CONVERGÊNCIA NO ESPECTRO REAL
DE UM ANEL

J. C. Cifuentes

Agosto RP 22/92

Relatório de Pesquisa

**Instituto de Matemática
Estatística e Ciência da Computação**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Campinas - São Paulo - Brasil**

ABSTRACT – It is well known that the real spectrum of a ring A, $\mathrm{Spec}_R(A)$, is a compact space with respect to the constructive topology. In this note we exibit an underlying uniform structure for that space, which is totally bounded, and prove the completeness of this space constructing the limits of the Cauchy nets. The main theorem (Theorem 1) gives a characterization of the compactness of $\mathrm{Spec}_R(A)$ by means of the net convergence modulo ultrafilters.

IMECC – UNICAMP
Universidade Estadual de Campinas
CP 6065
13081 Campinas SP
Brasil

Agosto – 1992

The author is a PhD student having Prof. A. M. Sette as advisor.

CONVERGÊNCIA NO ESPECTRO REAL DE UM ANEL

J. C. Cifuentes

Abstract. It is well known that the real spectrum of a ring A, $\mathrm{Spec}_R(A)$, is a compact space with respect to the constructive topology. In this note we exibit an underlying uniform structure for that space, which is totally bounded, and prove the completeness of this space constructing the limits of the Cauchy nets. The main theorem (Theorem 1) gives a characterization of the compactness of $\mathrm{Spec}_R(A)$ by means of the net convergence modulo ultrafilters.

Seja A um anel comutativo com identidade 1. Um ideal I de A é dito *real* se $a_1^2 + \ldots + a_n^2 \in I$ implica que $a_1, \ldots, a_n \in I$. Um anel que admite ideais reais primos é chamado de *semi-real*. (cf. LAM [1982] pag. 2.2).

Seja $\alpha \subseteq A$, α é dito um *cone primo* de A se (i) $\alpha + \alpha \subseteq \alpha$, (ii) $\alpha \cdot \alpha \subseteq \alpha$, (iii) $A^2 \subseteq \alpha$, (iv) $-1 \notin \alpha$ e (v) $ab \in -\alpha$ implica que $a \in \alpha$ ou $b \in \alpha$. Verifica-se facilmente que a condição (v) é equivalente a (v') $\alpha \cup -\alpha = A$ e $\alpha \cap -\alpha$ é um ideal primo (real) de A. O ideal $\alpha \cap -\alpha$ é chamado de *suporte de* α e denotado por $\mathrm{supp}(\alpha)$.

A existência de cones primos de A é equivalente a A ser um anel semi-real e também ao fato de $-1 \notin \sum A^2$. Denotamos com $\mathrm{Spec}_R(A)$ a coleção de cones primos de A (cf. Bochnak, Coste e Roy [1987] pag. 80 ss).

Define-se a *topologia ordinária* sobre $\mathrm{Spec}_R(A)$ pela seguinte sub-base de abertos: $\mathcal{B} = \{H_A(a)\}_{a \in A}$ onde $H_A(a) = \{\alpha \in \mathrm{Spec}_R(A) \ / \ a \notin -\alpha\}$. A ***topologia construtiva*** sobre $\mathrm{Spec}_R(A)$ é definida tomando como base o fecho booleano de $\mathcal{B}$, i.e. a coleção de combinações booleanas finitas de elementos de $\mathcal{B}$. É claro que a topologia construtiva é mais fina que a topologia ordinária.

Um caso particular importante é quando o anel é um corpo real F. Neste caso, os cones primos de F são exatamente os cones positivos de ordens de F, e $\mathrm{Spec}_R(F)$, denotado também por X_F, é o espaço de ordens de F. A topologia ordinária e a topologia construtiva coincidem pois $\mathcal{B}$ é fechado por complementares ($H_F(a)^c = H_F(-a)$). Esta topologia é chamada de *topologia de Harrison* sobre X_F.

Observa-se que $\mathrm{Spec}_R(A)$ com a topologia construtiva, que de aqui em diante denotaremos por S, é um espaço zero-dimensional, i.e. tem uma base de clopens (abertosfechados), a qual é gerada pela seguinte sub-base: $\{H_A(a)\}_{a\in A} \cup \{H_A(a)^c\}_{a\in A}$.

