

CONJUNTOS DE PONTOS FIXOS DE AÇÕES SEMI-LIVRES DO CÍRCULO

José Carlos de Souza Kiihl

e

Claudina Izepe Rodrigues

RELATÓRIO TÉCNICO Nº 47/87

RESUMO. Neste trabalho apresentamos os resultados importantes referentes ao cobordismo de ações semi-livres; analisamos a estrutura do módulo, bem como a multiplicativa. Apresentamos o $\bar{J}$ -homomorfismo estável de Boardman para o caso de ações semi-livres do círculo. Estudamos os conjuntos dos pontos fixos de ações semi-livres de S^1 . Este estudo é feito analisando os ideais S_n^k , formados pelas classes de cobordismo em N_n que são representadas por uma n -variedade que é o conjunto dos pontos fixos de uma $(n + k)$ -variedade com uma ação semi-livre de S^1 .

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação

IMECC – UNICAMP

Caixa Postal 6065

13.081 - Campinas - SP

BRASIL

O conteúdo do presente Relatório Técnico é de única responsabilidade dos autores.

Outubro – 1987

INTRODUÇÃO

F. Capobiano, em sua tese de doutorado [5], estudou questões do seguinte tipo:

"Quando a classe de cobordismo $[M]$, de uma variedade n -dimensional M^n , é o conjunto dos pontos fixos de uma involução $[V^{n+k}, T]$, em uma variedade $(n+k)$ -dimensional".

Este tipo de questão leva ao estudo de um ideal, I_n^k , do anel de cobordismo de Thom N_* . Em nosso presente trabalho tentamos estudar o mesmo problema relacionado com as ações semi-livres de S^1 em variedades não-orientadas.

O principal objetivo deste trabalho é responder à pergunta:

"Quando a classe de cobordismo $[M]$, de uma variedade n -dimensional M^n , é o conjunto dos pontos fixos de uma $[V^{n+k}, S]$ ação semi-livre de S^1 em uma variedade $(n+k)$ -dimensional?"

Na seção 1, apresentamos os resultados importantes referentes ao cobordismo de ações semi-livres do círculo, que serão relevantes para nós. Analisamos a estrutura de módulo, bem como a multiplicativa. Apresentamos o $\bar{J}$ -homomorfismo estável de Boardman para o caso de ações semi-livres de S^1 .

Na secção 2, estudamos os conjuntos dos pontos fixos de ações semi-livres de S^1 . Este estudo é feito analisando os ideais S_n^k , formados pelas classes de cobordismo em N_n que são representadas por uma n -variedade que é o conjunto dos pontos fixos de uma $(n+k)$ -variedade com uma ação semi-livre de S^1 .

1. AÇÕES SEMI-LIVRES DE S^1

Recordamos que $SF_n(S^1)$ é o grupo de bordismo não orientado de ações semi-livres de S^1 em n -variedades fechadas e que $SF_*(S^1) = \bigoplus_{n \geq 0} SF_n(S^1)$ é um N_* -módulo graduado. Também temos os grupos de bordismo não orientado $N_n(S^1)$ de ações livres de S^1 em n -variedades fechadas, e a soma direta fraca $N_*(S^1) = \bigoplus_{n \geq 0} N_n(S^1)$ é um N_* -módulo.

Existe definido o homomorfismo de Smith

$$\Delta : N_*(S^1) \rightarrow N_*(S^1).$$

que é um homomorfismo de N_* -módulo de grau -2 . Suponha que (M^n, T) representa uma ação livre de S^1 em uma variedade fechada. Para N suficientemente grande existe uma única classe de homotopia equivariante de aplicações equivariantes

$$f : (M^n, T) \hookrightarrow (S^{2N+3}, S^1).$$

Podemos assumir que f é transversa regular em $S^{2N+1} \subset S^{2N+3}$.
Tomamos

$$\Delta[M^n, T] = [f^{-1}(S^{2N+1}), T|f^{-1}(S^{2N+1})].$$

Seja o pareamento

$$SF_*(S^1) \otimes_{N_*} N_*(S^1) \rightarrow N_*(S^1)$$

dado por: se $[V^m, \tau] \in SF_n(S^1)$ e $[M^n, T] \in N_n(S^1)$ então $(V^m \times M^n, \tau \times T)$ é também uma ação livre de S^1 e tomamos $[V^m, \tau] [M^n, T] = [V^m \times M^n, \tau \times T]$ para definir o pareamento.

