

## TEORIA GERAL DA MEDIDA – APLICAÇÕES

*Rodney C. Bassanezi*

### RELATÓRIO TÉCNICO Nº 07/87

**RESUMO.** Apresentamos definições e conceitos básicos das medidas gerais e resultados sobre mensurabilidade. Introduzimos o conceito da medida geométrica de Hausdorff e sua comparação com a Medida de Lebesgue.

Definimos a integral relativa a uma Medida Geral crescente e apresentamos os seus teoremas fundamentais (Fatou Beppo-Levi e Lebesgue). Apresentamos ainda o conceito de Perímetro (De Giorgi) e sua conexão com a medida de fronteira de um conjunto.

Enunciamos alguns resultados sobre a “regularidade” de conjunto de perímetro finito e resolvemos o problema de Dirichlet para Equação de Superfícies Mínimas pelo Método Variacional.

Universidade Estadual de Campinas  
Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação  
IMECC – UNICAMP  
Caixa Postal 6065  
13.081 - Campinas, SP  
BRASIL

O conteúdo do presente Relatório Técnico é de única responsabilidade do autor.

Janeiro – 1987

# TEORIA GERAL DA MEDIDA - APLICAÇÕES

Rodney C. Bassanezi

Texto baseado em notas de Conferências proferidas pelo Prof.  
Mario Miranda (Univ. Trento) no IMECC (UNICAMP) em 1976.

Seja  $F$  uma família de conjuntos e  $\alpha$  uma função definida sobre  $F$  com valores em  $[0, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\} \cup \{+\infty\}$ .

Assumiremos sempre que  $\emptyset \in F$  e que  $\alpha(\emptyset) = 0$ .

DEFINIÇÃO 1. Diremos que  $\alpha$  é *numeravelmente subaditiva* (NSA) se

$$\begin{aligned} \forall F \in F, \forall \{F_h\}_{h \in \mathbb{N}} \subset F \text{ com } \bigcup_{h=1}^{\infty} F_h \supset F \implies \\ \implies \sum_{h=1}^{\infty} \alpha(F_h) \geq \alpha(F). \end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 1. Se  $\{\alpha_j\}_{j \in J}$  é uma família qualquer de funções de conjunto NSA definidas sobre  $F$ , então

$$\beta = \sup_j \alpha_j \text{ (i.e. } \beta(F) = \sup_{j \in J} \alpha_j(F), \forall F \in F) \text{ é NSA.}$$

PROVA. Óbvio.

DEFINIÇÃO 2. Diremos que  $\alpha$  definida sobre  $F$  é uma *medida externa* se

- a)  $\alpha$  é NSA
- b)  $X \in F, \forall X \subset \bigcup_{F \in F} F \text{ (} F = P(\bigcup_{F \in F} F) \text{)}$

DEFINIÇÃO 3. Diremos *medida externa gerada por  $\alpha$  definida sobre  $F$*  a máxima medida externa definida sobre subconjuntos de  $\bigcup_{F \in F} F$  cuja restrição  $F$  seja majorada por  $\alpha$ .

NOTAÇÃO.  $\beta_\alpha = \sup\{\beta \mid \beta \text{ medida externa sobre } \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F, \beta(F) \leq \alpha(F), \forall F \in \mathcal{F}\}$

OBSERVAÇÃO 1.  $\beta_\alpha(X) = \inf\{\sum_{h=1}^{\infty} \alpha(F_h) \mid F_h \in \mathcal{F}, \bigcup_{h=1}^{\infty} F_h \supset X\}$  com a convenção que  $\inf \emptyset = +\infty$ .

OBSERVAÇÃO 2.  $\beta_\alpha|_{\mathcal{F}} = \alpha \iff \alpha \text{ é NSA.}$

EXEMPLO 1.  $\mathcal{F}$  é o conjunto de todos os intervalos de  $\mathbb{R}$ , i.e.,

$$F \in \mathcal{F} \iff F = [a, b] \text{ com } a < b; a, b \in \mathbb{R};$$

$$\alpha([a, b]) = b - a \implies \beta_\alpha$$

é a medida externa de Lebesgue sobre  $\mathbb{R}$ .

EXEMPLO 2.  $\mathcal{F}$  é o conjunto de polígonos de  $\mathbb{R}^2$ ;

Se  $F \in \mathcal{F}$ ,  $\alpha(F)$  = "área" do polígono  $\implies \beta_\alpha$  é a medida de Lebesgue sobre  $\mathbb{R}^2$ .

PROBLEMA: (Aditividade de uma medida externa)

É verdade que, para  $X \subset \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$  e  $Y \subset \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$  com  $X \cap Y = \emptyset$ , vale  $\beta_\alpha(X) + \beta_\alpha(Y) = \beta_\alpha(X \cup Y)$ ?

(Resposta: Não vale).

EXEMPLO DE VITALI. Consideremos sobre  $\mathbb{R}$  a relação de equivalência:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q} = \{\text{números racionais}\}.$$

Pelo postulado de Zermelo, existe um conjunto  $X \in [0, 1]$  tal que

$$a) \ x_1 \neq x_2, \ x_1, x_2 \in X \implies x_1 - x_2 \notin \mathbb{Q}.$$

$$b) \ r \in \mathbb{R}, \ x \in X \text{ t.q. } r - x \in \mathbb{Q}.$$

Consideremos a família enumerável de conjuntos

$$\{X_q\}_{q \in \mathbb{Q}, |q| < 1} \quad \text{onde} \quad X_q = \{x + q \mid x \in X\}$$

Temos:

$$\bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ |q| < 1}} X_q \subset [-1, 2] \quad \text{e} \quad \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ |q| < 1}} X_q \supset [0, 1]$$

Portanto, se  $\beta_\alpha$  é a medida externa de Lebesgue sobre  $\mathbb{R}$  temos pela NSA

$$\beta_\alpha([0, 1]) = 1 \leq \sum_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ |q| < 1}} \beta_\alpha(X_q)$$

uma vez que se tem  $\beta_\alpha(X_q) = \beta_\alpha(X)$  para todo  $q$ .

Da desigualdade acima segue que  $\beta_\alpha(X) > 0$ .

Existirá portanto um número inteiro  $N$  tal que  $N\beta_\alpha(X) > 3$ .

Se a aditividade valesse para todos os conjuntos  $X_q$  e por conseguinte um número finito (observemos que os conjuntos  $X_q$  são disjuntos dois a dois) teremos o absurdo.

$$\beta_\alpha([-1, 2]) = 3 > \sum_{q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}} \beta_\alpha(X_{q_i}) = N\beta_\alpha(X)$$

( $q_1, \dots, q_n$  é uma  $n$ -dupla de racionais qualquer, distintos, de módulo  $< 1$ ).

DEFINIÇÃO. Seja  $\beta$  uma medida externa definida sobre  $B$ , diremos que  $M \subset B$  é um subconjunto  $\beta$ -mensurável se

$$(2.1) \quad \beta(X) = \beta(X \cap M) + \beta(X - M), \quad \forall X \subset B.$$

Evidentemente  $B$  e  $\emptyset$  são  $\beta$ -mensuráveis.

TEOREMA. Se  $\beta$  é uma medida externa sobre  $B$  e  $M_\beta = M \subset P(B)$  é a família de todos os conjuntos  $\beta$ -mensuráveis, temos:

1.  $M_\beta$  é fechada em relação à união e intersecção enumerável e ao complemento.
2.  $\beta|_{M_\beta}$  é enumeravelmente aditiva.



PROVA.