Nesta nota mostraremos que o espaço S é uniformizável mediante uma estrutura uniforme totalmente limitada. Neste caso, a compacidade do espaço considerado é equivalente à sua completude como espaço uniforme (i.e. toda rede de Cauchy converge). O espaço S é compacto (cf. Bochnak, Coste e Roy [1987] pag. 114) e aqui será fornecida uma outra demonstração deste fato mediante a análise da completude, explicitando o limite de toda rede de Cauchy do espaço.

A topologia construtiva sobre $\mathrm{Spec}_R(A)$ é gerada pela seguinte sub-base de uniformidade: $\{\mathcal{U}_a\}_{a\in A}$, onde $\mathcal{U}_a = \{(\alpha, \beta) \in S \times S \ / \ a \in -\alpha \Leftrightarrow a \in -\beta\}$ (observa-se que $\mathcal{U}_a \circ \mathcal{U}_a \subseteq \mathcal{U}_a$). Esta sub-base tem a seguinte propriedade, a que, além de garantir que a topologia construtiva é gerada por essa uniformidade, mostra que o espaço uniforme resultante é totalmente limitado: para todo $\alpha \in S$ e todo $a \in A$,

$$\mathcal{U}_a[\alpha] = \{\beta \in S \ / \ (\alpha, \beta) \in \mathcal{U}_a\} = \begin{cases} H_A(a), & \text{se } \ a \notin -\alpha \\ H_A(a)^c, & \text{se } \ a \in -\alpha. \end{cases}$$

Também pode-se verificar facilmente que a topologia construtiva é Hausdorff pois $\bigcap\limits_{a\in A} \mathcal{U}_a = \Delta_S = \{(\alpha, \alpha) \ / \ \alpha \in S\}$.

A seguir daremos uma caracterização da compacidade de S em termos da convergência em ultrafiltros.

Definições.

1. Seja $(\alpha_i)_{i\in I}$ uma família em S e U um ultrafiltro sobre I; define-se $\lim_U \alpha_i = \alpha$ see para todo $a \in A$ existe $X \in U$ tal que para todo $i \in X$, $(\alpha, \alpha_i) \in \mathcal{U}_a$, ou equivalentemente, se para todo $a \in A$, $\{i \in I \ / \ (\alpha, \alpha_i) \in \mathcal{U}_a\} \in U$. (Esta definição é ainda equivalente, sendo S um espaço zero-dimensional, à usual de convergência em ultrafiltros: $\alpha = \lim_U \alpha_i$ see para todo $a \in A$, se $\alpha \in H_A(a)$, então $\{i \in I \ / \ \alpha_i \in H_A(a)\} \in U$, e se $\alpha \in H_A(a)^c$, então $\{i \in I \ / \ \alpha_i \in H_A(a)^c\} \in U$).

2. Seja $(D, \leq)$ um conjunto dirigido; uma rede em S é qualquer família $(\alpha_i)_{i\in D}$ de elementos de S.

3. Uma rede $(\alpha_i)_{i\in D}$ em S é dita de Cauchy se para todo $a \in A$ existe $k \in D$ tal que para todo $i, \ j \geq k$, $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{U}_a$.

4. Seja $(\alpha_i)_{i\in D}$ uma rede em S; define-se $\lim_i \alpha_i = \alpha$ see para todo $a \in A$ existe $k \in D$ talque para todo $i \geq k$, $(\alpha, \alpha_i) \in \mathcal{U}_a$.

5. Um ultrafiltro U sobre um conjunto dirigido D é chamado de "livre" se contém todos os subconjuntos $Y_k = \{i \in D \ / \ i \geq k\}$, $k \in D$. (A noção de ultrafiltro livre sobre um conjunto dirigido generaliza a de ultrafiltro não-principal sobre os naturais $\mathbf{N}$; observa-se que a família $\{Y_k\}_{k \in D}$ tem a Propriedade de Interseção Finita).

