FATORES NÃO PARAMÉTRICOS PARA EXPERIMENTOS COMPLETAMENTE CASUALIZADOS PARA TRÊS FATORES, COM INTERAÇÃO

Belmer Garcia Negrillo

RELATÓRIO TÉCNICO Nº 30/90

Abstract. We consider a general model with 3 factors and r-replications

$$Y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\,\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\,\gamma)_{ijk} + e_{ijkl}$$

Where e_{ijkl} are i.i.d. r. v's with continuous distribuitions and $E(e_{ijkl}) = 0$.

In general a distribuition free test for one factor effect depends on the null hypothesis abort other factors. In this work the dependence is eliminated through a transformation from the general model the estimated effects of other factors.

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação
IMECC – UNICAMP
Caixa Postal 6065
13.081 – Campinas – SP
BRASIL

Setembro – 1990

Testes não Paramétricos para Experimentos Completamente Casualizados para Três Fatores, com Interação.

Belmer Garcia Nagerillo

UNICAMP - IMECC

Caixa Postal 6065, Cep. 13 081
Campinas, S. P. Brasil

ABSTRACT

We consider a general model with 3 factors and r-replications

$$Y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + e_{ijkl}$$

Where e_{ijkl} are i.i.d. r. v's with continuous distribuitions and $E(e_{ijkl}) = 0$.

In general a distribuition free test for one factor effect depends on the null hypothesis abort other factors. In this work the dependence is eliminated through a transformation from the general model the estimated effects of other factors.

Resumo:

Consideremos o modelo geral com 3 fatores A, B, C e r repetições

$$Y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + e_{ijkl}$$

onde e_{ijkl} são v. a i.i.d. com distribuição contínua, e $E(e_{ijkl}) = 0$.

Em geral a distribuição livre da estatística do teste para um fator depende das hipóteses nulas dos outros fatores. Em este trabalho a dependência é eliminada através de transformações de alinhamento, obtidas por a subtração do modelo geral os efeitos estimados dos outros fatores.

1. Introdução:

Considere-se o modelo geral com 3 fatores A, B, C com r repetições

$$Y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + e_{ijkl}$$

sendo e_{ijkl} v. a i.i.d. com função de distribuição contínua, e $E(e_{ijkl}) = 0$ para $i = 1, \ldots a$; $j = 1, \ldots, b$; $k = 1, \ldots, c$; $l = 1, \ldots, r$.

As transformações de alinhamento para testar as hipóteses sobre os efeitos são obtidas por subtração de modelo geral os efeitos estimados que são diferentes ao do interesse, assim temos, que para os:

i) Efeitos do fator A

$$x_{ijkl} = y_{ijkl} - \overline{y}_{ijk.} + \overline{y}_{i...}$$

ii) Efeitos do fator B

$$x_{ijkl} = y_{ijkl} - \overline{y}_{ijk.} + \overline{y}_{.j..}$$

iii) Efeitos do fator C

$$x_{ijkl} = y_{ijkl} - \overline{y}_{ijk.} + \overline{y}_{..k.}$$

iv) Efeitos da interação AB

$$x_{ijkl} = y_{ijkl} - \overline{y}_{ijk.} + \overline{y}_{ij..} - \overline{y}_{i...} - \overline{y}_{.j..} + 2\overline{y}_{....}$$

v)Efeitos da interação AC

$$x_{ijkl} = y_{ijkl} - \overline{y}_{ijk.} + \overline{y}_{i.k.} - \overline{y}_{i...} - \overline{y}_{..k.} + 2\overline{y}_{....}$$

vi) Efeitos da interação BC

$$x_{ijkl} = y_{ijkl} - \overline{y}_{ijk.} + \overline{y}_{.jk.} - \overline{y}_{..k.} - \overline{y}_{.j..} + 2\overline{y}_{....}$$

vii) Efeitos da interação ABC

$$x_{ijkl} = y_{ijkl} - \overline{y}_{ij..} - \overline{y}_{i.k.} - \overline{y}_{.jk.} + \overline{y}_{i...} + \overline{y}_{.j..} + \overline{y}_{..k.}$$

Se R_{ijkl} é o posto de x_{ijkl} na amostra conjunta, os escores $a(.)$ são escolhidos de acordo com as funções seletoras $\overline{\varphi}_1$ e $\overline{\varphi}_2$, obtidos das observações y_{ijkl}, Negrillo (1989).

