APLICAÇÃO DO MÉTODO DE FRAISSÉ À COMPACTIFICAÇÃO DE LÓGICAS COM QUANTIFICADORES CO-FILTRO

A. M. Sette
e
J. C. Cifuentes

Junho RP 10/92

Relatório de Pesquisa

**Instituto de Matemática
Estatística e Ciência da Computação**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Campinas - São Paulo - Brasil**

Abstract - In this paper we adapt the method of Fraissé (c.f. [Fr]) to the construction of limits of Cauchy sequences of structures for the logic $L^{\tau}_{\omega\omega}(Q)$, where τ is a finite type of similarity, and Q is a co-filter quantifier.

As we show, this limits are obtained as inductives limits of certain subsequences of the given sequences.

IMECC – UNICAMP
Universidade Estadual de Campinas
CP 6065
13081 Campinas SP
Brasil

Junho – 1992

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE FRAISSÉ À COMPACTIFICAÇÃO DE LÓGICAS COM QUANTIFICADORES CO-FILTRO

A. M. Sette e J. C. Cifuentes

Abstract - In this paper we adapt the method of Fraissé (c.f. [Fr]) to the construction of limits of Cauchy sequences of structures for the logic $L^{\tau}_{\omega\omega}(Q)$, where τ is a finite type of similarity, and Q is a co-filter quantifier.

As we show, this limits are obtained as inductives limits of certain subsequences of the given sequences.

Seja τ um tipo de similaridade finito (que podemos supor, por simplicidade, relacional). Denotamos com St^{τ} a classe de todas as estruturas de tipo τ munida da topologia elementar cujos abertos são gerados pela seguinte base: $\{$ Mod $(\varphi)/\varphi$ é uma sentença de $L^{\tau}_{\omega\omega}\}$. Esta topologia, pelo fato de τ ser finito, admite a seguinte estrutura uniforme: $\{\mathcal{U}_m\}_{m\in\omega}$ onde $\mathcal{U}_m = \{(\mathcal{A},\mathcal{B})/\mathcal{A} \overset{m}{\equiv} \mathcal{B}\}$, sendo $\overset{m}{\equiv}$ a m-equivalência elementar, i.e. a equivalência elementar para sentenças até grau quantificacional m. A estrutura uniforme assim definida é totalmente limitada pois para cada m existe no máximo um número finito de sentenças, a menos de equivalência lógica, de grau quantificacional $\leq m$.

Em [Fr] Fraissé faz uso da caracterização algébrica, por ele próprio descoberta, da relação $\overset{m}{\equiv}$ em termos da existência de m-isomorfismos parciais, para construir um limite de cada sequência de Cauchy de estruturas como um certo limite indutivo, provando, deste modo, a completude do espaço St^{τ} e, portanto, a sua compacidade (pois sendo o espaço totalmente limitado, ambas as noções coincidem).

Seja Q um quantificador (monádico) e $St^{\tau}(Q)$ a classe de todos os pares $\langle\mathcal{A},\ F_Q(A)\rangle$ onde $\mathcal{A} = \langle A, \ldots\rangle \in St^{\tau}$ e F_Q é uma aplicação que a cada conjunto A associa a coleção $F_Q(A) \subseteq \mathcal{P}(A)$. $F_Q(A)$ fornece o que podemos chamar de "interpretação standard" do quantificador Q na estrutura $\mathcal{A}$ e só depende do domínio A respectivo.

Q **é um quantificador co-filtro** se para todo conjunto A, a coleção $F_Q(A)$ é um co-filtro, i.e. satisfaz:
c_1) (monotonicidade) Se $X \in F_Q(A)$ e $Y \supseteq X$, então $Y \in F_Q(A)$, e
c_2) (distributividade) Se $X \cup Y \in F_Q(A)$, então $X \in F_Q(A)$ ou $Y \in F_Q(A)$;
estas duas condições significam que a coleção "dual" $\breve{F}_Q(A) = \{X \subseteq A\ /\ X^c \notin F_Q(A)\}$ é um filtro sobre A. São exemplos particularmente importantes de quantificadores co-filtro os quantificadores cardinais Q_α, α um ordinal, onde $F_{Q_\alpha}(A) = \{X \subseteq A\ /\ |X| \geq \omega_\alpha\}$.

