A_\lambda = A_{\lambda-1} - \rho B_{\lambda-1} \quad ; \qquad B_\lambda = B_{\lambda-1} + \rho A_{\lambda-1}. \tag{3.12a}$$

$$\frac{d}{d\rho} A_\lambda = -(\lambda+1) B_{\lambda-1} \quad ; \qquad \frac{d}{d\rho} B_\lambda = (\lambda+1) A_{\lambda-1} \tag{3.12b}$$

$$A_{2\lambda-1} = A_\lambda^2 - B_\lambda^2 \quad ; \qquad B_{2\lambda+1} = 2A_\lambda B_\lambda. \tag{3.12c}$$

Para λ inteiro positivo ($\lambda = N$) A_λ e B_λ se reduzem a polinômios, os quais são dados pelas fórmulas

$$A_N = \sum_k (-1)^k \binom{n+1}{2k} \rho^{2k} \qquad \left(k = 0, 1, \ldots \left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$$
$$B_N = \sum_k (-1)^k \binom{n+1}{2k+1} \rho^{2k+1} \qquad \left(k = 0, 1, \ldots \left[\frac{n}{2}\right]\right) \tag{3.13}$$

Finalmente, utilizando a equação (3.2) a solução da equação (3.1) é dada por

$$\psi(\rho) = \frac{(aA_\lambda + bB_\lambda)}{\rho A^\lambda} \tag{3.14}$$

onde A_λ e B_λ são dados acima.

É interessante observar a relação existente entre a equação (3.7), e consequentemente as equações (3.9) e (3.14), com o absoluto de Cayley-Klein de equação (1.1).

Um outro tratamento poderia ser dado à equação (3.1), obtendo solução em termos da função hipergeométrica de Gauss e dos polinômios de Jacobi[3]; obviamente essas soluções são equivalentes.

4. Estudo dos polinômios $E_N(x)$ e $A_N(x)$

Quando consideramos a equação 3.3, com o parâmetro λ sendo um número inteiro N obtemos uma classe de polinômios, chamados na literatura de polinômios não clássicos. Então, sendo $\lambda = N$ na equação 3.3 tem como solução os polinômios $E_N(x)$ e $A_N(x)$ dados por

$$E_N(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{N+1}{2}]} \frac{(-1)^k (N+1)!}{(2k)!(N-2k+1)!} x^{2k} \qquad A_N(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{N}{2}]} \frac{(-1)^k (N+1)!}{(2k+1)!(N-2k)!} x^{2k+1}$$

Para tais polinômios obtém-se relações de recorrência do seguinte tipo

$$Y_{N+2}(x) - 2Y_{N+1}(x) + (1+x^2)Y_N(x) = 0$$

$$xY'_{N+1}(x) + (N+2)[Y_N(x) - Y_{N+1}(x)] = 0$$

onde $Y_N(x)$ denota, $E_N(x)$ e $A_N(x)$.

Finalmente, obtém-se as respectivas funções geratrizes dadas por,

$$G_E(x,t) = \frac{1 - t(x^2+1)}{(1-t)^2 + t^2x^2} \qquad G_A(x,t) = \frac{x}{(1-t)^2 + t^2x^2}$$

as quais, respectivamente, fornecem os referidos polinômios a partir de

$$\frac{1}{N!} \frac{\partial^N G_E(x,t)}{\partial t^N}\bigg|_{t=0} = E_N(x) \quad \text{e} \quad \frac{1}{N!} \frac{\partial^N G_A(x,t)}{\partial t^N}\bigg|_{t=0} = A_N(x)$$

O estudo de tais polinômios não clássicos está em fase final de estudos.

Referências

[1] G. Arcidiacono: *Projective Relativity, Cosmology and Gravitation*, Hadronic Press USA (1986). *Relatività e Cosmologia*, Veschi, Roma, vol II, IV edizione (1987).

[2] G. Arcidiacono e B. Rizzi: Sull' equazione di Laplace generalizzata nell' Universo di De-Sitter". Rend. Mat. Aplic. série VII, vol 7, fasc. 2, (1987) Itália.

[3] E. Capelas de Oliveira e G. Arcidiacono: "Sull' equazioni di Laplace nell' Universo di De-Sitter", Relatório Técnico 27 (1991) IMECC - UNICAMP, Brasil.