Lema. Seja $(\alpha_i)_{i \in D}$ uma rede de Cauchy em S e U um ultrafiltro livre sobre D, então $\alpha = \lim_U \alpha_i$ see $\alpha = \lim_i \alpha_i$.

Demonstração.

a) Suponhamos $\alpha = \lim_i \alpha_i$ e seja $a \in A$ com $\alpha \in H_A(a)$; temos que existe $k \in D$ tal que para todo $i \geq k$, $(\alpha, \alpha_i) \in \mathcal{U}_a$, i.e. $\alpha_i \in \mathcal{U}_a[\alpha] = H_A(a)$, logo $Y_k = \{i \in D \ / \ i \geq k\} \subseteq \{i \in D \ / \ \alpha_i \in H_A(a)\}$, portanto, como U é livre temos que $\{i \in D \ / \ \alpha_i \in H_A(a)\} \in U$, se $\alpha \in H_A(a)^c$ procede-se em forma análoga, em consequência, $\alpha = \lim_U \alpha_i$.

b) Suponhamos $\alpha = \lim_U \alpha_i$, então para todo $a \in A$ existe $X_a \in U$ tal que para $i \in X_a$, $(\alpha, \alpha_i) \in \mathcal{U}_a$, mas como $(\alpha_i)_{i \in D}$ é de Cauchy, para todo $a \in A$ existe $k_a \in D$ tal que para $i, j \geq k_a$, $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathcal{U}_a$.

Seja $a \in A$, então como U é livre, $Z = X_a \cap Y_{k_a} \in U$ (em particular, $Z \neq \emptyset$).

Seja $k \in Z$ qualquer, então, se $i \geq k$ temos que: como $k \in X_a$, $(\alpha, \alpha_k) \in \mathcal{U}_a$, mas como $i, k \geq k_a$, $(\alpha_k, \alpha_i) \in \mathcal{U}_a$, i.e. $(\alpha, \alpha_i) \in \mathcal{U}_a \circ \mathcal{U}_a \subseteq \mathcal{U}_a$, logo, $\alpha = \lim_i \alpha_i$. ■

Teorema 1. São equivalentes:

i) Para toda família $(\alpha_i)_{i \in I}$ e todo ultrafiltro U sobre I, existe $\alpha = \lim_U \alpha_i$ e para todo $a \in A$:

$$\alpha \in H_A(a) \Leftrightarrow \{i \in I \ / \ \alpha_i \in H_A(a)\} \in U.$$

ii) Para toda rede de Cauchy $(\alpha_i)_{i \in D}$ e todo ultrafiltro U livre sobre D, existe $\alpha = \lim_i \alpha_i$ e para todo $a \in A$:

$$\alpha \in H_A(a) \Leftrightarrow \{i \in D \ / \ \alpha_i \in H_A(a)\} \in U.$$

iii) O espaço S é completo.

iv) O espaço S é compacto.

Demonstração.

(i $\Rightarrow$ ii): É consequência imediata do Lema.

(ii $\Rightarrow$ iii): Por (ii) toda rede de Cauchy $(\alpha_i)_{i \in D}$ converge a $\alpha = \lim_i \alpha_i$.

(iii $\Rightarrow$ iv): É imediato por ser S um espaço uniforme totalmente limitado.

(iv $\Rightarrow$ i): Suponhamos que para todo $\alpha \in S$ existe $a_\alpha \in A$ tal que $\alpha \in H_A(a_\alpha)$ e $\{i \in I \ / \ \alpha_i \in H_A(a_\alpha)\} \notin U$. Obviamente $\{H_A(a_\alpha)\}_{\alpha \in S}$ é um cobrimento aberto de S, logo, como S é compacto, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in S$ tais que $\{H_A(a_{\alpha_k})\}$, $k = 1, \ldots, n$, é ainda cobrimento de S.

Afirmação. $\{i \in I \ / \ \alpha_i \in H_A(a_{\alpha_1})\} \cup \ldots \cup \{i \in I \ / \ \alpha_i \in H_A(a_{\alpha_n})\} = I$.