1º PASSO. Sejam  $M_1$  e  $M_2 \in \mathcal{M}$ , demonstremos que  $M_1 \cap M_2 \in \mathcal{M}$ . Seja  $X \subset B$ , da mensurabilidade de  $M_2$  aplicada a  $X \cap M_1$ , temos:

a)  $\beta(X \cap M_1 \cap M_2) + \beta(X \cap M_1 - M_2) = \beta(X \cap M_1)$ . Da mensurabilidade de  $M_1$  aplicada sobre  $X - M_1 \cap M_2$  temos:

$$b) \beta(X \cap M_1 - M_2) + \beta(X - M_1) = \beta(X - M_1 \cap M_2).$$

De (a) e (b) segue-se que

$$\beta(X \cap M_1 \cap M_2) + \beta(X - M_1 \cap M_2) = \beta(X \cap M_1) + \beta(X - M_1) = \beta(X).$$

2º PASSO. Se  $M_2 \subset M_1$  e  $M_1, M_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow M_1 - M_2 \in \mathcal{M}$ .

De fato; seja  $X \subset B$ , da mensurabilidade de  $M_1$  aplicada a  $X - (M_1 - M_2) \subset B$ , temos

$$c) \beta(X - (M_1 - M_2)) = \beta(X - M_1) + \beta((X - (M_1 - M_2)) \cap M_1) = \beta(X - M_1) + \beta(X \cap M_2).$$

Pela mensurabilidade de  $M_2$  aplicada a  $X \cap M_1$ , temos

$$d) \beta(X \cap M_1) = \beta(X \cap M_1 - M_2) + \beta(X \cap M_1 \cap M_2) = \beta(X \cap (M_1 - M_2)) + \beta(X \cap M_2).$$

Somando (c) e (d), temos

$$\beta(X - (M_1 - M_2)) + \beta(X \cap (M_1 - M_2)) = \beta(X - M_1) + \beta(X \cap M_1) = \beta(X).$$

3º PASSO. Sejam  $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$  com  $M_1 \cap M_2 = \emptyset \Rightarrow M_1 \cup M_2 \in \mathcal{M}$ .

De fato; seja  $X \subset B$ , pela mensurabilidade de  $M_2$  aplicada a  $X - M_1$  temos

$$e) \beta(X - M_1) = \beta((X - M_1) \cap M_2) + \beta(X - M_1 - M_2) = \beta((X - M_1) \cap M_2) + \beta(X - M_1 \cup M_2) = \beta(X \cap M_2) + \beta(X - M_1 \cup M_2)$$

Pela mensurabilidade de  $M_2$  aplicada a  $X \cap (M_1 \cup M_2)$ , temos

$$f) \beta(X \cap (M_1 \cup M_2)) = \beta(X \cap (M_1 \cup M_2) \cap M_2) + \beta(X \cap (M_1 \cup M_2) - M_2) = \beta(X \cap M_2) + \beta(X \cap M_1).$$

Somando (e) e (f), temos

$$\beta(X - M_1 \cup M_2) + \beta(X \cap (M_1 \cup M_2)) = \beta(X - M_1) + \beta(X \cap M_1) = \beta(X).$$

4º PASSO. Se  $M \in \mathcal{M}$  e  $X \subset B$  com  $X \cap M = \emptyset$ , então aplicando a mensurabilidade de  $M$  ao conjunto  $M \cup X$ :

$$\beta(X \cup M) = \beta(X \cup M \cap M) + \beta(X \cup M - M) = \beta(M) + \beta(X)$$

$\Rightarrow \beta$  é finitamente aditiva quando restrita a  $\mathcal{M}$ .

5º PASSO. Se  $M_h \in \mathcal{M}$ ,  $h = 1, 2, \dots$  e  $M_{h_1} \cap M_{h_2} = \emptyset$ ,  $\forall h_1 \neq h_2$ , então

$$\bigcup_{h=1}^{\infty} M_h \in \mathcal{M}.$$

De fato, se  $X \subset B$  devemos verificar se

$$(1) \quad \beta(X) = \beta(X \cap (\bigcup_{h=1}^{\infty} M_h)) + \beta(X - \bigcup_{h=1}^{\infty} M_h).$$

Uma vez que  $\beta$  é subaditiva\* basta verificar que

$$(2) \quad \beta(X) \geq \beta(X \cap (\bigcup_{h=1}^{\infty} M_h)) + \beta(X - \bigcup_{h=1}^{\infty} M_h);$$

podemos supor que  $\beta(X) < +\infty$  pois para  $\beta(X) = +\infty$  a desigualdade acima é trivialmente verificada.

Aplicando a mensurabilidade de  $\bigcup_{h=1}^N M_h$  ao conjunto  $X$  (conf. 3º Passo),

$$(3) \quad \beta(X) = \beta(X \cap (\bigcup_{h=1}^N M_h)) + \beta(X - \bigcup_{h=1}^N M_h),$$

e uma vez que supomos  $\beta(X) < +\infty \Rightarrow \beta(X \cap (\bigcup_{h=1}^N M_h)) < +\infty$ ,  $\forall N$ .

Pela mensurabilidade dos conjuntos  $M_h$ , temos

$$(4) \quad \beta(X \cap (\bigcup_{h=1}^N M_h)) = \sum_{h=1}^N \beta(X \cap M_h), \quad \forall N.$$

Usando (3) e (4), podemos escrever:

$$(5) \quad \beta(X) \geq \sum_{h=1}^N \beta(X \cap M_h) + \beta(X - \bigcup_{h=1}^N M_h), \quad \forall N;$$

$$\Rightarrow \beta(X) \geq \sum_h \beta(X \cap M_h) + \beta(X - \bigcup_{h=1}^{\infty} M_h) \geq \beta(X \cap (\bigcup_{h=1}^{\infty} M_h)) + \beta(X - \bigcup_{h=1}^{\infty} M_h).$$

6º PASSO. Se  $M_h \in \mathcal{M}$ ,  $h=1,2,\dots$ , se  $M_{h_1} \cap M_{h_2} = \emptyset$ ,  $\forall h_1 \neq h_2$

$$\Rightarrow \sum_{h=1}^{\infty} \beta(M_h) = \beta(\bigcup_{h=1}^{\infty} M_h).$$

De fato:  $\beta(\bigcup_{h=1}^{\infty} M_h) \leq \sum_{h=1}^{\infty} \beta(M_h)$  pois  $\beta$  é medida exterior.

Por outro lado, para todo  $N$  inteiro

$$\beta(\bigcup_{h=1}^{\infty} M_h) = \beta(\bigcup_{h=1}^N M_h) + \beta(\bigcup_{h=N+1}^{\infty} M_h) \geq \beta(\bigcup_{n=1}^N M_h) = \sum_{h=1}^N \beta(M_h), \quad \forall N$$

$$\Rightarrow \beta(\bigcup_{h=1}^{\infty} M_h) \geq \sum_{h=1}^{\infty} \beta(M_h).$$

cqd.

PROPOSIÇÃO. Seja .

$\alpha : F \rightarrow [0, +\infty]$ , se  $A = \bigcup_{F \in F} F$  é o domínio de  $\alpha$ , se  $\beta_\alpha$  é a medida externa sobre  $A$  gerada por  $\alpha$ , e

se  $M \subset A$  é " $\alpha$ -mensurável" então  $M$  é  $\beta_\alpha$ -mensurável.

$\left[ \begin{array}{l} M \text{ é } \alpha\text{-mensurável} \quad \text{se} \quad : \forall F \in F \Rightarrow M \cap F \in F, F - M \in F \\ \text{e } \alpha(F) = \alpha(F \cap M) + \alpha(F - M). \end{array} \right.$

PROVA. Seja  $M$   $\alpha$ -mensurável, indiquemos por  $\gamma$  a função de conjunto definida sobre  $P(A)$  por

$$\gamma(X) = \beta_\alpha(X \cap M) + \beta_\alpha(X - M) \Rightarrow \gamma \text{ é uma medida externa sobre } A \text{ e}$$

$$\gamma/F \leq \alpha \Rightarrow \gamma \leq \beta_\alpha.$$

Por outro lado é óbvio que  $\gamma \geq \beta_\alpha$  e portanto  $\gamma = \beta_\alpha$ , ou seja,

$$\forall X \subset A$$

se tem

$$\beta_\alpha(X) = \beta_\alpha(X \cap M) + \beta_\alpha(X - M)$$

o que prova que  $M$  é  $\beta_\alpha$ -mensurável.