As estatísticas dos testes são da forma:

$$Q_{(.)} = \frac{SQ_{(.)}}{s^2_{(.)}} \quad \text{onde :}$$

$$s^2_{(.)} = (N-1)^{-1} \sum_{i}^{a} \sum_{j}^{b} \sum_{k}^{c} \sum_{l}^{r} (a(R_{ijkl}) - \overline{a}_{....})^2$$

$$\overline{a}_{....} = N^{-1} \sum_{i}^{a} \sum_{j}^{b} \sum_{k}^{c} \sum_{l}^{r} (a(R_{ijkl})); \quad N = a\ b\ c\ r$$

e as somas de quadrados são:

$$SQ_{(A)} = bcr \sum_{i}^{a} (\overline{a}_{i...} - \overline{a}_{....})^2$$

$$SQ_{(B)} = acr \sum_{j}^{b} (\overline{a}_{.j..} - \overline{a}_{....})^2$$

$$SQ_{(C)} = abr \sum_{k}^{c} (\overline{a}_{..k.} - \overline{a}_{....})^2$$

$$SQ_{(AB)} = cr \sum_{i}^{a} \sum_{j}^{b} (\overline{a}_{ij..} - \overline{a}_{i...} - \overline{a}_{.j..} + \overline{a}_{....})^2$$

$$SQ_{(AC)} = br \sum_{i}^{a} \sum_{k}^{c} (\overline{a}_{i.k.} - \overline{a}_{i...} - \overline{a}_{..k.} + \overline{a}_{....})^2$$

$$SQ_{(BC)} = ar \sum_{j}^{b} \sum_{k}^{c} (\overline{a}_{.jk.} - \overline{a}_{.j..} - \overline{a}_{..k.} + \overline{a}_{....})^2$$

$$SQ_{(ABC)} = r \sum_{i}^{a} \sum_{j}^{b} \sum_{k}^{c} (\overline{a}_{ijk.} - \overline{a}_{ij..} - \overline{a}_{i.k.} - \overline{a}_{.jk.} + \overline{a}_{i...} + \overline{a}_{.j..} + \overline{a}_{..k.} - \overline{a}_{....})^2$$

Para cada classe de hipóteses existem diferentes transformações e consequentemente diferentes $s^2_{(.)}$, $\overline{a}_{ijk.}, \ldots, \overline{a}_{....}$

As distribuições livres das estatísticas do teste, sob H_0, para os efeitos de um determinado fator, são independentes de se as hipóteses nulas para os outros fatores são verdadeiras ou não, Kubinger (1986). A seguir determinaremos a distribuição assintótica de $Q_{(.)}$, para um caso particular.

Por exemplo se for feita a opção pelos escores de Wilcoxon ($a(Ri) = Ri$), pode ser verificado que:

$$
\begin{aligned}
s^2 &= (N-1)^{-1} \sum_i^a \sum_j^b \sum_k^c \sum_l^r (R_{ijkl} - \overline{R}_{....})^2 \\
&= (N-1)^{-1} \sum_\alpha^N (\alpha - \overline{\alpha})^2 = \frac{N(N-1)(N+1)}{12(N-1)} = \frac{N(N+1)}{12}
\end{aligned}
$$

onde:

$$
\overline{R}_{....} = N^{-1} \sum_i^a \sum_j^b \sum_k^c \sum_l^r R_{ijkl} = (N)^{-1} \sum_\alpha^N \alpha = \overline{\alpha} = \frac{N+1}{2}
$$

Tome-se como exemplo, o teste para a interação dos fatores AB

$$
\begin{aligned}
Q_{(AB)} &= \left[\frac{N(N+1)}{12}\right]^{-1} cr \sum_i^a \sum_j^b (\overline{R}_{ij..} - \overline{R}_{i...} - \overline{R}_{.j..} + \overline{R}_{....})^2 \\
&= \frac{12}{ab(N+1)} \sum_i^a \sum_j^b (\overline{R}_{ij..} - \overline{R}_{i...} - \overline{R}_{.j..} + \overline{R}_{....})^2
\end{aligned}
$$