Com efeito, dado $i \in I$, $\alpha_i \in S = \bigcup_{k=1}^{n} H_A(a_{\alpha_k})$, então existe $k = 1, \ldots, n$ tal que $\alpha_i \in H_A(a_{\alpha_k})$, i.e. $i \in \{i \in I \ / \ \alpha_i \in H_A(a_{\alpha_k})\}$.

Portanto, como $I \in U$ e U é maximal, existe $k = 1, \ldots, n$ tal que $\{i \in I \ / \ \alpha_i \in H_A(a_{\alpha_k})\} \in U$, uma contradição. Logo, existe $\lim_U \alpha_i$.

Seja $\alpha = \lim_U \alpha_i$ e $a \in A$. Se $\alpha \in H_A(a)$ então, por definição, $\{i \in I \ / \ \alpha_i \in H_A(a)\} \in U$. Se $\alpha \notin H_A(a)$ então $\alpha \in H_A(a)^c$ (que é um aberto da topologia construtiva), logo, por definição, $\{i \in I \ / \ \alpha_i \in H_A(a)^c\} \in U$, i.e. $\{i \in I \ / \ \alpha_i \in H_A(a)\} \notin U$ ■

Lema. Sejam $\mathcal{A} = \langle A, \ldots \rangle$ uma estrutura-modelo de uma linguagem de 1ª ordem L, P um predicado (monádico) adicional e L^P a linguagem aumentada. Sejam $\{\langle \mathcal{A}, \alpha_i \rangle\}_{i \in I}$ uma família de estruturas-modelo de L^P e U um ultrafiltro sobre I. Definindo $\alpha = \{a \in A \ / \ \{i \in I \ / \ a \in \alpha_i\} \in U\}$ temos que se satisfaz a seguinte versão do teorema (de ultraprodutos) de Los: se $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ é uma formula da linguagem L^P e $a_1, \ldots, a_n \in A$ então,

$$\langle \mathcal{A}, \alpha \rangle \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \{i \in I \ / \ \langle \mathcal{A}, \alpha_i \rangle \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]\} \in U.$$

Demonstração. Por indução sobre a complexidade de φ.

Caso 1. Se φ é $t_1 = t_2$ com t_1 e t_2 termos de L:
$\langle \mathcal{A}, \alpha \rangle \models (t_1 = t_2)[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow t_1[a_1, \ldots, a_n] = t_2[a_1, \ldots, a_n]$
$\Leftrightarrow$ para todo $i \in I$: $\langle \mathcal{A}, \alpha_i \rangle \models (t_1 = t_2)[a_1, \ldots, a_n]$ (pois φ não depende de i) $\Leftrightarrow \{i \in I \ / \ \langle \mathcal{A}, \alpha_i \rangle \models (t_1 = t_2)[a_1, \ldots, a_n]\} (= I) \in U$.

Caso 2. Se φ é $R(t_1, \ldots, t_n)$ com R um predicado n-ário de L e $t_1, \ldots, t_n$ termos de L: análogo ao caso 1.

Caso 3. Se φ é $P(t)$ com t um termo de L:
$\langle \mathcal{A}, \alpha \rangle \models P(t)[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow t[a_1, \ldots, a_n] \in \alpha \Leftrightarrow$ (por definição de α) $\{i \in I \ / \ t[a_1, \ldots, a_n] \in \alpha_i\} \in U \Leftrightarrow \{i \in I \ / \ \langle \mathcal{A}, \alpha_i \rangle \models P(t)[a_1, \ldots, a_n]\} \in U$.

Caso 4. Se φ é $\neg\psi$ ou $\psi \wedge \theta$: é imediato por propriedades elementares do ultrafiltro U.