EXEMPLO. Seja  $F$  o conjunto dos intervalos de  $\mathbb{R}$  e  $\alpha(F)$  = comprimento de  $F$  ( $F \in \mathcal{F}$ )

$\Rightarrow$  as semi-retas  $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$  ou  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

são " $\alpha$ -mensuráveis" e portanto a família dos conjuntos que é fechada em relação à intersecção e união numerável e ao complemento, devendo conter a semi-reta, contém todos os conjuntos de Borel de  $\mathbb{R}$ , em particular contém todos os abertos e fechados.

MEDIDA DE HAUSDORFF GERADA POR  $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ ;

Consideremos  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(S)$ , onde  $S$  é um espaço métrico.

Para todo  $\rho > 0$ , indicamos com  $\mathcal{F}_\rho = \{F \in \mathcal{F} \mid \text{diam } F < \rho\}$  e com  $\alpha_\rho = \alpha|_{\mathcal{F}_\rho}$ . Indicamos por  $\beta_\rho$  a medida externa  $\beta_\alpha$ , isto é, a medida externa sobre  $S$  gerada por  $\alpha_\rho$ . Denotamos finalmente por  $H_\alpha$  a medida externa  $\sup_{\rho > 0} \beta_\rho$ .

Observemos que se  $0 < \rho_1 < \rho_2$  então  $\beta_{\rho_1} \geq \beta_{\rho_2}$ ;

Portanto,

$$H_\alpha = \lim_{\rho \downarrow 0} \beta_\rho, \text{ isto é, } H_\alpha(X) = \lim_{\rho \downarrow 0} \beta_\rho(X), \quad \forall X \subset S.$$

Quando  $\alpha(F) = (\text{diam } F)^k$ ,  $0 < k \in \mathbb{R}$  se obtém a medida de Hausdorff  $k$ -dimensional (a menos de um eventual fator multiplicativo).

No caso em que  $S = \mathbb{R}^n$ ,  $n > 0$  escrevemos  $H_k^n$  para a medida de Hausdorff sobre  $\mathbb{R}^n$  gerada por  $\alpha(F) = (\text{diam } F)^k$ .

OBSERVAÇÃO 1.  $H_{n+\varepsilon}^n(\mathbb{R}^n) = 0$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ .

Basta provar que  $H_{n+\varepsilon}^n(C_L) = 0$   $\forall L > 0$ , onde

$$C_L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| < L, i=1,2,\dots,n\}.$$

$$H_{n+\varepsilon}^n(C_L) \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \inf_{h=1}^{\infty} \left\{ \sum (\text{diam } X_h)^{n+\varepsilon} \mid \bigcup_h X_h \supset C_L \text{ e } \text{diam } X_h < \frac{2L\sqrt{n}}{N} \right\} \leq$$

$$\leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N^n (2L)^{n+\varepsilon} \sqrt{n}^{n+\varepsilon}}{N^{n+\varepsilon}} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{(2L)^{n+\varepsilon} \sqrt{n}^{n+\varepsilon}}{N^\varepsilon} = 0$$

OBSERVAÇÃO 2. Para  $k < 0$ , temos  $H_k^n(X) = +\infty$ ,  $\forall X \neq \emptyset$  e  $H_0^n$  = número de pontos de  $X$ .

Podemos concluir portanto que as  $H_k^n$  são significativas para  $0 \leq k \leq n$ .

A seguir, discutiremos os dois teoremas

TEOREMA 1.  $H_n^n$  é proporcional à medida de Lebesgue.

TEOREMA 2. Se  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 < k < n$  e  $V$  variedade  $k$ -dimensional, então  $H_k^n(V)$  coincide com a medida clássica  $k$ -dimensional de  $V$ .

PROPOSIÇÃO. Se  $X \subset \mathbb{R}^n$  e  $H_k^n(X) < +\infty \Rightarrow H_{k+\varepsilon}^n(X) = 0$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ .

PROVA.  $H_{k+\varepsilon}^n(X) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \inf_h \left\{ \sum (\text{diam } X_h)^{k+\varepsilon} \mid \bigcup_h X_h \supset X, \text{diam } X_h < \rho \right\}$ .

$$\text{Como } \sum_h (\text{diam } X_h)^{k+\varepsilon} \leq \sum_h (\text{diam } X_h)^k \cdot \rho^\varepsilon \Rightarrow \inf_h \left\{ \sum_h (\text{diam } X_h)^{k+\varepsilon} \right\} \leq \rho^\varepsilon \cdot \inf_h \left\{ \sum_h (\text{diam } X_h)^k \mid \bigcup_h X_h \supset X, \text{diam } X_h < \rho \right\} \leq \rho^\varepsilon H_k^n(X).$$

Portanto,  $H_{k+\varepsilon}^n(X) \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^\varepsilon \cdot H_k^n(X) = 0$ .

COROLÁRIO. Se  $H_k^n(X) > 0 \Rightarrow H_{k-\varepsilon}^n(X) = +\infty$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ .

DEFINIÇÃO. Dimensão de Hausdorff de um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é o número real, definido por

$$\dim_{(H)} X = \inf_{(H_k^n(X)=0)} k = \sup_{(H_k^n(X)=+\infty)} k$$

OBSERVAÇÃO: O Teorema 2, isto é, se  $X = V$  variedade "k-dimensional" de  $\mathbb{R}^n$ , então  $H_k^n(V) = \text{med}_k V$  implica que  $\dim_H V = k$ .

OBSERVAÇÃO: A dimensão de Hausdorff de um conjunto não é necessariamente um número inteiro.

Por exemplo, seja  $C = [0,1] - \{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup \dots\}$ : conjunto de Cantor; tem-se que  $\dim_H(C) = \log_3 2$ .

Observações sobre a Teoria Geral da Medida de Hausdorff  
(Medida externa sobre um espaço métrico)

TEOREMA. Se  $\beta$  é uma medida externa sobre um espaço métrico  $S$ , aditiva sobre todo conjunto que tem distância positiva (i.e.,  $\beta(A) + \beta(B) = \beta(A \cup B)$  se  $\text{dist.}(A,B) > 0$ ); então todo conjunto fechado de  $S$  é  $\beta$ -mensurável.

PROVA. Seja  $F \subset S$  fechado e  $X \subset S$ , desejamos provar que

$$\beta(X) \leq \beta(X \cap F) + \beta(X - F).$$

Podemos supor que  $\beta(X) < +\infty$ .

Para todo  $n$  inteiro temos que

se  $X_n = \{x \in X \mid \text{dist}(x, F) > \frac{1}{n}\} \Rightarrow \text{dist}(X \cap F, X_n) > 0$  e portanto,

$$(1) \quad \beta(X) \leq \beta(X \cap F) + \beta(X_n).$$

Por outro lado, temos que os conjuntos

$$X_{2n+1} - X_{2n}$$

são disjuntos 2 a 2, com distância positiva e todos contidos em  $X$  e portanto temos, para todo  $N$

$$\sum_{n=1}^N \beta(X_{2n+1} - X_{2n}) = \beta\left(\bigcup_{h=1}^N (X_{2n+1} - X_{2n})\right) \leq \beta(X) < +\infty, \forall N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \beta(X_{2n+1} - X_{2n}) \leq \beta(X) < +\infty.$$

Analogamente, podemos concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta(X_{2n} - X_{2n-1}) \leq \beta(X) < +\infty.$$

Finalmente, pela NSA, temos

$$\beta(X - F) \leq \beta(X_{2n}) + \sum_{t=1}^{\infty} \beta(X_{2t+2} - X_{2t+1}) + \sum_{t=1}^{\infty} \beta(X_{2t+1} - X_{2t}).$$

Portanto, pela desigualdade (1), segue

$$\beta(X \cap F) + \beta(X - F) \leq \beta(X) + \sum_{t=1}^{\infty} \beta(X_{2t+2} - X_{2t+1}) + \sum_{t=n}^{\infty} \beta(X_{2t+1} - X_{2t}).$$

Temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t=n}^{\infty} \beta(X_{2t+2} - X_{2t+1}) = 0$ ,

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t=n}^{\infty} \beta(X_{2t+1} - X_{2t}) = 0,$$

logo,  $\beta(X \cap F) + \beta(X - F) \leq \beta(X)$ .

cqd.

