COMPACTIFICAÇÃO DE $L^{\tau}_{\omega\omega}(Q)$ COM τ FINITO

A. M. Sette and *J. C. Cifuentes*

Maio RP 02/92

Relatório de Pesquisa

Instituto de Matemática
Estatística e Ciência da Computação

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Campinas - São Paulo - Brasil

Abstract: In this paper we extend the usual notion of model (as an estructure) to the more general notion of **Cauchy Sequence of Structures** in a similar eay as rational are extending to real number by means of Cauchy Sequence of Rationals. We show that the structure space St^τ is dense in the complete space CSt^τ of Cauchy sequence of structures and that CSt^τ is compact in the (topo)logical sense.

IMECC – UNICAMP
Universidade Estadual de Campinas
CP 6065
13081 Campinas SP
Brasil

Maio – 1992

COMPACTIFICAÇÃO DE $L^{\tau}_{\omega\omega}(Q)$ COM τ FINITO

A. M. Sette and *J. C. Cifuentes*

Abstract - In this paper we extend the usual notion of model (as an structure) to the more general notion of **Cauchy Sequence of Structures** in a similar way as rational are extending to real number by means of Cauchy sequence of rationals. We show that the structure space St^{τ} is dense in the complete space CSt^{τ} of Cauchy sequences of structures and that CSt^{τ} is compact in the (topo)logical sense.

Introdução. Por $L^{\tau}_{\omega\omega}(Q)$ designamos a lógica de primeira ordem de tipo relacional finito τ, acrescida do quantificador (monádico por simplicidade) Q com a semântica usual, onde $\mathcal{A} \models Qx\varphi(x)$ significa $\{a \in A \ / \ \mathcal{A} \models \varphi(a)\} \in q(\mathcal{A})$, sendo $\mathcal{A}$ uma estrutura com A seu domínio, i.e. $\mathcal{A} = \langle A, \ R_1^{n_1}, \ldots, R_m^{n_m}\rangle$ se $\tau = \langle n_1, \ldots, n_m\rangle$, e $q(\mathcal{A})$ a interpretação do quantificador Q na estrutura $\mathcal{A}$.

Por St^{τ} designamos a classe das estruturas de tipo τ. St^{τ} é uma classe própria e no que segue estudaremos alguns dos seus aspectos estruturais, por tanto vamos supor a existência de uma família conveniente de "Universos" como proposto por Grothendieck e outros.

Dados $\mathcal{A}, \ \mathcal{B} \in St^{\tau}$ diremos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são n-equivalentes, em símbolos $\mathcal{A} \overset{n}{\equiv} \mathcal{B}$, se $\mathcal{A} \models \varphi$ see $\mathcal{B} \models \varphi$ para toda sentença $\varphi \in L^{\tau}_{\omega\omega}(Q)$ com grau quantificacional $qr(\varphi) \leq n$, onde $qr(\varphi)$ é definido (de modo usual) como segue:

i) $qr(\varphi) = 0$ se φ é atômica,

ii) $qr(\neg\varphi) = qr(\varphi)$,

iii) $qr(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \max(qr(\varphi_1), \ qr(\varphi_2))$,

iv) $qr(\exists x\varphi(x)) = qr(Qx\varphi(x)) = qr(\varphi(x)) + 1$,

$\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são elementarmente equivalentes, em símbolos $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, se $\mathcal{A} \overset{n}{\equiv} \mathcal{B}$ para todo n.

Estrutura Métrica de St^{τ}. Dados $\mathcal{A}, \ \mathcal{B} \in St^{\tau}$ definimos $d(\mathcal{A}, \ \mathcal{B}) = \dfrac{1}{1 + \sup\{m \ / \ \mathcal{A} \overset{m}{\equiv} \mathcal{B}\}}$.