Caso 5. Se φ é $(\exists x)\psi$:
$(\Rightarrow)$ $\langle \mathcal{A},\ \alpha\rangle \models (\exists x)\psi[a_1,\ldots,a_n] \Rightarrow$ existe $b \in A$ tal que $\langle \mathcal{A},\ \alpha\rangle \models \psi[b,\ a_1,\ldots,a_n] \Rightarrow$ (por hipótese indutiva) existe $b \in A$ tal que $\{i \in I\ /\ \langle \mathcal{A},\ \alpha_i\rangle \models \psi[b,\ a_1,\ldots,a_n] \in U \Rightarrow$ $\{i \in I\ /\ \langle \mathcal{A},\ \alpha_i\rangle \models (\exists x)\psi[a_1,\ldots,a_n]\} \in U$; (isto demonstra o Lema para toda fórmula φ no sentido $\Rightarrow$).
$(\Leftarrow)$ $\{i \in I\ /\ \langle \mathcal{A},\ \alpha_i\rangle \models (\exists x)\psi[a_1,\ldots,a_n]\} \in U \Rightarrow \{i \in I\ /$ existe $b \in A$: $\langle \mathcal{A},\ \alpha_i\rangle \models \psi[b,\ a_1,\ldots,a_n]\} \in U \Rightarrow \bigcup_{b\in A}\{i \in I\ /\ \langle \mathcal{A},\ \alpha_i\rangle \models \psi[b,\ a_1,\ldots,a_n]\} \in U$; suponhamos que para todo $b \in A$, $\{i \in I\ /\ \langle \mathcal{A},\ \alpha_i\rangle \models \psi[b,\ a_1,\ldots,a_n]\} \notin U$, então, por hipótese indutiva, para todo $b \in A$, $\langle \mathcal{A},\ \alpha\rangle \not\models \psi[b,\ a_1,\ldots,a_n]$, logo, $\langle \mathcal{A},\ \alpha\rangle \models (\forall x)\neg\psi[a_1,\ldots,a_n]$, i.e. $\langle \mathcal{A},\ \alpha\rangle \models \neg(\exists x)\psi[a_1,\ldots,a_n]$, portanto, pela parte $(\Rightarrow)$ temos que $\{i \in I\ /\ \langle \mathcal{A},\ \alpha_i\rangle \models \neg(\exists x)\psi[a_1,\ldots,a_n]\} \in U$, uma contradição. ■

Uma versão generalizada do teorema de Łos e que na realidade corresponde ao nosso teorema 1 parte (i) é estudada com certa amplitude em Cifuentes [1992]. Observa-se que a versão dada no lema anterior não depende do axioma de escolha; de fato a estrutura $\langle \mathcal{A},\ \alpha\rangle$ aí construida não é um ultraproduto das estruturas $\langle \mathcal{A},\ \alpha_i\rangle$. É interessante observar que $\alpha = \bigcup_{J\in U}\bigcap_{i\in J}\alpha_i$.

O lema anterior, de natureza puramente lógica, é suficientemente geral e permite aplicar os resultados desta nota ao caso, por exemplo, do espaço de q-ordens (ou semi-ordens) Y_F de um corpo (real) F (cf. Prestel [1984] pag. 62 ss).

Teorema 2. Seja $(\alpha_i)_{i\in I}$ uma família em $S(=\mathrm{Spec}_R(A))$ e U um ultrafiltro sobre I. Seja $\alpha = \{a \in A\ /\ \{i \in I\ /\ a \in \alpha_i\} \in U\}$, então:

i) $\alpha \in S$

ii) $\lim_U \alpha_i = \alpha$

iii) para todo $a \in A : \alpha \in H_A(a) \Leftrightarrow \{i \in I\ /\ \alpha_i \in H_A(a)\} \in U$.

Demonstração.

i) É consequência imediata do lema pois as propriedades que caracterizam os cones primos de S podem ser expressas mediante fórmulas da linguagem L^P, sendo L a linguagem da teoria de aneis.

ii) Seja $a \in A$ e suponhamos que $\alpha \in H_A(a)$, então $a \notin -\alpha = \{a \in A\ /\ \{i \in I\ /\ a \in -\alpha_i\} \in U\}$, logo, $\{i \in I\ /\ a \in -\alpha_i\} \notin U$, portanto, $\{i \in I\ /\ a \notin -\alpha_i\} \in U$, i.e.

$\{i \in I \ / \ \alpha_i \in H_A(a)\} \in U$. Se $\alpha \in H_A(a)^c$ procede-se em forma análoga. Em consequência, $\lim_U \alpha_i = \alpha$.

iii) É imediato pela própria definição de α ■

Corolário.

i) $\text{Spec}_R(A)$ com a topologia construtiva é um espaço compacto (e completo como espaço uniforme).

ii) $\text{Spec}_R(A)$ com a topologia ordinária é um espaço compacto.