Como ilustração, será provado que:

$$
E(Q_{(AB)}) = (a-1)(b-1)
$$

$$
\begin{aligned}
E(Q_{(AB)}) = \frac{12}{ab(N+1)} \Big\{ \sum_i^a \sum_j^b E(\overline{R}_{ij..} \\
- E(\overline{R}_{ij..}))^2 - b \sum_i^a E(\overline{R}_{i...} - E(\overline{R}_{i...}))^2
\end{aligned}
$$

$$-a\sum_{j}^{b} E(\overline{R}_{.j..} - E(\overline{R}_{.j..}))^2\Big\} =$$

$$= \frac{12}{N(N+1)}\left\{\sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b} cr\frac{1}{cr}(E[R^2] - (E[R])^2) - \right.$$

$$\left.\sum_{i}^{a} bcr\frac{1}{bcr}(E[R^2] - (E[R])^2) - \sum_{j}^{b} acr\frac{1}{acr}(E[R^2] - (E[R])^2)\right\}$$

como $Var(Ri) = \dfrac{N^2-1}{12}$ temos:

$$E(Q_{(AB)}) = \frac{12}{N(N+1)}\left\{\frac{N^2-1}{12}\left[\sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b}\left(\frac{N-cr}{(N-1)}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{i}^{a}\left(\frac{N-bcr}{(N-1)}\right) - \sum_{j}^{b}\left(\frac{N-acr}{(N-1)}\right)\right]\right\}$$

$$= N^{-1}(abN - N - aN + N - bN + N) = ab - a - b + 1$$

$$E(Q_{(AB)}) = (a-1)(b-1)$$

Como as estatísticas lineares de postos, com escores de Wilcoxon tem, sob H_0, distribuição assintoticamente normal, Sen e Puri (1985). A estatística $Q_{(AB)}$ tem, sob H_0, distribuição assintóticamente $x^2_{(a-1)(b-1)}$. Para os demais testes, as demonstrações são análogas.

Assim sob H_0, a estatística $Q_{(a)}$ tem distribuição assintoticamente x^2_v, que, para cada fator temos:

$$Q_{(A)} = \frac{SQ_{(A)}}{s^2_{(A)}} \sim x^2_{(a-1)} \qquad Q_{(AB)} = \frac{SQ_{(AB)}}{s^2_{(AB)}} \sim x^2_{(a-1)(b-1)}$$

$$Q_{(B)} = \frac{SQ_{(B)}}{s^2_{(B)}} \sim x^2_{(b-1)} \qquad Q_{(AC)} = \frac{SQ_{(AC)}}{s^2_{(AC)}} \sim x^2_{(a-1)(c-1)}$$

$$Q_{(C)} = \frac{SQ_{(C)}}{s^2_{(C)}} \sim x^2_{(c-1)} \qquad Q_{(BC)} = \frac{SQ_{(BC)}}{s^2_{(BC)}} \sim x^2_{(b-1)(c-1)}$$

$$Q_{(ABC)} = \frac{SQ_{(ABC)}}{s^2_{(ABC)}} \sim x^2_{(a-1)(b-1)(c-1)}$$

2. Um exemplo numérico

Para o desenvolvimento deste exemplo, utilizou-se parte dos dados fornecidos pela coordenação de 3º SEAGRO e 34º RBRAS - realizadas na ESAL em Lavras (MG) - relativos aos resultados da pesquisa "Níveis de Adubação Nitrogenada e Fosfatada em Mudas de Café (Cofea arabica L.) Podadas.

Conduziu-se a análise através de uma estrutura fatorial $4 \times 4 \times 2$ comparando os fatores: nitrogênio, fósforo e forma de aplicação, com 4 replicações para cada resposta, onde a variável de interesse foi a altura do broto.