Verifica-se facilmente que d é uma pseudométrica (e, portanto, define uma topologia uniforme) que gera a topologia elementar de St^{τ} cuja base é dada pelas classes elementares (cf. [B - S] pag. 157). Além disso, como o número de fórmulas φ de $L^{\tau}_{\omega\omega}(Q)$ com $qr(\varphi) \leq n$ é finito, a menos de equivalência, segue-se que $\langle St^{\tau}, \ d\rangle$ é totalmente limitado (uma vez que dado s, o conjunto das bolas $b_s(\mathcal{A}) = \{\mathcal{B} \in St^{\tau} \ / \ d(\mathcal{A}, \ \mathcal{B}) < s\}$ que cobrem St^{τ} é finito), portanto, o espaço $\langle St^{\tau}, \ d\rangle$ é compacto se e somente se ele for completo (cf. [Ke] pag. 198). Um argumento conhecido mostra que a compacidade topológica coincide, neste caso, com a compacidade lógica de $L^{\tau}_{\omega\omega}(Q)$ (supondo que os "modelos" são os objetos de St^{τ}).

Por exemplo, como é sabido (cf. [B - S] pag. 263) $L^{\tau}_{\omega\omega}(Q_0)$,onde $\mathcal{A} \models Q_0x\varphi(x)$ significa "existe um número infinito de elementos $a \in A$ tais que $\mathcal{A} \models \varphi(a)$", não é compacto, portanto, o espaço correspondente $\langle St^{\tau}, \ d\rangle$ não é completo.

No que segue consideraremos o completamento usual de $\langle St^\tau,\, d\rangle$ (cf. [Ke] pag. 195).

Por CSt^τ designamos a classe de todas as sequências de Cauchy de St^τ e por $\langle CSt^\tau,\, d^*\rangle$ o completamento de $\langle St^\tau,\, d\rangle$, onde dadas as sequências $(\mathcal{A}_n)$, $(\mathcal{B}_n) \in CSt^\tau$ define-se:

$$d^*((\mathcal{A}_n),\, (\mathcal{B}_n)) = \lim_{k\to\infty} d(\mathcal{A}_k,\, \mathcal{B}_k).$$

Com esta definição temos que $i : St^\tau \to CSt^\tau$ definida por $i(\mathcal{A}) = (\mathcal{A}_n)$ com $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}$ para todo n, é uma imersão isométrica, $i(St^\tau)$ é denso em CSt^τ e CSt^τ é completo (cf. [Ke] pag. 196).

Observemos que a construção de $\langle CSt^\tau,\, d^*\rangle$ é puramente topológica (geométrica) e, em princípio, nada tem a ver com a lógica (a não ser através da métrica inicial d). Veremos a seguir que existe uma maneira canônica de se introduzir uma nova métrica d' em CSt^τ derivada da lógica $L^\tau_{\omega\omega}(Q)$ e equivalente a d^*.

Estrutura Lógica de CSt^τ. Dado $(\mathcal{A}_n) \in CSt^\tau$ e uma sentença $\varphi \in L^\tau_{\omega\omega}(Q)$, dizemos que a sequência $(\mathcal{A}_n)$ satisfaz φ, em símbolos $(\mathcal{A}_n) \models\!\!\!= \varphi$, se existe $k_0 \in I\!N$ tal que $\mathcal{A}_k \models \varphi$ (no sentido usual) para todo $k \geq k_0$.

Observemos que:

1. Dados $(\mathcal{A}_n) \in CSt^\tau$ e $\ell \in I\!N$ existe $k_0 \in I\!N$ tal que para todo $k,\, k' \geq k_0$, $\mathcal{A}_k \overset{\ell}{\equiv} \mathcal{A}_{k'}$; portanto, se φ é uma sentença de $L^\tau_{\omega\omega}(Q)$ com $qr(\varphi) \leq \ell$ temos que $(\mathcal{A}_n) \models\!\!\!= \varphi$ ou $(\mathcal{A}_n) \models\!\!\!= \neg\varphi$ (e não ocorre ambos os casos), i.e. $(\mathcal{A}_n) \models\!\!\!= \varphi$ está bem definida e $(\mathcal{A}_n) \models\!\!\!= \neg\varphi$ see $(\mathcal{A}_n) \not\models\!\!\!= \varphi$.
2. $(\mathcal{A}_n) \models\!\!\!= \varphi_1 \wedge \varphi_2$ see $(\mathcal{A}_n) \models\!\!\!= \varphi_1$ e $(\mathcal{A}_n) \models\!\!\!= \varphi_2$.
3. A semântica dada por $\models\!\!\!=$ é uma extensão da semântica usual $\models$ uma vez que $\mathcal{A} \models \varphi$ see $i(\mathcal{A}) \models\!\!\!= \varphi$, qualquer que seja a sentença $\varphi \in L^\tau_{\omega\omega}(Q)$.
4. O seguinte é um exemplo particularmente interessante e, a nosso ver, motiva uma rediscussão sobre o conceito de infinito: segundo a semântica $\models\!\!\!=$ aplicada à lógica $L^\tau_{\omega\omega}(Q_0)$, existem objetos $(\mathcal{A}_n) \in CSt^\tau$ "finitos", i.e., tais que $(\mathcal{A}_n) \models\!\!\!= \neg Q_0 x(x = x)$, mas "arbitrariamente grandes", i.e., $(\mathcal{A}_n) \models\!\!\!= \exists x_1 \ldots \exists x_m (x_1 \neq x_2 \wedge \ldots \wedge x_{m-1} \neq x_m)$ qualquer que seja m. O mesmo fenômeno ocorre em qualquer lógica deste tipo onde se possa "expressar a noção de finito".

Com estes preliminares definimos então para $(\mathcal{A}_n)$, $(\mathcal{B}_n) \in CSt^\tau$ $d'((\mathcal{A}_n),\, (\mathcal{B}_n)) = \dfrac{1}{1 + \sup\{m \;/\; (\mathcal{A}_n) \overset{m}{\equiv} (\mathcal{B}_n)\}}$, onde , neste caso, $(\mathcal{A}_n) \overset{m}{\equiv} (\mathcal{B}_n)$ tem o significado da m-equivalência correspondente à nova semântica.

Verifica-se facilmente que d' é uma pseudométrica em CSt^τ, que o espaço uniforme definido é totalmente limitado, pela mesma razão que no caso de d, e que a topologia gerada é definida tomando-se como base as classes elementares de sequências de Cauchy.

Portanto, no caso de ser o espaço $\langle CSt^\tau,\, d'\rangle$ topologicamente compacto, a lógica $L^\tau_{\omega\omega}(Q)$ será logicamente compacta no seguinte sentido: seja $\sum$ um conjunto de sentenças de $L^\tau_{\omega\omega}(Q)$, então $\sum$ tem modelo (generalizado) em CSt^τ se e somente se todo subconjunto finito de $\sum$ tem modelo em CSt^τ.

Proposição 1. A identidade $I : \langle CSt^\tau,\, d'\rangle \to \langle CSt^\tau,\, d^*\rangle$ é uma isometria.

Demonstração. Basta provar que $\sup\{m \;/\; (\mathcal{A}_n) \overset{m}{\equiv} (\mathcal{B}_n)\} = \lim_{k\to\infty} \sup\{m \;/\; \mathcal{A}_k \overset{m}{\equiv} \mathcal{B}_k\}$.

1. Suponhamos que $\sup\{m \;/\; (\mathcal{A}_n) \overset{m}{\equiv} (\mathcal{B}_n)\} = \ell \in I\!N$, então tem-se que
a) $(\mathcal{A}_n) \overset{\ell}{\equiv} (\mathcal{B}_n)$ e b) $(\mathcal{A}_n) \overset{\ell+1}{\not\equiv} (\mathcal{B}_n)$.

Afirmação. Existe k_0 tal que para todo $k \geq k_0$, $\mathcal{A}_k \overset{\ell}{\equiv} \mathcal{B}_k$ e $\mathcal{A}_k \overset{\ell+1}{\not\equiv} \mathcal{B}_k$, isto implicará que para $k \geq k_0$, $\sup\{m \;/\; \mathcal{A}_k \overset{m}{\equiv} \mathcal{B}_k\} = \ell$, i.e., $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\{m \;/\; \mathcal{A}_k \overset{m}{\equiv} \mathcal{B}_k\} = \ell$.