Por $L^{\tau}_{\omega\omega}(Q)$ denotamos a extensão de $L^{\tau}_{\omega\omega}$ mediante o quantificador Q decretando que como subclasse de $St^{\tau}_{\omega}(Q)$, mediante a coleção de todas as sentenças de $L^{\tau}_{\omega\omega}(Q)$ que envolvem o quantificador Q, e que são satisfeitas por todos os $F_Q(A)$.

Definição 1. Sejam $\langle \mathcal{A},\ F_Q(A)\rangle$, $\langle \mathcal{B},\ F_Q(B)\rangle \in St^{\tau}(Q)$,

i) um isomorfismo parcial $f : \langle \mathcal{A},\ F_Q(A)\rangle \to \langle \mathcal{B},\ F_Q(B)\rangle$ (ou abreviadamente 0-iso) é uma função $f : \mathrm{dom}\, f \subseteq A \to \mathrm{im}\, f \subseteq B$ tal que $f \mid \mathrm{dom}\, f$ é um isomorfismo de $\mathcal{A} \mid \mathrm{dom}\, f$ em $\mathcal{B} \mid \mathrm{im}\, f$.

ii) seja $f : \langle \mathcal{A},\ F_Q(A)\rangle \to \langle \mathcal{B},\ F_Q(B)\rangle$ um n-iso; dizemos que f é um $(n+1)$-iso se as seguintes condições são satisfeitas:
a) para todo $a \in A$ existem $b \in B$ e $\overline{f} \supseteq f$ tais que $\overline{f}$ é um n-iso, $a \in \mathrm{dom}\, \overline{f}$ e $\overline{f}(a) = b$; além disso, definido para $S \subseteq A : [a]^n_S = \{a' \in A /$ existe um n-iso $g : \langle \mathcal{A},\ F_Q(A)\rangle \to \langle \mathcal{A},\ F_Q(A)\rangle$ tal que $g \mid S = \mathrm{id}$ e $g(a) = a'\}$, temos que $[a]^n_{\mathrm{dom} f} \in F_Q(A)$ implica $[b]^n_{\mathrm{im} f} \in F_Q(B)$.
b) para todo $b \in B$ existem $a \in A$ e $\overline{f} \supseteq f^{-1}$ tais que $\overline{f}$ é um n-iso, $b \in \mathrm{dom}\, \overline{f}$, $\overline{f}(b) = a$ e $[b]^n_{\mathrm{im} f} \in F_Q(B)$ implica $[a]^n_{\mathrm{dom} f} \in F_Q(A)$.
iii) $\langle \mathcal{A},\ F_Q(A)\rangle \overset{n}{\cong} \langle \mathcal{B},\ F_Q(B)\rangle$ se existe um n-iso f de $\langle \mathcal{A},\ F_Q(A)\rangle$ em $\langle \mathcal{B},\ F_Q(B)\rangle$, ou equivalentemente, se ϕ é um n-iso de $\langle \mathcal{A},\ F_Q(A)\rangle$ em $\langle \mathcal{B},\ F_Q(B)\rangle$.

Proposição 2.
i) para todo $n \in \omega$ e todo $S \subseteq A$ finito, os conjuntos $[a]^n_S$ formam uma partição finita de A.
ii) para todo $n \in \omega : \langle \mathcal{A},\ F_Q(A)\rangle \overset{n}{\cong} \langle \mathcal{B},\ F_Q(B)\rangle$ see $\langle \mathcal{A},\ F_Q(A)\rangle \equiv \langle \mathcal{B},\ F_Q(B)\rangle$.

Demonstração. (cf. [Ca] pag. 94, teorema 5.1 (a)) ∎

Observação. É claro que na definição de $\overset{n}{\cong}$ podemos substituir cada estrutura $\mathcal{A}$ pela sua expansão n-FULL, i.e., por $\mathcal{A}_{n-FULL} = \langle A,\ \{R_\varphi/\varphi$ é uma fórmula de $L^{\tau}_{\omega\omega}(Q)$ com $qr(\varphi) \leq n\}\rangle$, onde para quaisquer $a_1, \ldots, a_r \in A$, $R_\varphi(a_1, \ldots, a_r) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_r]$. Este fato não altera o resultado dado na proposição 2, sendo que a parte (ii) adota a forma seguinte: para todo $n \in \omega, \langle \mathcal{A}_{n-FULL},\ F_Q(A)\rangle \overset{n}{\cong} \langle \mathcal{B}_{n-FULL},\ F_Q(B)\rangle$ see $\langle \mathcal{A},\ F_Q(A)\rangle \equiv \langle \mathcal{B},\ F_Q(B)\rangle$.