Agora, seja $B_n(S^1)$ o grupo de bordismo de ações semi-livres de S^1 em n -variedades com bordo que é livre no bordo.

Temos definidos os seguintes homomorfismos de N_* -módulos:

$$j : SF_n(S^1) \rightarrow B_n(S^1)$$

que associa $[M^n, T]$ a $[M^n, T]$, uma vez que $\partial M^n = \emptyset$, e também temos:

$$\partial : B_n(S^1) \rightarrow N_n(S^1)$$

que associa $[V^n, T]$ a $[\partial V^n, T|_{\partial V^n}]$.

TEOREMA 1.01. A sequência

$$0 \longrightarrow SF_n(S^1) \xrightarrow{j} B_n(S^1) \xrightarrow{\partial} N_{n-1}(S^1) \longrightarrow 0$$

é exata e se fatora. (Veja [16], 8.3).

Denotemos por $M_n(S^1) = \bigoplus_{k \geq 0}^{[n/2]} N_{n-2k}(BU_k)$, onde BU_k é o espaço classificante para os fibrados k -dimensionais unitários. E denotemos $M_*(S^1) = \bigoplus_{n \geq 0} M_n(S^1)$.

TEOREMA 1.02. Existe um isomorfismo

$$F : B_n(S^1) \rightarrow \bigoplus_{k \geq 0}^{[n/2]} N_{n-2k}(BU_k)$$

dado por: a $[M^n, T]$ associamos $\sum_k [v^k \rightarrow F^{n-2k}]$, onde F^{n-2k} é a componente de dimensão $n-2k$ do conjunto de pontos fixos e v^k é o correspondente fibrado normal.

TEOREMA 1.03. $M_*(S^1)$ é uma álgebra polinomial graduada sobre N_* , cujos geradores são as classes $[\lambda \rightarrow \mathbb{CP}(n)]$ com $n \geq 0$, ou seja os fibrados lineares canônicos sobre $\mathbb{CP}(n)$, com $n \geq 0$. (Veja [16], 8.7).

TEOREMA 1.04. $N_*(S^1)$ é um N_* -módulo com base dada pelos elementos $\{[S^{2n+1}, S^1]\}_{n \geq 0}$.

OBSERVAÇÃO 1.05. Um elemento qualquer de $N_{2n+1}(S^1)$ pode ser escrito de maneira única como

$$\sum_{r=0}^n [x^{2r}] [S^{2(n-r)+1}, S^1]$$

enquanto que um elemento arbitrário de $N_{2n}(S^1)$ pode ser escrito univocamente como

$$\sum_{r=0}^{n-1} [x^{2r+1}] [s^{2(n-r)-1}, s^1].$$

Seja $i \in M_2(S^1)$ a ação semi-livre de S^1 no disco unitário dada pela multiplicação escalar, então $\partial(i) = [S^1, S^1]$ e

LEMA 1.06. O diagrama

$$\begin{array}{ccc} M_{2k+2}(S^1) & \xrightarrow{\partial} & N_{2k+1}(S^1) \\ i \uparrow & & \downarrow \\ M_{2k}(S^1) & \xrightarrow{\partial} & N_{2k-1}(S^1) \end{array}$$

é comutativo.

$$\text{PRODUTO EM } \bigoplus_{n \geq 0} N_{2n+1}(S^1).$$

Definimos um produto em $\bigoplus_{n \geq 0} N_{2n+1}(S^1)$ como segue: Suponha que $\alpha \in N_{2n+1}(S^1)$ e $\beta \in N_{2m+1}(S^1)$. Sejam $\alpha' \in M_{2n+2}(S^1)$ e $\beta' \in M_{2m+2}(S^1)$ tais que $\partial(\alpha') = \alpha$ e $\partial(\beta') = \beta$. Seja $K = \max(m, n)$ e $k = \min(m, n)$. Definimos

$$\alpha\beta = \Delta^{K+1}(\alpha'\beta') \in N_{2k+1}(S^1).$$

No caso $n=m$, isto define uma estrutura de anel com unidade em $N_{2n+1}(S^1)$, com unidade o elemento $[S^{2n+1}, S^1]$.

TEOREMA 1.07. O produto $\alpha\beta$ define uma estrutura de anel em $\bigoplus_{n \geq 0} N_{2n+1}(S^1)$.