Com efeito, por (a), para toda sentença φ com $qr(\varphi) \leq \ell$ tem-se que $(\mathcal{A}_n)|\!\!\equiv \varphi$ see $(\mathcal{B}_n)|\!\!\equiv \varphi$. Seja $\varphi_\ell = \bigwedge\{\varphi \;/\; qr(\varphi) \leq \ell \text{ e } (\mathcal{A}_n)|\!\!\equiv \varphi\}$, então $(\mathcal{A}_n)|\!\!\equiv \varphi_\ell$ e portanto, $(\mathcal{B}_n)|\!\!\equiv \varphi_\ell$, logo, existem k_1 e k_2 tais que se $k \geq k_1$ então $\mathcal{A}_k \models \varphi_\ell$ e se $k \geq k_2$ então $\mathcal{B}_k \models \varphi_\ell$; tomando $k' = \max(k_1, k_2)$ temos que para $k \geq k'$, $\mathcal{A}_k \models \varphi_\ell$ e $\mathcal{B}_k \models \varphi_\ell$, i.e. $\mathcal{A}_k \overset{\ell}{\equiv} \mathcal{B}_k$.

Por (b) existe ψ com $qr(\psi) = \ell + 1$ tal que $(\mathcal{A}_n)|\!\!\equiv \psi$ e $(\mathcal{B}_n)|\!\!\equiv \neg\psi$, logo, existe k'' tal que para todo $k \geq k''$ temos que $\mathcal{A}_k \models \psi$ e $\mathcal{B}_k \models \neg\psi$, i.e. $\mathcal{A}_k \overset{\ell+1}{\not\equiv} \mathcal{B}_k$. Finalmente, tomando $k_0 = \max(k', k'')$ segue-se a afirmação.

2. Suponhamos agora que $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\{m \;/\; \mathcal{A}_k \overset{m}{\equiv} \mathcal{B}_k\} = \ell \in I\!N$, então existe k' tal que para todo $k \geq k'$, $\sup\{m \;/\; \mathcal{A}_k \overset{m}{\equiv} \mathcal{B}_k\} = \ell$, i.e. para $k \geq k'$ tem-se que $\mathcal{A}_k \overset{\ell}{\equiv} \mathcal{B}_k$ e $\mathcal{A}_k \overset{\ell+1}{\not\equiv} \mathcal{B}_k$. Daí segue-se que $(\mathcal{A}_n) \overset{\ell}{\equiv} (\mathcal{B}_n)$ e $(\mathcal{A}_n) \overset{\ell+1}{\not\equiv} (\mathcal{B}_n)$, i.e. $\sup\{m \;/\; (\mathcal{A}_n) \overset{m}{\equiv} (\mathcal{B}_n)\} = \ell$.

Se (1) e (2) segue-se que $\sup\{m \;/\; (\mathcal{A}_n) \overset{m}{\equiv} (\mathcal{B}_n)\} = \infty$ see $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\{m \;/\; \mathcal{A}_k \overset{m}{\equiv} \mathcal{B}_k\} = \infty$. Isto completa a demostração. ∎

Temos demonstrado então o seguinte:

Teorema Central. Para toda lógica $L^\tau_{\omega\omega}(Q)$ com τ finito existe uma extensão CSt^τ da semântica usual St^τ tal que:
1. CSt^τ é um espaço topológico uniforme cuja topologia é gerada pelas classes elementares.
2. St^τ é denso CSt^τ.
3. CSt^τ é totalmente limitado.
4. CSt^τ é completo e, em consequência, compacto.
5. $L^\tau_{\omega\omega}(Q)$ é compacta a respeito da semântica estendida. ∎

Existe uma outra forma de se introduzir uma lógica subjacente a CSt^τ que é equivalente à dada por $|\!\!\equiv$. Observe que a equivalência mencionada é dada, na proposição 2 a seguir, na forma de um Teorema de Los para CSt^τ.