OBSERVAÇÃO. Facilmente se verifica que toda medida de Hausdorff é aditiva sobre todos os conjuntos com distância positiva.

Podemos portanto concluir o seguinte enunciado:

TEOREMA. Todo conjunto de Borel é mensurável segundo Hausdorff e  $H_{\alpha}/\text{Borel}$  é N.A.



EXERCÍCIO.  $H_{\log_3}^2(\text{Cantor}) = 1$ ,

$$\text{onde } \text{Cantor} = [0,1] - \bigcup_{h=1}^{\infty} A_h$$

com  $A_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ,  $A_2 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ ,  $A_3 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ , ...

MEDIDA DE RADON.

DEFINIÇÃO. Medida de Radon sobre um espaço métrico  $S$  é uma função

$$\mu : \mathcal{B}_0(S) \rightarrow [0, +\infty) \text{ que seja NA,}$$

onde  $\mathcal{B}_0(S) = \{B \subset S \mid B \text{ de Borel, } \bar{B} \text{ compacto}\}$ .

TEOREMA. Se  $\mu$  é uma medida de Radon sobre  $S$  então vale a seguinte propriedade.

$$(P) \quad \mu(B) = \inf_{\substack{B \subset A \in \mathcal{B}_0 \\ A \text{ aberto}}} \mu(A) = \sup_{\substack{C \subset B \\ C \text{ compacto}}} \mu(C), \quad \forall B \in \mathcal{B}_0.$$

DEMONSTRAÇÃO. 1ª etapa: (P) Vale para todo aberto  $A \in \mathcal{B}_0$ .

De fato, basta observar que dado

$$C_h = \{x \in A \mid \text{dist}(x, S-A) \geq \frac{1}{h}\},$$

se tem que  $C_h$  é compacto,  $\bigcup_{h=1}^{\infty} C_h = A$  e portanto, segue, pela NA de  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(C_1) + \sum_{h=1}^{\infty} \mu(C_{h+1} - C_h) = \\ &= \mu(C_1) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{h=1}^n \mu(C_{h+1} - C_h) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(C_n) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\mu(A) = \sup_{\substack{C \subset A \\ C \text{ compacto}}} \mu(C).$$

2ª etapa. Se  $B_1$  e  $B_2$  verificam  $(P) \Rightarrow B_1 \cap B_2$  e  $B_1 - B_2$  verificam  $(P)$

De fato, pela hipótese se tem que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_1, A_2 \text{ abertos de } B_0 \text{ e } C_1, C_2 \text{ compactos}$$

verificando:

$$A_1 \supset B_1 \supset C_1, A_2 \supset B_2 \supset C_2, \mu(A_1 - C_1) < \varepsilon, \mu(A_2 - C_2) < \varepsilon.$$

Temos, portanto, que:

$$A_1 \cap A_2 \text{ e } A_1 - C_2 \text{ são abertos}$$

e

$$C_1 \cap C_2 \text{ e } C_1 - A_2 \text{ são compactos}$$

com

$$A_1 \cap A_2 \supset B_1 \cap B_2 \supset C_1 \cap C_2, A_1 - C_2 \supset B_1 - B_2 \supset C_1 - A_2,$$

e logo

$$A_1 \cap A_2 - C_1 \cap C_2 \subset (A_1 - C_1) \cup (A_2 - C_2)$$

e

$$(A_1 - C_2) - (C_1 - A_2) \subset (A_1 - C_1) \cup (A_2 - C_2).$$

Donde, segue finalmente que

$$\mu(A_1 \cap A_2 - C_1 \cap C_2) < 2\varepsilon$$

$$\mu((A_1 - C_2) - (C_1 - A_2)) < 2\varepsilon.$$

3ª etapa. Seja  $B_h$ ,  $h = 1, 2, \dots$  satisfazendo  $(P)$  com  $B_h \supset B_{h+1}$ ,  $\forall h$

$$\Rightarrow \bigcup_{h=1}^{\infty} B_h \text{ satisfaz } (P).$$

$$\forall \varepsilon > 0, \forall h, \exists A_h \text{ aberto de } B_0, C_h \text{ compacto tais que}$$

$$A_h \supset B_h \supset C_h, \mu(A_h - C_h) < \varepsilon 2^{-h}, A_h \supset A_{h+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcap_{h=1}^{\infty} A_h \supset \bigcap_{h=1}^{\infty} B_h \supset \bigcap_{h=1}^{\infty} C_h \text{ e } \bigcap_{h=1}^{\infty} A_h - \bigcap_{h=1}^{\infty} C_h \subset \bigcup_{h=1}^{\infty} (A_h - C_h),$$

usando o fato que  $\mu$  é NSA, segue-se

$$(4.1) \quad \mu\left(\bigcap_{h=1}^{\infty} A_h - \bigcap_{h=1}^{\infty} C_h\right) \leq \sum_{h=1}^{\infty} (A_h - C_h) < \varepsilon.$$

Pela NA de  $\mu$  temos, por outro lado, que

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcap_{h=1}^{\infty} A_h\right) + \sum_{h=1}^{\infty} \mu(A_h - A_{h+1}) &= \mu(A_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu\left(\bigcap_{h=1}^{\infty} A_h\right) + \lim_{N \rightarrow \infty} (\mu(A_1) - \mu(A_{N+1})) &= \mu(A_1) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(4.2) \quad \mu\left(\bigcap_{h=1}^{\infty} A_h\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(A_N).$$

De (4.1) e (4.2) segue que existe  $N$  tal que

$$\mu(A_N) - \mu\left(\bigcap_{h=1}^{\infty} C_h\right) < \varepsilon;$$

como  $A_N \supset \bigcap_{h=1}^{\infty} B_h \supset \bigcap_{h=1}^{\infty} C_h$  se tem a propriedade (P) para  $\bigcap_{h=1}^{\infty} B_h$ .

4ª etapa. Como  $\mathcal{B}_0$  é a mínima família de conjuntos contendo todos os abertos de  $S$  e fechados em relação à diferença e à intersecção enumerável, temos que (P) vale para todo  $B \in \mathcal{B}_0$ .

O conhecimento dos valores de uma medida de Radon sobre os abertos relativamente compactos, determina portanto o valor da mesma sobre os borelianos relativamente compactos. Este fato é particularmente interessante em  $\mathbb{R}^n$ , onde todo aberto pode ser obtido como união enumerável de cubos do tipo

$$(4.3) \quad \{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{m_i}{2^k} < x_i < \frac{m_i}{2^k} + \frac{1}{2^k}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

onde  $m_1, \dots, m_n$  são inteiros relativos e  $k \in \mathbb{N}$ .

O conhecimento portanto do valor de  $\mu$  sobre cubos do tipo (4.3) determina os valores de  $\mu$  sobre qualquer conjunto de Borel limitado. Em particular se  $\mu$  é invariante por translação basta conhecer o valor de  $\mu$  sobre somente um de tais cubos. Segue-se portanto que se  $\alpha$  e  $\mu$  são duas medidas de Radon sobre  $\mathbb{R}^n$ , invariantes por translações e  $\alpha$  não é identicamente nula, então se tem:

$$\mu = \frac{\mu(\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i < 1\})}{\alpha(\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i < 1\})} \cdot \alpha$$

OBSERVAÇÃO. A medida de Lebesgue sobre  $\mathbb{R}^n$  é a medida de Radon invariante por translação que tem valor 1 sobre o cubo

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i < 1\}.$$

PROVA. As medidas de Hausdorff são NA sobre  $\mathcal{B}_0$ , portanto elas são de Radon uma vez que são localmente finitas.