Usando-se um programa escrito em linguagem pascal efetuou-se a seleção de escores, obtendo-se $\varphi_1 = 2,51$ e $\varphi_2 = 1,56$. Adotou-se assim os escores da distribuição normal, $a(i) = \Phi^{-1}(i/N+1)$.

Para tais conjuntos de dados, aplicou-se testes não-paramétricos, cujos resultados segue:

Fator	GL	W_1	Normal	$x^2_{GL}(0,95)$
A	3	15,55	16,07	7,82
B	1	6,85	8,74	3,84
C	3	14,46	14,60	7,82
AB	3	0,63	0,81	7,82
AC	9	13,42	14,60	16,92
BC	3	1,86	2,63	7,82
ABC	9	6,89	6,05	16,92

onde:
W_1 : $Q(.)$ com os escores de Wilcoxon ($a(Ri) = Ri$)
Normal: $Q(.)$ com os escores da Normal ($a(Ri) = \Phi^{-1}(Ri/N+1)$).

Pode-se observar que o teste com os escores da distribuição normal, selecionado usando as funções seletoras φ_1 e φ_2 é mais eficiente que o usual teste com os escores de Wilcoxon.

Com a finalidade de comparar com o teste paramétrico F efetuou-se transformações nas estatísticas W_1 e Normal, visando uma aproximação à distribuição F, podendo assim, construir-se a seguinte tabela comparativa:

Fator	GL	F	W_1^*	Normal*	$F_{gl,96}(0,05)$
A	3	4,99	5,18	5,36	2,72
B	1	7,22	6,85	8,74	3,96
C	3	3,79	4,82	4,86	2,72
AB	3	0,15	0,21	0,27	2,72
AC	9	1,37	1,49	1,62	2,00
BC	3	0,51	0,62	0,87	2,72
ABC	9	0,60	0,76	0,67	2,00

onde:

$W_1^* = W_1/gl$ Normal* = Normal $/gl$

3. Comparações Múltiplas

Se para um fator fixo, a hipótese nula H_0 é rejeitada ao nível de significancia α, estamos admitindo que pelo menos dois níveis do fator tem efeitos diferentes e para determinar os níveis que são diferentes, realizamos os testes:

i) Fator A

Rejeitar $H_0 : \alpha_i = \alpha_j \quad i < j = 2, \ldots, a$ se

$$|\overline{a}_{i...} - \overline{a}_{j...}| > \left[\left(\frac{1}{n_{i..}} + \frac{1}{n_{j..}}\right) S^2_{(A)} X^2_{(a-1)(1-\alpha/2)}\right]^{1/2}$$

ii) Fator B

Rejeitar $H_0 : \beta_i = \beta_j \quad i < j = 2, \ldots, b$ se

$$|\overline{a}_{.i..} - \overline{a}_{.j..}| > \left[\left(\frac{1}{n_{.i.}} + \frac{1}{n_{.j.}}\right) S^2_{(B)} X^2_{(b-1)(1-\alpha/2)}\right]^{1/2}$$

iii) Fator C

Rejeitar $H_0 : \gamma_i = \gamma_j \quad i < j = 2, \ldots, c$ se

$$|\overline{a}_{..i.} - \overline{a}_{..j.}| > \left[\left(\frac{1}{n_{..i}} + \frac{1}{n_{..j}}\right) S^2_{(C)} X^2_{(c-1)(1-\alpha/2)}\right]^{1/2}$$

onde n_{ijk} é o número de repetições na ijk-ésima casela, para $i = 1, \ldots, a, \ \ j = 1, \ldots, b$ e $k = 1, \ldots, c$

BIBLIOGRAFIA

KUBINGER, K. D. (1986). A Note Non-Parametric Tests for Interation in Two-way Layouts - Biom. J. 28, 67-72.

NEGRILLO, B. G. (1989) Um Modelo Linear Geral não Paramétrico, Relatório Técnico 34/89 - IMECC - UNICAMP

SEN, P. K. and PURI M. L. (1985), Nonparametric Methods in General Linear Models, John Wiley and Sons.