Sejam $(\mathcal{A}_n)$ uma sequência de estruturas em St^τ, U um ultrafiltro não-principal em ω e φ uma sentença de $L^\tau_{\omega\omega}(Q)$. Dizemos que $(\mathcal{A}_n)$ U-satisfaz φ, em símbolos $(\mathcal{A}_n) \models_U \varphi$, se $\{k \in \omega \;/\; \mathcal{A}_k \models \varphi\} \in U$.

Proposição 2. Se $(\mathcal{A}_n) \in CSt^\tau$ e U é um ultrafiltro não-principal em ω, então, para toda sentença $\varphi \in L^\tau_{\omega\omega}(Q)$ temos

$$(\mathcal{A}_n)|\!\!\equiv \varphi \quad \text{see} \quad (\mathcal{A}_n) \models_U \varphi.$$

Demonstração.
1. Suponhamos $(\mathcal{A}_n)|\!\!\equiv \varphi$, então existe k_0 tal que para $k \geq k_0$, $\mathcal{A}_k \models \varphi$, portanto, o conjunto $X = \{k \in \omega \;/\; \mathcal{A}_k \models \varphi\}$ é cofinito, i.e. $X \in U$ por ser U não-principal, logo, $(\mathcal{A}_n) \models_U \varphi$.
2. Se $(\mathcal{A}_n) \models_U \varphi$, então o conjunto $X = \{k \in \omega \;/\; \mathcal{A}_k \models \varphi\} \in U$, logo, como U é não-principal,

X é infinito, portanto, cofinal, i.e. para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $j > k$ tal que $j \in X$.

Afirmação. Existe k_0 tal que para $k \geq k_0$, $\mathcal{A}_k \models \varphi$.

Com efeito, como $(\mathcal{A}_n)$ é de Cauchy, para $\ell = qr(\varphi)$ existe k_1 tal que para todo $i, j \geq k_1$, $\mathcal{A}_i \overset{\ell}{\equiv} \mathcal{A}_j$, em particular para φ, $\mathcal{A}_i \models \varphi$ see $\mathcal{A}_j \models \varphi$.

Pela cofinalidade de X, para k_1 existe $k_0 > k_1$ tal que $k_0 \in X$, i.e. $\mathcal{A}_{k_0} \models \varphi$, logo, se $k \geq k_0 (> k_1)$ temos que $\mathcal{A}_k \models \varphi$; portanto, $(\mathcal{A}_n) \models \varphi$ ∎

Corolário. Se $(\mathcal{A}_n)$ é uma sequência convergente em St^τ e $\mathcal{A} = \lim \mathcal{A}_n$, **então para toda** sentença $\varphi \in L^\tau_{\omega\omega}(Q)$:

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \text{see} \quad (\mathcal{A}_n) \models_U \varphi.$$

Demonstração. Basta provar que $(\mathcal{A}_n) \equiv I(\mathcal{A})$ no sentido de $\models$. Seja $\varphi \in L^\tau_{\omega\omega}(Q)$, e k' tal que para todo $k \geq k'$, $\mathcal{A}_k \overset{\ell}{\equiv} \mathcal{A}$, sendo $\ell = qr(\varphi)$.
1. Se $(\mathcal{A}_n) \models \varphi$ então existe k_0 tal que para todo $k \geq k_0$, $\mathcal{A}_k \models \varphi$. Logo, tomando $k \geq \max(k', k_0)$ temos que $\mathcal{A} \models \varphi$, i.e. $I(\mathcal{A}) \models \varphi$.
2. Se $I(\mathcal{A}) \models \varphi$, i.e. $\mathcal{A} \models \varphi$, então, para todo $k \geq k'$, $\mathcal{A}_k \models \varphi$, logo, $(\mathcal{A}_n) \models \varphi$ ∎

Observa-se que os espaços St^τ e CSt^τ não são Hausdorff, mas, em ambos os casos, os limites de sequências convergentes estão determinados salvo equivalência elementar. Além disso, o corolário anterior implica que se $L^\tau_{\omega\omega}(Q)$ é compacta no sentido usual, e portanto, St^τ é completo, então a compactificação CSt^τ de St^τ não introduz nenhuma propriedade lógica a $L^\tau_{\omega\omega}(Q)$, uma vez que neste caso, $(\mathcal{A}_n) \equiv \lim \mathcal{A}_n$.