OBSERVAÇÃO. Como $\partial(\zeta^{m+1}) = [S^{2m+1}, S^1]$ temos que para $\alpha \in N_{2n+1}(S^1)$, $\alpha[S^{2m+1}, S^1] = \alpha$ para $n \leq m$ desde que $\Delta^{m+1}\partial(\alpha'\zeta^{m+1}) = \partial(\alpha') = \alpha$. Se $n > m$, temos $\alpha[S^{2m+1}, S^1] = \Delta^{m+1}\partial(\alpha'\zeta^{m+1}) = \Delta^{n-m}\alpha$.

Em particular, $N_{2n+1}(S^1)$ é um subanel de $\bigoplus_{n \geq 0} N_{2n+1}(S^1)$ com unidade $[S^{2n+1}, S^1]$, e

$$\Delta : N_{2n+1}(S^1) \rightarrow N_{2n-1}(S^1)$$

é um homomorfismo de anel.

O $\bar{J}$ -HOMOMORFISMO ESTÁVEL DE BORDISMO

Introduzimos o anel

$$R = \varprojlim (N_{2n-1}(S^1) \xleftarrow{\Delta} N_{2n+1}(S^1)).$$

Um elemento em R é uma sequência $\{\alpha_n\}_0^\infty$ com $\alpha_n \in N_{2n+1}(S^1)$ e $\Delta(\alpha_n) = \alpha_{n-1}$, $\forall n \geq 1$.

Definimos $\bar{J} : M_*(S^1) \rightarrow R$, onde $M_*(S^1) = \bigoplus_{k \geq 0} \bigoplus_{j=0}^k N_{2k-2j}(BU_j)$, como segue:

Para $A \in M_{2k}(S^1)$, seja $\bar{J}_n(A) = \Delta^{k-n} \partial(Ai^{n+1})$. Notamos que $\bar{J}_n(A) \in N_{2n+1}(S^1)$. Como $\Delta \bar{J}_n(A) = \Delta^{k+1} \partial(Ai^{n+1}) = \Delta^{k-n} \partial(Ai^n) = \bar{J}_{n-1}(A)$, a sequência $\{\bar{J}_n(A)\}_0^\infty \in R$ e tomamos:

$$\bar{J}(A) = \{\bar{J}_n(A)\}_0^\infty.$$

Notamos que se $k \geq n+1$ então $\bar{J}_n(A) = \Delta^{k-n-1} \partial(A)$.

O homomorfismo $\bar{J}$ é estável com relação a multiplicação por i , isto é, $\bar{J}(Ai) = \bar{J}(A)$.

TEOREMA 1.08. O homomorfismo estável

$$\bar{J} : \bigoplus_{k \geq 0} \bigoplus_{j=0}^k N_{2k-2j}(BU_j) \rightarrow R$$

é multiplicativo.

Tomando o anel $M_*(S^1) = \bigoplus_{k \geq 0} \bigoplus_{j=0}^k N_{2k-2j}(BU_j)$, vamos considerar o anel quociente F obtido da seguinte forma: este anel F é obtido fatorando o ideal de todos os elementos da forma $A + Ai$ onde $A \in M_*(S^1)$.

Existe, de forma natural, um homomorfismo de anel induzido $\bar{J} : F \rightarrow R$.

A ESTRUTURA DE R

Desde que $N_*(S^1)$ é um N_* -módulo com base dada pelos elementos $\{[S^{2n+1}, S^1]\}_{n \geq 0}$ podemos descrever o produto em $N_{2n+1}(S^1)$ diretamente:

Se

$$\alpha = \sum_{r=0}^n [x^{2r}] [S^{2(n-r)+1}, S^1], \quad e$$

$$\beta = \sum_{r=0}^n [y^{2r}] [S^{2(n-r)+1}, S^1],$$

Sejam

$$\alpha' = \sum_{r=0}^n [x^{2r}] \iota^{n-r+1}, \quad e$$

$$\beta' = \sum_{r=0}^n [y^{2r}] \iota^{n-r+1},$$

tais que

$$\alpha' \beta' = \sum_{r=0}^n \left(\sum_{r+s=l} [x^{2r}] [y^{2s}] \right) \iota^{2(n+1)-l}, \quad e$$

$$\alpha \beta = \Delta^{n+1} \partial(\alpha' \beta') = \sum_{r=0}^n \left(\sum_{r+s=l} [x^{2r}] [y^{2s}] \right) [S^{2n+1-l}, S^1].$$