$H_n^n$  é localmente finita, sendo fácil verificar que

$$H_n^n(X) \leq (\text{diam } X)^n, \text{ e portanto se tem}$$

$$H_n^n = \text{const. Leb}_n, \text{ i.e., } \text{const} = \frac{H_n^n(X)}{\text{Leb}_n(X)}, \quad \forall X \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n).$$

#### INTEGRAL

DEFINIÇÃO. Seja  $A$  um conjunto e  $\gamma: P(A) \rightarrow [0, +\infty]$  uma função crescente monótona, i.e.,  $\gamma(B_1) \leq \gamma(B_2)$  se  $B_1 \subset B_2$ ,  $\forall B_1, B_2 \in P(A)$ . Seja  $f: A \rightarrow [0, +\infty]$  e  $B \subset A$ , por definição:

$$\int_B f d\gamma = \int_0^{+\infty} \gamma(\{x \in B \mid f(x) > t\}) dt$$

Observamos que  $\{x \in B \mid f(x) > t\}$  é uma função decrescente de  $t$  definida sobre  $[0, +\infty)$  com valores em  $[0, +\infty]$ .

PROBLEMA. Seja  $f_h : A \rightarrow [0, +\infty]$  para  $h = 1, 2, \dots$  e  $f_h(x) \leq f_{h+1}(x)$ ,  $\forall x \in A$ ,  $\forall h$ . Então, se pode calcular

$$\lim_{h \rightarrow \infty} f_h(x), \forall x, \text{ e } \lim_{h \rightarrow \infty} \int_B f_h d\gamma, \forall B \subset A \text{ e } \forall h.$$

Desde que  $f_h(x) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$ ,  $\forall x \in A$  e  $\forall h$ , temos

$$\int_B f_h d\gamma \leq \int_B \lim_{h \rightarrow \infty} f_h d\gamma,$$

e portanto,

$$(5.1) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \int_B f_h d\gamma \leq \int_B \lim_{h \rightarrow \infty} f_h d\gamma, \forall B \subset A$$

O problema é a outra desigualdade, isto é,

$$(5.2) \quad \int_B \lim_{h \rightarrow \infty} f_h d\gamma \leq \lim_{h \rightarrow \infty} \int_B f_h d\gamma.$$

Este resultado é a tese de um teorema que classicamente é chamado de Beppo Levi.

A condição necessária para que o Teorema de Beppo Levi seja verdadeiro é que

$$(5.3) \quad \forall B_h \uparrow B \Rightarrow \gamma(B_h) \uparrow \gamma(B).$$

Chamaremos (5.3) de continuidade por seqüências crescentes.

Podemos agora enunciar e provar o seguinte:

TEOREMA DE BEPPO LEVI. Se  $\gamma$  é uma função positiva crescente e contínua para seqüências crescentes de subconjuntos de  $A$ , então  $\forall f_h(x) \uparrow f(x) \Rightarrow$

$$\int_B f_h(x) d\gamma \uparrow \int_B f(x) d\gamma, \forall B \subset A.$$

DEMONSTRAÇÃO.  $\forall t \geq 0$ ,  $\{x \in B \mid f_h(x) > t\} \uparrow \{x \in B \mid f(x) > t\} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \gamma(\{x \in B \mid f_h(x) > t\}) \uparrow \gamma(\{x \in B \mid f(x) > t\}).$

Desde que o teorema é válido para funções decrescentes sobre  $[0, +\infty)$  temos

$$\int_0^{+\infty} \gamma(\{x \in B \mid f_h(x) > t\}) dt + \int_0^{+\infty} \gamma(\{x \in B \mid f(x) > t\}) dt, \text{ i.é.,} \\ \int_B f_h d\gamma + \int_B f d\gamma, \quad \forall B \subset A.$$

LEMA DE FATOU. Se  $\gamma$  é crescente e contínua sobre sequências crescentes de subconjuntos de  $A$ , então:

$$\forall \phi_h : A \rightarrow [0, +\infty] \Rightarrow \int_B \liminf_{h \rightarrow \infty} \phi_h d\gamma \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_B \phi_h d\gamma; \quad \forall B \subset A.$$

DEMONSTRAÇÃO. Indicamos por  $f_h = \inf_{j \geq h} \phi_j$ . Podemos usar B. Levi para os  $f_h$  e escrever

$$\int_B \lim_{h \rightarrow \infty} f_h d\gamma \leq \lim_{h \rightarrow \infty} \int_B f_h d\gamma, \quad \forall B \subset A.$$

$$\text{Desde que } f_h \leq \phi_h, \quad \forall h \text{ e } \lim_{h \rightarrow \infty} f_h = \liminf_{h \rightarrow \infty} \phi_h$$

temos

$$\int_B \liminf_{h \rightarrow \infty} \phi_h d\gamma \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_B \phi_h d\gamma, \quad \forall B \subset A.$$

OBSERVAÇÃO. Nossa definição de integral pode ser aplicada a qualquer medida exterior  $\beta$  definida sobre  $A$ , pois todas as medidas exteriores são crescentes. Então o seguinte teorema é muito importante, apesar de simples, uma vez que dá uma condição suficiente para continuidade, sobre sequências crescentes, da medida exterior  $\beta_\alpha$  gerada por uma função de conjunto  $\alpha$ .

TEOREMA. Se  $F \subset P(A)$  é fechado em relação à união e intersecção enumerável e por diferença; se  $\alpha$  é enumeravelmente aditiva (NA) sobre  $F$ , então  $\beta_\alpha$  é contínua sobre sequências crescentes.

DEMONSTRAÇÃO. Nossas hipóteses especiais implicam

$$\beta_\alpha(B) = \inf\{\alpha(F) \mid F \in \mathcal{F}, F \supset B\}, \quad \forall B \in \mathcal{A}.$$

Então, se  $B_h \uparrow B$ , para provar que  $\beta_\alpha(B_h) \uparrow \beta_\alpha(B)$  podemos assumir que  $\beta_\alpha(B_h) < +\infty$ ,  $\forall h$ , e precisamos só verificar

$$(5.4) \quad \beta_\alpha(B) \leq \lim_{h \rightarrow \infty} \beta_\alpha(B_h).$$

De fato,

$$\forall h, \exists F_h \supset B_h, F_h \in \mathcal{F} \text{ tal que } \alpha(F_h) < \beta_\alpha(B_h) + 2^{-h}$$

Se  $\tilde{F}_h = \bigcup_{i \leq h} F_i$ , teremos

$$(5.5) \quad \alpha(\tilde{F}_h) < \beta_\alpha(B_h) + 2^{-h+1}, \quad \forall h.$$

Se  $F = \bigcup_{h=1}^{\infty} F_h = \bigcup_{h=1}^{\infty} \tilde{F}_h$ , teremos

$$\forall F \supset B \text{ e, } \alpha(F) = \lim_{h \rightarrow \infty} \alpha(\tilde{F}_h) \text{ pois } \alpha \text{ é NA} \implies$$

$$\beta_\alpha(B) \leq \alpha(F) \leq \lim_{h \rightarrow \infty} \beta_\alpha(B_h),$$

q.q.d.

COROLÁRIO. Se  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(A)$  é fechado por união e intersecção enumeráveis e por diferença, se  $\alpha$  é NA sobre  $\mathcal{F} \implies$  o Teorema de Beppo-Levi e o Lema de Fatou valem para a integral  $\int f d\beta_\alpha$ .

Consideremos as seguintes definições

DEFINIÇÃO 1.  $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$  é uma medida se a família de conjuntos  $\mathcal{F}$  é fechada por união e intersecção enumeráveis e por diferença, e se  $\alpha$  é NA.

DEFINIÇÃO 2.  $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$  é uma medida se  $\mathcal{F}$  é fechada por intersecção enumerável e por diferença, com  $\alpha$  NA.

A definição 2 é aparentemente mais geral; no entanto, se  $\alpha$  é uma medida no sentido da definição 2 então a família  $\mathcal{F}_\alpha$  dos conjuntos que são

união enumeráveis de  $F$  é fechada por união e intersecção enumeráveis e por diferença, e a função

$\alpha_Y : F_Y \rightarrow [0, +\infty]$ , definida por

$$\alpha_Y \left( \bigcup_h F_h \right) = \sum_h \alpha(F_h), \text{ se } F_h \in F_Y \text{ e } F_{h_1} \cap F_{h_2} = \emptyset, \forall h_1 \neq h_2,$$

é NA.