Notas.
1. Tarski foi o primeiro a observar que a compacidade lógica de $L^\tau_{\omega\omega}$ é equivalente à compacidade de uma certa topologia definida em St^τ pelas classes elementares (cf. [T]). Fraissé (cf. [Fr] pag. 32) utiliza pela primeira vez o fato da topologia usual de St^τ (τ finito) ser uniformizável para demonstrar a compacidade de $L^\tau_{\omega\omega}$. X. Caicedo tem feito recentemente um estudo extenso de certas famílias de lógicas com quantificadores generalizados com métodos de topologia uniforme (cf. [Ca]). C. Karp (cf. [Ka]) introduziu o uso de famílias de estruturas, os sistemas dirigidos de estruturas, como modelos generalizados de linguagens infinitárias. Recentemente, o primeiro dos autores, em colaboração com D. Mundici, obteve uma simples e nova prova do Teorema de Compacidade de $L^\tau_{\omega\omega}$ para τ finito (cf. [M-S]). Um estudo mais amplo e aprofundado do assunto tem sido objeto de estudo do segundo autor (cf. [Ci]).
2. A noção de **Lógica Abstrata** no sentido de Lindström (cf. [E] pag. 27-30) generaliza de modo conveniente a noção de **fórmula** das diversos linguagens L^τ que aparecem de modo natural na lógica, no entanto, conserva a noção de **modelo** clássica como estruturas de tipo τ.

É fácil observar que se definirmos **isomorfismo** entre dois modelos em CSt^τ como segue: dados $(\mathcal{A}_n)$, $(\mathcal{B}_n) \in CSt^\tau$, dizemos que $(\mathcal{A}_n)$ e $(\mathcal{B}_n)$ são isomorfos se existe k_0 tal que para todo $k \geq k_0$, $\mathcal{A}_k$ e $\mathcal{B}_k$ são isomorfos (no sentido usual); então a relação $\models$ satisfaz todas as condições de uma lógica abstrata salvo aquela que permite definir "satisfação", (cf. [E] pag. 30: Def. 1.2.1 (iv)).
3. Observemos que os resultados acima obtidos são ainda válidos para lógicas $L^\tau_{\omega\omega}(\mathcal{C})$ **onde** $\mathcal{C}$ **é**

uma família finita de quantificadores.

REFERÊNCIAS

[B - S] Bell, J. L. e Slomson, A. B. **Models and Ultraproducts: An Introduction**. North-Holland, 1969.

[Ca] Caicedo, X. **Abstract Model Theory**. Seminário de Lógica IMECC-UNICAMP, 1989 (Não-Publicado).

[Ci] Cifuentes, J. C. **Uma Versão Topológica do Teorema de Ultraprodutos de Los**. A aparecer.

[E] Ebbinghaus, H. D. **Extended Logics: The General Framework**. In Model Theoretic Logics (Barwise-Feferman Eds.). Springer-Verlag, 1985.

[Fr] Fraissé, R. **Course of Mathematical Logic**. Vol. 2 Model Theory. D. Reidel Pub., 1974.

[Ka] Karp, C. **Interpreting Formal Languages in Direct Systems of Structures**. (Abstract) JSL vol. 29, nº 3 (1964) 155-156.

[Ke] Kelley, J. L. **General Topology**. Van Nostrand Reinhold, 1955.

[M - S] Mundici, D. e Sette A. M. **Cauchy Completeness of Elementary Logic**. A aparecer.

[T] Tarski, A. **Some Notions and Methods on the Borderline of Algebra and Metamathematics**. Proc. of the Int. Cong. of Math. 1950. AMS (1952) 705-720.

RELATÓRIOS DE PESQUISA — 1992

01/92 **Uniform Approximation the: Non-locally Convex Case** — *E. João B. Prolla.*