Podemos usar isto para identificar R com o anel $N_*^{(2n)}(\theta)$ de séries de potências formais sobre o anel graduado $N_*^{(2n)}$. A

$\sum_{r=0}^{\infty} [x^{2r}] \theta^r$ associamos a sequência $\{\alpha_n\}_0^{\infty}$ onde

$$\alpha_n = \sum_{r=0}^n [x^{2r}] [s^{2(n-r)+1}, s^1].$$

Temos $\Delta \alpha_{n+1} = \alpha_n$, e a fórmula para $\alpha_n \beta_n$ é justamente a regra para multiplicar séries de potências formais. Assim, temos:

$$\bar{J} : F \rightarrow N(\theta).$$

LEMA 1.09. A imagem de

$$SF_{2m}(s^1) \rightarrow M_{2m}(s^1) \rightarrow F \rightarrow N(\theta)$$

está no ideal gerado por θ^m , e

$$\bar{J}([M^{2m}, T]) = [M^{2m}] \theta^m + \text{termos em pot. } > \text{ de } \theta.$$

LEMA 1.10. Seja $\xi \rightarrow F \in M_{2m}(s^1)$. Se

$$\bar{J}([\xi \rightarrow F]) = \beta \theta^m + \text{termos com pot. } > \text{ de } \theta,$$

então existe uma variedade com ação semi-livre de s^1 (M^{2m}, T) tal que β está na classe de M^{2m} e $\xi \rightarrow F$ é o fibrado normal ao conjunto de pontos fixos de (M^{2m}, T) .

LEMA 1.11. Seja $1_{\mathbb{C}} \in M_2(s^1)$. Temos $\bar{J}(1_{\mathbb{C}}) = 1$.

LEMA 1.12. Sejam $[V^{2s}] \in N_{2s}$ e $A \in M_{2k}$. Então

$$\bar{J}([V^{2s}]A) = [V^{2s}] \theta^S \bar{J}(A).$$

No que segue, vamos definir o operador

$$K : SF_*(S^1) \rightarrow SF_*(S^1).$$

Seja (M^n, T) uma ação semi-livre de S^1 . Para definir $K[M^n, T]$ procedemos da seguinte forma: consideramos as seguintes ações de S^1 em $D^2 \times M^n$:

$$T_1 : (t, (z, m)) \longmapsto (tz, m)$$

$$T_2 : (t, (z, m)) \longmapsto (tz, T(t, m)).$$

Restringindo a $S^1 \times M^n$ obtemos as ações induzidas $(S^1 \times M^n, T_1)$ e $(S^1 \times M^n, T_2)$, que são equivariantemente difeomorfas por

$$\varphi : (S^1 \times M^n, T_1) \rightarrow (S^1 \times M^n, T_2)$$

$$(s, x) \longmapsto (s, T(s, x)).$$

Tomando a união disjunta $(D^2 \times M^n, T_1) \cup (D^2 \times M^n, T_2)$, construímos M^{n+2} uma variedade fechada, e uma ação τ_1 de S^1 em M^{n+2} , usando a identificação de $(S^1 \times M^n, T_1)$ com $(S^1 \times M^n, T_2)$ através de φ .

Definimos $K[M^n, T] = [M^{n+2}, \tau_1]$.

Para analisar o conjunto de pontos fixos F_1 de τ_1 observamos que $F_1 = \text{Fix}(T) \cup M^n$, onde o fibrado normal de $\text{Fix}(T)$ é $\eta \oplus 1_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Fix}(T)$, onde η é o fibrado normal a $\text{Fix}(T)$ em M^n , e o fibrado normal a M^n é um fibrado linear complexo trivial.

Por um processo indutivo podemos associar a (M^n, T) uma sequência de ações semi-livres de S^1 em variedades fechadas $(V(n, k), \tau_k)$. Tomando $[V(n, 0), \tau_0] = [M^n, T]$ e $[V(n, 1), \tau_1] = K[M^n, T]$. A partir de $(V(n, 1), \tau_1)$ obtemos $(V(n, 2), \tau_2)$, aplicando a construção acima a $(V(n, 1), \tau_1)$. Assim aplicando, sucessivamente, a construção acima k vezes obtemos $(V(n, k), \tau_k)$ com conjunto de pontos fixos

$$F_k = \text{Fix}(T) \cup \left(\bigcup_{j=0}^{k-1} V(n, j) \right).$$

Além disso, $\eta_k|_{\text{Fix}(T)} = \eta \oplus 1_{\mathbb{C}}^k \rightarrow \text{Fix}(T)$, onde $\eta \rightarrow \text{Fix}(T)$ é o fibrado normal original a $\text{Fix}(T)$ em M^n , e $\eta_k|_{V(n, j)}$ é um $(k - j)$ -fibrado trivial.