Demonstração.

i) é consequência imediata do teorema anterior e o teorema 1 parte (i).
ii) é consequência do fato da topologia ordinária ser menos fina que a topologia construtiva, e a parte (i) ■

REFERÊNCIAS

Bochnak, J., Coste, M., e Roy, M-F. *Géométrie Algébrique Réelle.* Springer-Verlag, 1987.

Cifuentes, J. C. *Uma Versão Topológica do Teorema de Ultraprodutos de Los.* A aparecer, 1992.

Lam, T. Y. *An Introduction to Real Algebra.* VI ELAM. INP, Morelos, México, 1982.

Prestel, A. *Lectures on Formally Real Fields.* Lect. Notes in Math. 1093. Springer-Verlag, 1984.

RELATÓRIOS DE PESQUISA — 1992

01/92 Uniform Approximation the: Non-locally Convex Case — *João B. Prolla.*

02/92 Compactificação de $L^{\tau}_{\omega\omega}(Q)$ com τ Finito — *A. M. Sette* and *J. C. Cifuentes.*

03/92 Um Modelo para Aquisição da Especificação — *Cecilia Inés Sosa Arias* and *Ariadne Carvalho.*

04/92 Convergence Estimates for the Wavelet Galerkin Method — *Sônia M. Gomes* and *Elsa Cortina.*

05/92 Optimal Chemotherapy: A Case Study with Drug Resistance, Saturation Effect and Toxicity — *M. I. S. Costa, J. L. Boldrini* and *R. C. Bassanezi.*

06/92 On the Paper "Cauchy Completeness of Elementary Logic" of D. Mundici and A. M. Sette — *J. C. Cifuentes.*

07/92 What is the EM Algorithm for Maximum Likelihood Estimation in PET and How to Accelerate it — *Alvaro R. De Pierro.*

08/92 Bifurcation from infinity and multiple solutions for an elliptic system — *Raffaele Chiappinelli* and *Djairo G. de Figueiredo.*

09/92 Approximation Processes for Vector-Valued Continuous Functions — *João B. Prolla.*

10/92 Aplicação do Método de Fraissé à Compactificação de Lógicas com Quantificadores Co-filtro — *A. M. Sette* and *J. C. Cifuentes.*

11/92 Absolutely Summing Holomorphic Mappings — *Mário C. Matos.*

12/92 The Feynman-Dyson Proof of Maxwell Equations and Magnetic Monopoles — *Adolfo A. Jr.* and *Waldyr A. R. Jr.*

13/92 A Generalized Dirac's Quantization Condition for Phenomenological Non-abelian Magnetic Monopoles — *Adolfo M. Jr.* and *Waldyr A. R. Jr.*

14/92 Multiplicity Results for the 1-Dimensional Generalized p-Laplacian — *Pedro Ubilla.*

15/92 Nowhere Vanishing Torsion Closed Curves Always Hide Twice — *Sueli R. Costa.* and *Maria Del Carmen R. Fuster.*

16/92 Uniform Approximation of Continuous Convex–Cone–Valued Functions — *João B. Prolla.*

17/92 Monotonically Dominated Operators on Convex Cones — *A. O. Chiacchio, J. B. Prolla, M. L. B. Queiroz* and *M. S. M. Roversi.*

18/92 Testing the Concept of a Photon as an Extended Object in a Variation of Franson's Experiment — *V. Buonomano, A. J. R. Madureira* and *L. C. B. Ryff.*

19/92 A New Trust Region Algorithm for Boun Constrained Minimization — *Ana Friedlander, José Mario Martínez* and *Sandra A. Santos.*

20/92 **A Priori Estimates for Positive Solutions of Semilinear Elliptic Systems Via Hardy-Sobolev Inequalities** — *Ph. Clément, D.G. de Figueiredo* and *E. Mitidieri.*

21/92 **On the Resolution of Linearly Constrained Convex Minimization Problems** — *Ana Friedlander, José Mario Martínez* and *Sandra A. Santos.*