RELATÓRIOS DE PESQUISA — 1993

01/93 **On the Convergence Rate of Spectral Approximation for the Equations for Nonhomogeneous Asymmetric Fluids** — *José Luiz Boldrini* and *Marko Rojas-Medar.*

02/93 **On Fraisse's Proof of Compactness** — *Xavier Caicedo* and *A. M. Sette.*

03/93 **Non Finite Axiomatizability of Finitely Generated Quasivarieties of Graphs** — *Xavier Caicedo.*

04/93 **Holomorphic Germs on Tsirelson's Space** — *Jorge Mujica* and *Manuel Valdivia.*

05/93 **Zitterbewegung and the Electromagnetic Field of the Electron** — *Jayme Vaz Jr.* and *Waldyr A. Rodrigues Jr.*

06/93 **A Geometrical Interpretation of the Equivalence of Dirac and Maxwell Equations** — *Jayme Vaz Jr.* and *Waldyr A. Rodrigues Jr.*

07/93 **The Uniform Closure of Convex Semi-Lattices** — *João B. Prolla.*

08/93 **Embedding of Level Continuous Fuzzy Sets and Applications** — *Marko Rojas-Medar, Rodney C. Bassanezi* and *Heriberto Román-Flores.*

09/93 **Spectral Galerkin Approximations for the Navier-Stokes Equations: Uniform in Time Error Estimates** — *Marko A. Rojas-Medar* and *José Luiz Boldrini.*

10/93 **Semigroup Actions on Homogeneous Spaces** — *Luiz A. B. San Martin* and *Pedro A. Tonelli.*

11/93 **Clifford Algebra Approach to the Barut-Zanghi Model as a Hamiltonian System** — *Jayme Vaz Jr.* and *Waldyr A. Rodrigues Jr.*

12/93 **Propagation of Scalar Waves in Layered Media** — *Lúcio Tunes dos Santos* and *Martin Tygel.*

13/93 **On the Convergence of the NMO-Power Series for a Horizontally Stratified Medium** — *Martin Tygel.*

14/93 **Convergence Rates in the Sobolev H^s-Norm of Approximations by Discrete Convolutions** — *Sônia M. Gomes.*

15/93 **On the Choice of the Space Dimension in Ill-Posed Problems** — *Cristina Cunha.*

16/93 **Elliptic Equations in R^2 with Non-linearities in the Critical Range** — *D. G. de Figueiredo, O. H. Miyagaki* and *B. Ruf.*

17/93 **Drug Kinetics and Drug Resistance in Optimal Chemotherapy** — *M. I. S. Costa, J. L. Boldrini* and *R. C. Bassanezi.*

18/93 **Chemotherapeutic Treatments Involving Drug Resistance and Level of Normal Cells as a Criterion of Toxicity** — *M. I. S. Costa, J. L. Boldrini* and *R. C. Bassanezi.*

19/93 **Bifurcation of Singularities of Reversible Systems** — *Marco Antonio Teixeira.*

20/93 **Sistemas Não Lineares e Fractais** — *Lúcio Tunes dos Santos.*

21/93 **New Integral Representation of the Solution of Schrödinger Equation with Arbitrary Potential** — *Rodolfo L. Monaco* and *Waldyr A. Rodrigues Jr.*

22/93 **The Module of Derivations of a Stanley–Reisner Ring** — *Paulo Brumatti* and *Aron Simis.*

23/93 **On the Convergence Rate of Spectral Approximation for the Equations for Chemical Active Fluid** — *Marko Rojas-Medar* and *Sebastián A. Lorca.*

24/93 **Sufficient Conditions for Minima of some Translation Invariant Functionals** — *Orlando Lopes.*

25/93 **A Constrained Minimization Problem with Integrals on the Entire Space** — *Orlando Lopes.*

26/93 **O Pensamento Reducionista na Filosofia de Niels Bohr** — *José Emílio Maiorino.*

27/93 **On the first curve of the Fučik spectrum of an elliptic operator** — *D.G. de Figueiredo* and *J.-P. Gossez.*

28/93 **Generalização dos Testes de Shirley e de House** — *Belmer Garcia Negrillo.*

29/93 **Compacidad y Compactificación en Teoría de Modelos** — *J. C. Cifuentes.*

30/93 **Global Strong Solutions of the Equations for the Motion of Nonhogeneous Incompressible Fluids** — *José Luiz Boldrini* and *Marko Rojas-Medar.*