Proposição 3. (Construção de Fraissé). Seja $(\langle \mathcal{A}_n,\ F_Q(A_n)\rangle)_{n\in\omega}$ uma sequência de Cauchy em $St^{\tau}(Q)$, que abreviaremos simplesmente por $(\mathcal{A}_n)$, então existe um diagrama $\langle (\mathcal{B}_n),\ f_n\rangle$ associado a $(\mathcal{A}_n)$ satisfazendo as seguintes condições:

1. $(\mathcal{B}_n)$ é uma subsequência de $(\mathcal{A}_n)$
2. para todo n, $f_n : \mathcal{B}_n \to \mathcal{B}_{n+1}$ é um n-iso com $\mathrm{im}\, f_n \subseteq \mathrm{dom}\, f_{n+1}$
3. $\mathrm{dom}\, f_n$ é finito para todo n.
4. para todo $a \in B_n$ existem $b \in \mathrm{dom}\, f_{n+1}$ e $\overline{f}_n \supseteq f_n$ tal que $\overline{f}_n$ é um $(n-1)$-iso e $\overline{f}_n(a) = b$.

Demonstração. O diagrama $\langle (\mathcal{B}_n),\ f_n\rangle$ será construído por indução. Deve-se observar que $(\mathcal{A}_n)$ é de Cauchy see para todo m existe k_m tal que para quaisquer $i,\ j \geq k_m$ tem-se que $\langle \mathcal{A}_i,\ F_Q(A_i)\rangle \overset{m}{\cong} \langle \mathcal{A}_j,\ F_Q(A_j)\rangle$, i.e., $\phi : \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}_j$ é um m-iso.

n = 0: tomando $m = 1$ existe k_1 (que podemos supor mínimo) tal que para $i,\ j \geq k_1$, $\mathcal{A}_i \overset{1}{\cong} \mathcal{A}_j$, i.e., $\phi : \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}_j$ é um 1-iso.

Consideremos a subsequência $\mathcal{A}_{k_1} \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}_{k_1+1} \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}_{k_1+2} \xrightarrow{\phi} \dots$ e definamos $\mathcal{B}_0 = \mathcal{A}_{k_1}$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}_{k_1+1}$ e $f_0 = \phi$ que satisfazem trivialmente as condições 1 - 4. Observa-se que na sequência construída $\mathcal{B}_0 \xrightarrow{f_0} \mathcal{B}_1 \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}_{k_1+2} \xrightarrow{\phi} \dots$ todas as funções subsequêntes são 1-iso e tem domínio finito, e em toda a sequência a imagem de uma função está contida no domínio da seguinte.

n > 0: em geral, como hipótese indutiva para o passo n suporemos construída uma subsequência

$$\mathcal{B}_0 \xrightarrow{f_0} \mathcal{B}_1 \xrightarrow{f_1} \dots \mathcal{B}_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \mathcal{B}_n \xrightarrow{g} \mathcal{A}_k \to \mathcal{A}_{k+1} \to \dots$$

para um certo k, onde $f_0, \dots, f_{n-1}$ satisfazem as condições 1 - 4, as funções subsequentes são n-iso e tem domínio finito, e em toda a sequência a imagem de uma função está contida no domínio da seguinte.