LEMA 1.13. Se $\eta \rightarrow \text{Fix}(T)$ é o fibrado normal ao conjunto de pontos fixos de (M^n, T) , então

$$[V(n, k)] = [\mathbb{C}P(\eta \oplus 1_{\mathbb{C}}^{k+1})] + \sum_{j=0}^{k-1} [\mathbb{C}P(k - j)][V(n, j)].$$

LEMA 1.14. Seja λ_n o fibrado linear complexo canônico sobre $\mathbb{C}P(n)$. Então

$$\bar{J}(\lambda_n) = 1 + \sum_{i=0}^{\infty} [V(n+1, i)] \theta^{n+i+1}.$$

Para cálculos mais explícitos de $\bar{J}$ nos geradores de $M_*(S^1)$, isto é, nos elementos λ_n , como

$$\begin{aligned} [V(n+1, k)] &= [\mathbb{CP}(\lambda_n \oplus \mathbb{C}^{k+1})] + [\mathbb{CP}(n+k+1)] + \\ &+ \sum_{j=0}^{k-1} [\mathbb{CP}(k-j)][V(n+1, j)] \quad \text{por (1.13)}. \end{aligned}$$

É conveniente conhecermos alguns resultados referentes a classe de bordismo de alguns espaços fibrados projetivos complexos associados a $\lambda_n \oplus \mathbb{C}^{k+1}$, isto é, a $[\mathbb{CP}(\lambda_n \oplus \mathbb{C}^{k+1})]$.

LEMA 1.15. Se $\xi \rightarrow V^m$ é um 2-fibrado plano complexo, então $[\mathbb{CP}(\xi)] = 0$ em N_{m+2} .

LEMA 1.16. Para qualquer $n \geq 0$, $[\mathbb{CP}(\lambda_1 \oplus \mathbb{C}^n)] = 0$ em $N_{2(n+1)}$.

LEMA 1.17. Seja λ_n o fibrado linear complexo canônico sobre $\mathbb{CP}(n)$. Então $[\mathbb{CP}(\lambda_n \oplus \mathbb{C})] = 0$, $\forall n \geq 0$.

LEMA 1.18. Para qualquer par de inteiros n, k

$$[\mathbb{CP}(\lambda_n \oplus \mathbb{C}^k)] + [\mathbb{CP}(\lambda_{k-1} \oplus \mathbb{C}^{n+1})] = [\mathbb{CP}(n+k)].$$

OBSERVAÇÃO. Como consequência do lema anterior temos que $[\mathbb{CP}(\lambda_n \oplus l_{\mathbb{C}}^2)] = [\mathbb{CP}(n+2)]$, pois

$$[\mathbb{CP}(\lambda_n \oplus l_{\mathbb{C}}^2)] + [\mathbb{CP}(\lambda_1 \oplus l_{\mathbb{C}}^{n+1})] = [\mathbb{CP}(n+2)]$$

e por (1.16), $[\mathbb{CP}(\lambda_1 \oplus l_{\mathbb{C}}^{n+1})] = 0$. Portanto,

$$[\mathbb{CP}(\lambda_n \oplus l_{\mathbb{C}}^2)] = [\mathbb{CP}(n+2)].$$

2. CONJUNTO DE PONTOS FIXOS DE AÇÕES SEMI-LIVRES DE S^1

Dada uma n -variedade fechada diferenciável M^n , para quais valores de k existe uma $(n + 2k)$ -variedade V^{n+2k} com ação semi-livre de S^1 cujo conjunto de pontos fixos é cobordante a M^n ? Dada uma variedade fechada M^n , nosso objetivo, no que segue, será mostrar que para alguns valores de k existe uma variedade fechada com uma ação semi-livre de S^1 , (V^{n+2k}, T) , cujo conjunto de pontos fixos é cobordante a M^n .

Vamos denotar por S_n^k , onde k é par, o conjunto de classes no grupo de cobordismo não orientado N_n que são representadas por uma n -variedade que é o conjunto de pontos fixos de uma $(n + k)$ -variedade com uma ação semi-livre de S^1 .