As medidas verificam o seguinte

TEOREMA. Se  $\alpha$  é uma medida  $\Rightarrow \beta_\alpha$  é contínua por seqüências crescentes.

COROLÁRIO. Se  $\alpha$  é uma medida  $\Rightarrow \int d\beta_\alpha$  satisfaz o Teorema de Beppo-Levi e o Lema de Fatou.

No caso particular das medidas de Hausdorff temos

PROPOSIÇÃO. Se  $\alpha$  é definida sobre  $F \subset \mathcal{B}(S)$  (família dos borelianos do espaço métrico  $S$ )  $\Rightarrow H_\alpha = H_{H_\alpha}|_{\mathcal{B}(S)}$  e portanto  $H_\alpha$  é contínua sobre seqüências crescentes.

COROLÁRIO. Se  $\alpha(F) = \psi(\text{diam } F) \Rightarrow H_\alpha = H_\alpha|_{\text{Fechados}} \Rightarrow H_\alpha$  é contínua sobre seqüências crescentes.

TEOREMA DE LEBESGUE. Seja  $\{f_h\}$  é uma seqüência de funções positivas definidas sobre  $A$ ; se

$$f_h(x) \rightarrow f(x), \forall x \in B \subset A,$$

e se existe  $g$  tal que

$$\begin{aligned} f_h(x) &\leq g(x), \forall x \in B, \text{ com } \int_B g d\gamma < +\infty; \text{ Se valem} \\ \int_B (g - f_h) d\gamma &= \int_B g d\gamma - \int_B f_h d\gamma, \forall h. \text{ e, } \int_B (g - f) d\gamma = \int_B g d\gamma - \int_B f d\gamma \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow \infty} \int_B f_h d\gamma &= \int_B f d\gamma. \end{aligned}$$



DEMONSTRAÇÃO. O lema de Fatou  $\Rightarrow$

$$(6.1) \quad \int_B f d\gamma \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_B f_h d\gamma \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_B (g-f) d\gamma \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_B (g-f_h) d\gamma$$

Pelas hipóteses de linearidade da integral temos

$$\int_B g d\gamma - \int_B f d\gamma \leq \int_B g d\gamma - \limsup_h \int_B f_h d\gamma$$

então,

$$(6.2) \quad \int_B f d\gamma \geq \limsup_{h \rightarrow \infty} \int_B f_h d\gamma$$

(6.1) e (6.2) implicam que

$$\int_B f d\gamma = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_B f_h d\gamma$$

Lembramos que um conjunto  $M \subset A$  é mensurável (segundo Carathéodory) se

$$\forall X \subset A, \gamma(X \cap M) + \gamma(X - M) = \gamma(X).$$

DEFINIÇÃO 3. Uma função  $f: A \rightarrow [0, +\infty]$  é dita  $\gamma$ -mensurável se  $\forall t \geq 0$ ,  $\{x \in A \mid f(x) > t\}$  é um conjunto  $\gamma$ -mensurável.

TEOREMA. Se  $f$  é  $\gamma$ -mensurável  $\Rightarrow$  Existe  $\{f_h\}$ ,  $h=1,2,\dots$  com  $f_h$   $\gamma$ -mensurável,  $f_h(A)$  finito e  $f_h(x) \uparrow f(x)$ ,  $\forall x \in A$ .

TEOREMA. Se  $f, g: A \rightarrow [0, +\infty]$  são  $\gamma$ -mensuráveis e  $f(A) \cup g(A)$  é finito  $\Rightarrow \int_A f d\gamma + \int_A g d\gamma = \int_A (f+g) d\gamma$ .

TEOREMA. Se  $f$  e  $g$  são  $\gamma$ -mensuráveis  $\Rightarrow \int_A (f+g) d\gamma = \int_A f d\gamma + \int_A g d\gamma$

DEMONSTRAÇÃO. Sejam  $f_h$  e  $g_h$   $\gamma$ -mensuráveis  $\forall h$ , com  $f_h(A) \cup g_h(A)$  finito para todo  $h$  e,  $f_h \uparrow f$  e  $g_h \uparrow g$ .

Temos que

$$\int_A f_h d\gamma + \int_A f d\gamma, \quad \int_A g_h d\gamma + \int_A g d\gamma$$

e

$$\int_A (f_h + g_h) d\gamma + \int_A (f + g) d\gamma.$$

Desde que

$$\int_A (f_h + g_h) d\gamma = \int_A f_h d\gamma + \int_A g_h d\gamma, \forall h \Rightarrow$$

$$\int_A (f + g) d\gamma = \int_A f d\gamma + \int_A g d\gamma.$$

DEFINIÇÃO 5. Se  $f : A \rightarrow [-\infty, +\infty]$ ,

$$\int_A f d\gamma = \int_A (f \cup 0) d\gamma - \int_A -(f \cap 0) d\gamma,$$

desde que não se tenha

$$\int_A (f \cup 0) d\gamma = \int_A (f \cap 0) d\gamma = +\infty.$$

$$\text{OBSERVAÇÃO} \begin{cases} f \cup 0 = f|_{A_+} = f_+ \text{ onde } A_+ = \{x \mid f(x) \geq 0\} \\ f \cap 0 = f|_{A_-} = f_- \text{ onde } A_- = \{x \mid f(x) \leq 0\} \end{cases} \Rightarrow f = f_+ + f_-$$

PERÍMETRO DE UM CONJUNTO

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto, com  $\partial\Omega$  bastante regular para que valha o Teorema de Green:

$$(1) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} \varphi(x) dx = \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot \gamma(x) dH_{n-1}, \quad \forall \varphi \in [C_0^1(\mathbb{R}^n)]^n$$

onde  $\gamma(x)$  é o vetor normal exterior.

É fácil verificar que vale

$$H_{n-1}(\partial\Omega) = \sup \left\{ \int_{\partial\Omega} \varphi(x) \cdot \gamma(x) dH_{n-1} \mid \varphi \in [C_0^1(\mathbb{R}^n)]^n, |\varphi(x)| \leq 1, \forall x \right\}$$

Portanto, usando (1), podemos escrever

$$(2) \quad H_{n-1}(\partial\Omega) = \sup \left\{ \int_{\Omega} \operatorname{div} \varphi(x) dx \mid \varphi \in [C_0^1(\mathbb{R}^n)]^n, |\varphi(x)| \leq 1, \forall x \right\}$$

A igualdade (2) sugere a seguinte definição:

DEFINIÇÃO. Se  $E \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto mensurável, diremos *perímetro* de  $E$  o valor (talvez  $+\infty$ ) dado por

$$P(E) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} \varphi(x) dx \mid \varphi \in [C_0^1(\mathbb{R}^n)]^n, |\varphi(x)| \leq 1, \forall x \right\}$$

OBSERVAÇÃO. Se  $E$  satisfaz as hipóteses de regularidade do Teorema de Green, temos

$$P(E) = H_{n-1}(\partial E), \text{ isto é, se } H_{n-1}(\partial E) < +\infty \implies P(E) < +\infty.$$

A recíproca, no entanto não vale, senão vejamos um *contra exemplo*:

Seja  $\{B_{\rho_i}(x^{(i)})\}_i$  uma sequência de bolas de centros  $\{x^{(i)}\}_i$  denso em  $\mathbb{R}^n$  e com  $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i^{n-1} < +\infty$ .