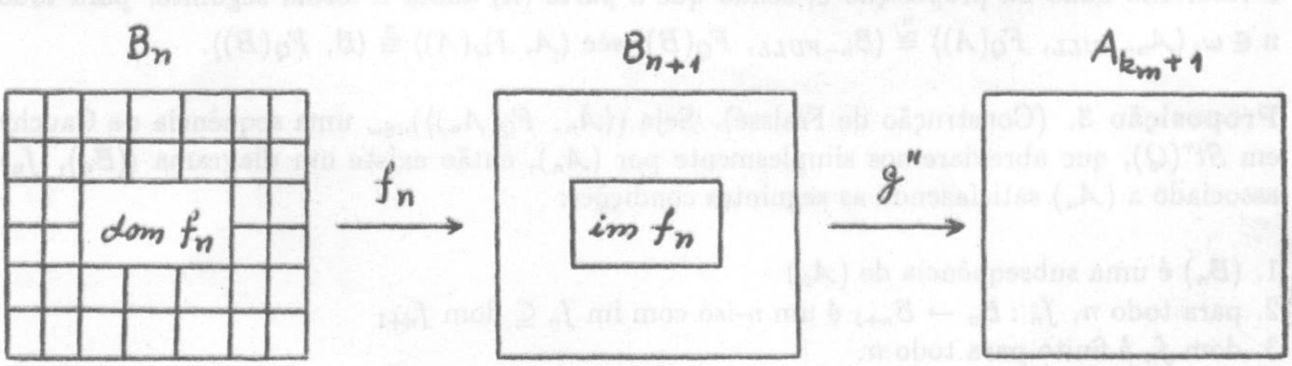
Seja $m = d + n\ell_n + (n+1)$ onde $d = |\text{dom } g|$ e $\ell_n = |\{[b]^n_{\text{dom} g} / b \in B_n \setminus \text{ dom } g\}|$, então existe $k_m \geq k$ (mínimo) tal que para $i,\ j \geq k_m$, $\phi : \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}_j$ é um m-iso. Temos então

$$\mathcal{B}_0 \xrightarrow{f_0} \mathcal{B}_1 \xrightarrow{f_1} \dots \mathcal{B}_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \mathcal{B}_n \xrightarrow{g} \dots \xrightarrow{h} \mathcal{A}_{k_m} \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}_{k_m+1} \xrightarrow{\phi} \dots;$$

observa-se que $g' = h \circ \dots \circ g$ é um n-iso por hipótese indutiva. Podemos definir então $\mathcal{B}_{n+1} = \mathcal{A}_{k_m}$ e $f_n = g'$ e tem-se, também por hipótese indutiva, que im $f_{n-1} \subseteq$ dom $f_n (=$ dom $g' =$ dom $g)$.

A seguir construiremos as funções subsequentes de tal maneira que sejam $(n+1)$-iso e em toda a sequência a imagem de uma função esteja contida no domínio da seguinte.

Estendemos o m-iso $\phi : \mathcal{B}_{n+1} \to \mathcal{A}_{k_m+1}$ a im f_n, a qual tem d elementos, obtendo um $n\ell_n + (n+1)$-iso que chamaremos de g''. Agora consideremos a partição de B_n dada por $\{[b]^n_S / b \in B_n\}$ sendo $S =$ dom $f_n =$ dom g; então temos a seguinte configuração:



De cada classe $[b]^n_S$ com $b \notin$ dom f_n escolhemos no máximo n elementos, então, como f_n é um n-iso, para cada um deles, digamos c, existe um elemento $d \in B_{n+1} \setminus$ im f_n e uma extensão $\overline{f}_n \supseteq f_n$ que é um $(n-1)$-iso tal que $\overline{f}_n(c) = d$. Percorrendo todas as classes $[b]^n_S$ obtemos em $B_{n+1} \setminus$ im f_n no máximo $n\ell_n$ elementos. Finalmente estendemos g'' a esses $n\ell_n$ elementos obtendo um $(n+1)$-iso g''': $\mathcal{B}_{n+1} \to \mathcal{A}_{k_m+1}$ tal que dom g''' é finito e im $f_n \subseteq$ dom g'''. Deve-se observar que dom g''' será tomado como dom f_{n+1} no passo indutivo seguinte.

O processo se conclui estendendo $\phi : \mathcal{A}_{k_m+1} \to \mathcal{A}_{k_m+2}$ a im g''', que tem no máximo $d+n\ell_n$ elementos, obtendo um $(n+1)$-iso, e repetindo-o para as subsequentes funções ϕ.