RELATÓRIOS TÉCNICOS — 1990

01/90 **Harmonic Maps Into Periodic Flag Manifolds and Into Loop Groups** — *Caio J. C. Negreiros.*

02/90 **On Jacobi Expansions** — *E. Capelas de Oliveira.*

03/90 **On a Superlinear Sturm–Liouville Equation and a Related Bouncing Problem** — *D. G. Figueiredo* and *B. Ruf.*

04/90 **F– Quotients and Envelope of F–Holomorphy** — *Luiza A. Moraes, Otília W. Paques* and *M. Carmelina F. Zaine.*

05/90 **S-Rationally Convex Domains and The Approximation of Silva-Holomorphic Functions by S–Rational Functions** — *Otília W. Paques* and *M. Carmelina F. Zaine.*

06/90 **Linearization of Holomorphic Mappings On Locally Convex Spaces** — *Jorge Mujica* and *Leopoldo Nachbin.*

07/90 **On Kummer Expansions** — *E. Capelas de Oliveira.*

08/90 **On the Convergence of SOR and JOR Type Methods for Convex Linear Complementarity Problems** — *Alvaro R. De Pierro* and *Alfredo N. Iusem.*

09/90 **A Curvilinear Search Using Tridiagonal Secant Updates for Unconstrained Optimization** — *J. E. Dennis Jr., N. Echebest, M. T. Guardarucci, J. M. Martínez, H. D. Scolnik* and *C. Vacchino.*

10/90 **The Hypebolic Model of the Mean × Standard Deviation "Plane"** — *Sueli I. R. Costa* and *Sandra A. Santos.*

11/90 **A Condition for Positivity of Curvature** — *A. Derdzinski* and *A. Rigas.*

12/90 **On Generating Functions** — *E. Capelas de Oliveira.*

13/90 **An Introduction to the Conceptual Difficulties in the Foundations of Quantum Mechanics a Personal View** — *V. Buonomano.*

14/90 **Quasi-Invariance of product measures Under Lie Group Perturbations: Fisher Information And L^2-Differentiability** — *Mauro S. de F. Marques* and *Luiz San Martin.*

15/90 **On Cyclic Quartic Extensions with Normal Basis** — *Miguel Ferrero, Antonio Paques* and *Andrzej Solecki.*

16/90 **Semilinear Elliptic Equations with the Primitive of the Nonlinearity Away from the Spectrum** — *Djairo G. de Figueiredo* and *Olimpio H. Miyagaki.*

17/90 **On a Conjugate Orbit of G_2** — *Lucas M. Chaves* and *A. Rigas.*

18/90 **Convergence Properties of Iterative Methods for Symmetric Positive Semidefinite Linear Complementarity Problems** — *Álvaro R. de Pierro* and *Alfredo N. Iusem.*

19/90 **The Status of the Principle of Relativity** — *W. A. Rodrigues Jr.* and *Q. A. Gomes de Souza.*

20/90 **Geração de Gerenciadores de Sistemas Reativos** — *Antonio G. Figueiredo Filho* e *Hans K. E. Liesenberg.*

21/90 **Um Modelo Linear Geral Multivariado Não–Paramétrico** — *Belmer Garcia Negrillo.*

22/90 **A Method to Solve Matricial Equations of the Type $\sum_{i=1}^{p} A_i X B_i = C$** — *Vera Lúcia Rocha Lopes* and *José Vitório Zago.*

23/90 **$\mathbb{Z}_2$–Fixed Sets of Stationary Point Free $\mathbb{Z}_4$–Actions** — *Claudina Izepe Rodrigues.*

24/90 **The m–Ordered Real Free Pro–2–Group Cohomological Characterizations** — *Antonio José Engler.*

25/90 **On Open Arrays and Variable Number of Parameters** — *Claudio Sergio Da Rós de Carvalho* and *Tomasz Kowaltowski.*

26/90 **Bordism Ring of Complex Involutions** — *J. Carlos S. Kiihl.*

27/90 **Approximation of Continuous Convex–Cone–Valued Functions by Monotone Operators** — *João B. Prolla.*

28/90 **On Complete Digraphs Which Are Associated to Spheres** — *Davide C. Demaria* and *J. Carlos S. Kiihl.*

29/90 **Deriving Ampère's Law from Weber's Law** — *A. K. T. Assis.*