Provaremos que o conjunto

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{\rho_i}(x^{(i)}) \text{ tem as seguintes propriedades:}$$

$$a) \quad P(E) \leq n\omega_n \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i^{n-1} < +\infty$$

$$b) H_n(\partial E) = +\infty.$$

De fato:

a) Observemos que para todo  $N$  inteiro, temos que se

$$E_N = \bigcup_{i=1}^N E_{\rho_i}(x^{(i)}), \text{ então } P(E_N) \leq n \omega_n \sum_{i=1}^N \rho_i^{n-1}$$

Por outro lado,  $\forall \varphi \in [C_0^1(\mathbb{R}^n)]^n$ ,  $|\varphi(x)| \leq 1, \forall x$ ,

$$\int_E \operatorname{div} \varphi(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{E_N} \operatorname{div} \varphi(x) dx \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} P(E_N)$$

$$b) \text{ Temos que } \mathbb{R}^n = E \cup \partial E \text{ e } H_n(E) \leq \omega_n \sum_{i=1}^n \rho_i^n < +\infty.$$

$$\text{Como } H_n(\mathbb{R}^n) = +\infty \Rightarrow H_n(\partial E) = +\infty.$$

Em seguida, trataremos do seguinte problema:

TEOREMA (De Giorgi). Se  $P(E) < +\infty \Rightarrow \exists$  um conjunto de Borel  $\partial^* E \subset \partial E$  e  $\forall x \in \partial^* E, \exists \gamma(x) \in \mathbb{R}^n$  com  $|\gamma(x)| = 1$  e  $\gamma(x)$  função de Baire, tal que

$$\int_E \operatorname{div} \varphi(x) dx = \int_{\partial^* E} \varphi(x) \gamma(x) dH_{n-1}, \quad \forall \varphi \in [C_0^1(\mathbb{R}^n)]^n,$$

$$\text{e portanto } P(E) = H_{n-1}(\partial^* E).$$

O perímetro de um conjunto é dado por

$$P(E) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} \varphi(x) dx \mid \varphi \in [C_0^1(\mathbb{R}^n)]^n, |\varphi(x)| \leq 1 \right\}.$$

Então,  $P(E) < +\infty$  equivale a

$$\sup_{1 \leq i \leq n} \sup \left\{ \int_E \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x) dx \mid \phi \in C_0^1(\mathbb{R}^n), |\phi(x)| \leq 1 \right\} < +\infty$$

Assim, podemos dizer que a condição do perímetro ser finito é equivalente aos  $n$  funcionais lineares

$$\phi \longrightarrow \int_E \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} dx \quad (i=1,2,\dots,n)$$

serem limitados em relação à norma

$$\|\phi\|_0 = \max_x |\phi(x)|.$$

Pelo Teorema de Riesz, podemos então dizer que  $P(E) < +\infty$  é equivalente à existência de  $2n$  medidas de Radon sobre  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \quad \text{e} \quad \beta_1, \dots, \beta_n \quad \text{com}$$

$$\sum_{i=1}^n [\alpha_i(\mathbb{R}^n) + \beta_i(\mathbb{R}^n)] < +\infty$$

e

$$(8.1) \quad \int_E \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi d(\alpha_i - \beta_i) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi d\alpha_i - \int_{\mathbb{R}^n} \phi d\beta_i,$$

para todo  $\phi \in [C_0^1(\mathbb{R}^n)]^n$  e  $\forall i, i = 1, 2, \dots, n$ .

Uma maneira de definir as medidas  $\alpha_i, \beta_i$  é a seguinte:  $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ , aberto

$$(8.2) \quad \alpha_i(A) = \sup \left\{ \int_E \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx \mid \phi \in C_0^1(A), 0 \leq \phi(x) \leq 1 \right\}$$

$$(8.3) \quad \beta_i(A) = -\inf \left\{ \int_E \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx \mid \phi \in C_0^1(A), 0 \leq \phi(x) \leq 1 \right\}.$$

Considera-se depois as medidas exteriores geradas por estas funções de abertos. (8.2) e (8.3) implicam em

$$(8.4) \quad \alpha_i(\mathbb{R}^n - \partial E) = \beta_i(\mathbb{R}^n - \partial E) = 0 \quad (i=1,2,\dots,n).$$

Então (8.1) pode ser escrita por

$$(8.5) \quad \int_E \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = \int_{\partial E} \phi d\alpha_i - \int_{\partial E} \phi d\beta_i = \int_{\partial E} \phi d\gamma_i$$

onde indicamos por  $\gamma_i$  as medidas de Radon relativas  $\alpha_i - \beta_i$ .

O teorema de Riesz implica então a seguinte primeira fórmula de Green para conjuntos de perímetro finito:

$$(8.6) \quad \int_E \operatorname{div} \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{\partial E} \varphi_i d\gamma_i, \quad \forall \varphi \in [C_0^1(\mathbb{R}^n)]^n.$$

Seja B um boreliano qualquer. Indicamos por

$$|\gamma|(B) = \sup \left\{ \left( \sum_{i=1}^n |\gamma_i(B_h)| \right)^2 \right\}^{1/2} \mid \bigcup_h B_h = B, B_{h_1} \cap B_{h_2} = \emptyset, h_1 \neq h_2, B_h \text{ boreliano} \}.$$

A função  $|\gamma|$  é também uma medida de Radon e tem a propriedade de ser a menor medida satisfazendo

$$(8.7) \quad \sqrt{\sum_{i=1}^n |\gamma_i|^2(B_h)} < |\gamma|(B), \quad \forall B \subset \mathbb{R}^n, B \text{ boreliano}.$$

A medida  $|\gamma|$  é dita *variação total da medida vetorial*  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ .

Um resultado clássico da teoria da medida é o seguinte:

TEOREMA (Radon-Nikodym-Vitali-Lebesgue). Existe  $\partial^*E \subset \partial E$  de Borel tal que  $\forall x \in \partial^*E$ , existe

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\gamma(B_\rho(x))}{|\gamma|(B_\rho(x))} = v(x), \quad \text{com } |v(x)| = 1 \text{ e } \forall t \in \mathbb{R}, \forall i=1,2,\dots,n$$

$\{y \mid v_i(y) > t\}$  é de Borel, e

$$\gamma(B) = \int_B v(x) d|\gamma|, \quad \forall B \subset \mathbb{R}^n, B \text{ boreliano}$$

Este teorema, juntamente com o Teorema de Riesz, permite escrever uma segunda fórmula de Green para conjuntos de perímetro finito:

$$(8.8) \quad \int_E \operatorname{div} \varphi(x) dx = \int_{\partial^*E} \varphi(x) v(x) d|\gamma|, \quad \varphi \in [C_0^1(\mathbb{R}^n)]^n$$

E. De Giorgi provou que

$$(8.9) \quad \forall x \in \partial^* E, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|\gamma|(B_\rho(x))}{\omega_{n-1} \rho^{n-1}} = 1$$

(Ricerca di Matematica - Genova 1955)

A (8.9) juntamente com propriedades clássicas das medidas de Hausdorff, implica que

$$H_{n-1}(\partial^* E) = |\gamma|(\partial^* E) = |\gamma|(\partial E) = |\gamma|(\mathbb{R}^n) = P(E)$$

e (8.10)

$$\int_{\partial^* E} \phi \cdot \nu d|\gamma| = \int_{\partial^* E} \phi \cdot \nu dH_{n-1}.$$

Então a fórmula de Green pode ser escrita por

$$(8.11) \quad \int_E \operatorname{div} \phi(x) dx = \int_{\partial^* E} \phi \cdot \nu dH_{n-1}, \quad \forall \phi \in [C_0^1(\mathbb{R}^n)]^n$$

( $\partial^* E$ : fronteira reduzida de  $E$ ).

Que é o modo clássico de expressá-la, com o uso de somente uma parte da fronteira. Lembramos porém que a diferença  $\partial E - \partial^* E$  pode ser muito grande, como foi provado num exemplo anterior onde  $P(E) < +\infty$ ,  $H_n(E) < +\infty$  e  $H_n(\partial E - \partial^* E) = +\infty$ .