É importante observar que a partição de $\mathcal{B}_n$, módulo a existência de um n-iso em $\langle \mathcal{B}_n,\ F_Q(\mathcal{B}_n)\rangle$, foi escolhida justamente para satisfazer a condição 4, já que se $a \in \mathcal{B}_n$, existe $a' \in [a]^n_S$ que, pelo processo anterior, é levado por uma extensão $\overline{f}_n$ de f_n a dom f_{n+1} (= dom g''') ■

Definição 2. Se $(\mathcal{A}_n)$ é de Cauchy em $St^\tau(Q)$ e $\langle(\mathcal{B}_n),\ f_n\rangle$ é um diagrama que satisfaz as condições 1 - 4 da proposição 3, definimos $\ell(\mathcal{B}_n) = \langle \varinjlim \mathcal{B}_n|\mathrm{dom} f_n,\ \widehat{q}\ \rangle$ onde

i) $\varinjlim \mathcal{B}_n|\mathrm{dom} f_n = \langle B,\ \{R_\varphi/\varphi$ é uma fórmula de $L^\tau_{\omega\omega}(\varphi)\}\rangle$ com $B = \{\langle a,n\rangle/n \in \omega$ e $a \in \mathrm{dom} f_n\}/\sim$, sendo que a relação $\sim$ é dada por: $\langle a,n\rangle \sim \langle b,m\rangle$ com $n \leq m$ se $f_{n,m}(a) = f_{m-1}\circ \ldots \circ f_n(a) = b$. Além disso, denotando com $[a,n]$ a classe de equivalência de $\langle a,n\rangle$, define-se para cada $\varphi(x_1,\ldots,x_r) \in L^\tau_{\omega\omega}(\varphi)$: $R_\varphi([a_1,n_1],\ldots,[a_r,n_r])$ see $\mathcal{B}_n \models \varphi[f_{n_1,n}(a_1),\ldots,f_{n_r,n}(a_r)]$ onde $n = \max(qr(\varphi),\ n_1,\ldots,n_r)$. É claro que, neste caso, se $m \geq n$, então $\mathcal{B}_m \models \varphi[f_{n_1,m}(a_1),\ldots,f_{n_r,m}(a_r)]$.

ii) $\ell(\mathcal{A}_n) \models \varphi[[a_1,n_1],\ldots,[a_r,n_r]]$ see $R_\varphi([a_1,n_1],\ldots,[a_r,n_r])$, i.e., see para todo $m \geq \max(qr(\varphi),\ n_1,\ldots,n_r)$, $\mathcal{B}_m \models \varphi[f_{n_1,m}(a_1),\ldots,f_{n_r,m}(a_r)]$. Um caso particular é o seguinte: se φ é uma sentença, $\ell(\mathcal{A}_n) \models \varphi$ see para todo $m \geq qr(\varphi)$, $\mathcal{B}_m \models \varphi$.

iii) $\widehat{q}$ define-se como a coleção de todos os subconjuntos $X \subseteq B$ para os quais existe uma fórmula $\varphi(x,x_1,\ldots,x_r)$ e parametros $b_1,\ldots,b_r \in B$ tais que $X = \{b \in B/\ell(\mathcal{A}_n) \models \varphi[b,\ b_1,\ldots,b_r]\}$ e $\ell(\mathcal{A}_n) \models Qx\varphi[b_1,\ldots,b_r]$.

Proposição 4. $(\mathcal{A}_n)$ converge a $\ell(\mathcal{A}_n)$ em $St^\tau_w(Q)$.

Demonstração. Seja φ uma sentença em $L^\tau_{\omega\omega}(Q)$ tal que $\ell(\mathcal{A}_n) \models \varphi$, então, pela Definição 2 parte (i), existe n tal que para todo $m \geq n$, $\mathcal{B}_m \models \varphi$, logo, a subsequência $(\mathcal{B}_n)$ converge a $\ell(\mathcal{A}_n)$, portanto, como $(\mathcal{A}_n)$ é de Cauchy, a própria sequência $(\mathcal{A}_n)$ converge a $\ell(\mathcal{A}_n)$ ■

Observações.

1. O diagrama $\langle(\mathcal{B}_n),\ f_n\rangle$, associado a uma sequência de Cauchy $(\mathcal{A}_n)$, não é único pois a própria construção dele depende de uma escolha dos elementos de domf_n para cada n. Além disso, o limite indutivo introduzido na definição 2 parte (i) é um tanto diferente do limite indutivo usual, onde todas as estruturas são de mesmo tipo de similaridade. Ele pode ser considerado como limite da sequência acima onde cada $\mathcal{B}_n$ é substituído pela sua expansão n-FULL $\mathcal{B}_{n,\ n-FULL}$ correspondente.

2. A proposição anterior significa que $\ell(\mathcal{A}_n) \in CSt^\tau(Q)$. Portanto, pelo corolário da proposição 1, $\widehat{q}$, como definida acima, é um co-filtro.

3. $\widehat{q}$ não é, em geral, a interpretação standard de Q em $\ell(\mathcal{A}_n)$. Uma construção puramente

algébrica de $\widehat{q}$ é dada em [S - S] para o caso dos quantificadores cardinais Q_α.

4. A definição de satisfação para o limite indutivo $\ell(\mathcal{A}_n)$ não é trivial, ela é sugerida pelo fato da sequência $((\mathcal{B}_n), f_n)$ preservar fórmulas de grau quantificacional cada vez maior. Ela é suscetível de demonstração uma vez que se tenha uma construção algébrica de $\widehat{q}$.

5. Aplicando a construção de Fraissé à sequência constante $(\mathcal{A})$ obtemos uma estrutura $\ell(\mathcal{A})$ que pode ser mergulhada em forma natural como uma subestrutura elementar de $\mathcal{A}$, pois, salvo identificações, podemos considerar as funções f_n como inclusões e, neste caso, a definição 2 parte (ii) acima fornece: $\ell(\mathcal{A}) \models \varphi[a_1, \ldots, a_r]$ see $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_r]$. Sendo o domínio de $\ell(\mathcal{A})$ enumerável teríamos uma versão do Teorema de Löwenheim - Skolem relativo às interpretações $F_Q(A)$ de $\mathcal{A}$ e $\widehat{q}$ de $\ell(\mathcal{A})$, i.e. $\langle \ell(\mathcal{A}), \widehat{q} \rangle \prec \langle \mathcal{A}, F_Q(A) \rangle$

REFERÊNCIAS

[Ca] Caicedo, X. *Back-and Forth Systems for Arbitrary Quantifiers.* In Math. Logic in Latin America (Arruda, Chuaqui, da Costa Eds.). North Holland Pub. Comp., 1980, 83-102.

[Fr] Fraissé, R. *Course of Mathematical Logic.* Vol. 2 Model Theory. D. Reidel Pub. , 1974.

[M – T] Makowsky, J. A. e Tulipani, S. *Some Model Theory for Monotone Quantifiers.* Arch. Math. Logik **18** (1877) 115-134.

[S – C] Sette, A. M. e Cifuentes, J. C. *Compactificação de $L^\tau_{\omega\omega}(Q)$ com τ finito* . Relatório de Pesquisa 02/92. IMECC-UNICAMP, 1992.

[S – S] Sette, A. M. e Sette, J. S. A aparecer

RELATÓRIOS DE PESQUISA — 1992

01/92 **Uniform Approximation the: Non-locally Convex Case** — *João B. Prolla.*

02/92 **Compactificação de $L^{\tau}_{\omega\omega}(Q)$ com τ Finito** — *A. M. Sette* and *J. C. Cifuentes.*

03/92 **Um Modelo para Aquisição da Especificação** — *Cecilia Inés Sosa Arias* and *Ariadne Carvalho.*

04/92 **Convergence Estimates for the Wavelet Galerkin Method** — *Sônia M. Gomes* and *Elsa Cortina.*

05/92 **Optimal Chemotherapy: A Case Study with Drug Resistance, Saturation Effect and Toxicity** — *M. I. S. Costa, J. L. Boldrini* and *R. C. Bassanezi.*

06/92 **On the Paper "Cauchy Completeness of Elementary Logic" of D. Mundici and A. M. Sette** — *J. C. Cifuentes.*

07/92 **What is the EM Algorithm for Maximum Likelihood Estimation in PET and How to Accelerate it** — *Alvaro R. De Pierro.*

08/92 **Bifurcation from infinity and multiple solutions for an elliptic system** — *Raffaele Chiappinelli* and *Djairo G. de Figueiredo.*

09/92 **Approximation Processes for Vector-Valued Continuous Functions** — *João B. Prolla.*