No artigo de De Giorgi (1955) está provada a seguinte propriedade geométrica do vetor  $\nu(x)$  nos pontos  $x \in \partial^* E$ :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{H_n\{y \in E \mid |y-x| < \rho, (y-x) \cdot \nu(x) < 0\}}{\rho^n} = \frac{1}{2} \omega_n$$

e

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{H_n\{y \in E \mid |y-x| < \rho, (y-x) \cdot \nu(x) > 0\}}{\rho^n} = 0$$

Ainda De Giorgi em 1961 provou propriedades interessantes de  $\partial^*E$  e de  $\partial E - \partial^*E$  no caso que o perímetro do conjunto tinha uma propriedade de mínimo. O resultado de De Giorgi (livro junto com Piccinini e Colombini) é o seguinte:

TEOREMA. Seja  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $P(E) < +\infty$  e  $A \subset \mathbb{R}^n$  um aberto.

Seja  $P(E) \leq P(L)$ ,  $\forall L \subset \mathbb{R}^n$  mensurável com

(\*)  $L \Delta E \subset A$ . Então  $\partial^*E \cap A$  é uma variedade analítica e  $H_{n-1}[(\partial E - \partial^*E) \cap A] = 0$ .

OBSERVAÇÃO. Federer provou em 1971 (Bull. Am. Math. Soc.) que

$$H_s((\partial E - \partial^*E) \cap A) = 0, \quad \forall s > n-8$$

ou seja

$$\dim_H(\partial E - \partial^*E) \cap A \leq n-8.$$

Em um artigo de U. Massari (Archive for Rat. Mech. Analysis) o teorema de De Giorgi-Federer está também provado em um caso mais geral, precisamente:

TEOREMA (Massari). Seja  $E \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto de perímetro finito,  $A \subset \mathbb{R}^n$  aberto,  $\phi(x) \in L^1(A)$  e limitado, com

$$P(E) + \int_{A \cap E} \phi(x) dx \leq P(L) + \int_{A \cap L} \phi(x) dx, \quad \forall L \subset \mathbb{R}^n$$

$L$  mensurável, com  $L \Delta E \subset A$ . Então  $\partial^*E \cap A$  é uma variedade  $n-1$  dimensional de classe  $C^1$  e  $\dim_H(\partial E - \partial^*E) \cap A \leq n-8$ .

---

(\*)  $L \Delta E \subset A \iff (L - E) \cup (E - L)$  está contido em um compacto de  $A$ .



E. De Giorgi em 1961 provou o seguinte teorema (\*):

TEOREMA. "Se  $E \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto de perímetro finito, se  $A \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto tal que

$$P(E) \leq P(L), \quad \forall L \subset \mathbb{R}^n, L \Delta E \subset A, \text{ então}$$

$\partial^* E \cap A$  é uma hipersuperfície analítica e

$$H_{n-1}[(\overline{\partial^* E} - \partial^* E) \cap A] = 0"$$

Em 1970, H. Federer provou (\*\*) que se E verifica as hipóteses do Teorema de De Giorgi, então

$$H_s[(\overline{\partial^* E} - \partial^* E) \cap A] = 0, \quad \forall s > n-8$$

Em 1971 U. Massari deu a seguinte generalização do teorema de De Giorgi-Federer(\*\*\*):

TEOREMA. "Se  $E \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto de perímetro finito, se  $A \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto e  $\psi(x)$  é uma função limitada e integrável sobre A, tal que

$$P(E) + \int_{E \cap A} \psi(x) dx \leq P(L) + \int_{L \cap A} \psi(x) dx, \quad \forall L \subset \mathbb{R}^n, L \Delta E \subset A$$

então  $\partial^* E \cap A$  é uma hipersuperfície de classe  $C^1$  e

$$H_s[(\overline{\partial^* E} - \partial^* E) \cap A] = 0, \quad \forall s > n-8."$$

(\*) De Giorgi-Colombini-Piccinini - "Frontiere orientate de misura minima e questioni collegate - Pisa, 1972.

(\*\*) H. Federer - Bull. Am. Math. Soc. (1970) "The singular sets of area minimizing rectifiable currents with codimension one and of area minimizing flat chains modulo two with arbitrary codimension".

(\*\*\*) U. Massari - Esistenza e regolarità delle ipersuperfici de curvatura media assegnata in  $\mathbb{R}^n$ , Arch. for Rat. Mech. and Analysis.

Indicaremos agora o modo de usar o teorema de De Giorgi na resolução do problema de Dirichlet para equação de superfícies mínimas:

PROBLEMA. Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado e seja  $g(x)$  uma função contínua sobre  $\partial\Omega$ .

Encontrar  $f(x) \in C^0(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  tal que

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)}{\sqrt{1 + |\text{grad } f(x)|^2}} \right) = 0, \quad \forall x \in \Omega;$$

$$(2) \quad f(x) = g(x), \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Na parte inicial provamos que o problema tem solução única se  $\Omega$  é estritamente convexo.

Pretendemos agora resolver o problema com uma hipótese mais fraca sobre  $\Omega$ .

MÉTODO VARIACIONAL. Seja  $f_j$  uma sequência de funções contínuas sobre  $\bar{\Omega}$  com

$$f_j(x) = g(x), \quad \forall x \in \partial\Omega \quad \text{e com}$$

$$(3) \quad |\text{graph } f_j|_{\bar{\Omega}} \rightarrow \inf_{\bar{\Omega}} |\text{graph } f| \text{ t.q. } f \in C(\bar{\Omega}), f(x) = g(x), \forall x \in \partial\Omega.$$

Desde que  $g(x)$  é limitada sobre  $\partial\Omega$ , podemos supor que cada  $f_j(x)$  seja limitada pelos mesmos valores sobre  $\Omega$ .

Consideremos agora uma sequência de conjuntos de  $\mathbb{R}^{n+1}$  definida por:

$$E_j = \{(x, y) \mid x \in \Omega, \min_{x \in \partial\Omega} g(x) \leq y \leq f_j(x)\}$$

os conjuntos  $E_j$  são limitados para todo  $j$ .

$$(4) \quad E_j \subset \{(x, y) \mid x \in \bar{\Omega}, \min_{x \in \partial\Omega} g(x) \leq y \leq \max_{x \in \partial\Omega} g(x)\}$$

e, se

$$P(\Omega) < +\infty,$$

temos pela (3)

$$(5) \quad P(E_j) \leq P(\Omega) \left( \max_{x \in \partial\Omega} g(x) - \min_{x \in \partial\Omega} g(x) \right) + H_n(\Omega) +$$

$$+ |\text{graph } f_j| \leq K < +\infty, \quad \forall j.$$

As propriedades (4) e (5) da sequência  $E_j$  de conjuntos são suficientes (\*) para a existência de uma subsequência  $E_{j(s)}$  convergente a um conjunto  $E_0$ , i.e.,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H_n(E_{j(s)} \Delta E_0) = 0$$

Usando o teorema de De Giorgi e outros resultados de M. Miranda (\*\*), se pode provar que

$$E_0 = \{(x, y) \mid x \in \bar{\Omega}, \min_{x \in \partial\Omega} g(x) \leq y < f_0(x)\}$$

com  $f_0(x)$  analítica se  $x \in \Omega$  e solução da equação (1).

Para provar (2) precisa uma condição sobre  $\Omega$ . A condição necessária e suficiente é que  $\Omega$  seja pseudo-convexo, i.e.,

$$(6) \quad x \in \partial\Omega, \quad \exists \rho > 0 \quad \text{t.q.} \quad P(\Omega) \leq P(\Omega \cup L), \quad \forall L \subset B_\rho(x).$$

(\*) De Giorgi - "Nuovi teoremi relativi alle misure (n-1)-dimensionali in spazio a n-dimensioni", Ric. di Mat. 4 (1955), 95-113.

(\*\*) M. Miranda - "Analiticità delle ipersuperfici di area minima in  $\mathbb{R}^4$ ", Rend. Acc. Nat. Lincei (1965).

No caso em que  $\partial\Omega$  é localmente Lipschitziana, (6) está provado(\*) mas a condição de Lipschitz sobre  $\partial\Omega$  não parece necessária pelo método da prova deste artigo.

---

(\*) M. Miranda - "Un Principio di massimo forte..."

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 45 (1971).