Propriedades de S_n^k

- 1) S_n^k é um subgrupo de N_n
- 2) $S_n^0 = N_n$
- 3) $S_*^k = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^k = S_0^k + S_1^k + S_2^k + \dots$ é um ideal em N_* .

PROPOSIÇÃO 2.01. A classe de $\mathbb{C}P(2k) \cup \mathbb{C}P(k) \times \mathbb{C}P(k)$ pertence a S_{4k}^4 , $\forall k > 1$.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam λ_{2k} o fibrado linear complexo canônico

sobre $\mathbb{CP}(2k)$ e λ_k o fibrado linear complexo canônico sobre $\mathbb{CP}(k)$. Então temos:

$$\begin{aligned}
 \bar{J}(\lambda_{2k}\lambda_0 + \lambda_k^2) &= \bar{J}(\lambda_{2k})\bar{J}(\lambda_0) + (\bar{J}(\lambda_k))^2 \\
 &= 1 + \sum_{i=0}^{\infty} [V(2k+1, i)] \theta^{2k+1+i} + \\
 &\quad + (1 + \sum_{i=0}^{\infty} [V(k+1, i)] \theta^{k+1+i})^2 \\
 &= 1 + [V(2k+1, 0)] \theta^{2k+1} + [V(2k+1, 1)] \theta^{2k+2} + \dots + \\
 &\quad + 1 + [V(k+1, 0)]^2 \theta^{2k+2} + [V(k+1, 1)]^2 \theta^{2k+4} + \dots \\
 &= ([V(2k+1, 1)] + [V(k+1, 0)]^2) \theta^{2k+2} + [V(2k+1, 2)] \theta^{2k+3} + \\
 &\quad + ([V(2k+1, 3)] + [V(k+1, 1)]^2) \theta^{2k+4} + [V(2k+1, 4)] \theta^{2k+5} + \\
 &\quad + \text{termos com pot. } > \text{ de } \theta.
 \end{aligned}$$

Portanto, por (1.13), a classe de $\mathbb{CP}(2k) \cup \mathbb{CP}(k) \times \mathbb{CP}(k)$, que é a base do fibrado $\lambda_{2k}\lambda_0 + \lambda_k^2$, pertence a S_{4k}^4 .

OBSERVAÇÃO: Se k é ímpar, temos:

$$[\mathbb{CP}(2k)] + [\mathbb{CP}(k) \times \mathbb{CP}(k)] = [\mathbb{CP}(2k)] = [\mathbb{RP}(2k) \times \mathbb{RP}(2k)].$$

Portanto, $[RP(2k) \times RP(2k)]$ pertence a S_{4k}^4 para k ímpar.

PROPOSIÇÃO 2.02. Seja M^2 uma variedade fechada no grupo de bordismo não orientado N_2 . Então a classe de $(M^2 \times \mathbb{CP}(2k)) \cup (M^2 \times \mathbb{CP}(k) \times \mathbb{CP}(k))$ pertence a S_{4k+2}^4 .

DEMONSTRAÇÃO.

$$\begin{aligned} \bar{J}([M^2] \lambda_{2k} \lambda_0 + [M^2] \lambda_k^2) &= [M^2] \theta \bar{J}(\lambda_{2k} \lambda_0 + \lambda_k^2) \\ &= [M^2] \theta \{ ([V(2k+1,1)] + [V(k+1,0)]^2) \theta^{2k+2} + \\ &\quad + [V(2k+1,2)] \theta^{2k+3} + \text{termos com pot. } > \text{ de } \theta \}. \\ &= [M^2] ([V(2k+1,1)] + [V(k+1,0)]^2) \theta^{2k+3} + \\ &\quad + \text{termos com pot. } > \text{ de } \theta. \end{aligned}$$

Portanto, a classe de $(M^2 \times \mathbb{CP}(2k)) \cup (M^2 \times \mathbb{CP}(k) \times \mathbb{CP}(k))$, que é a base do fibrado $M^2 \lambda_{2k} \lambda_0 + M^2 \lambda_k^2$, pertence a S_{4k+2}^4 .

OBSERVAÇÃO. Poderíamos também concluir o resultado acima, usando a Proposição (1.22), e lembrando que S_*^4 é um ideal em N_* . Desta forma também temos que a classe de $(M^n \times \mathbb{CP}(2k)) \cup (M^n \times \mathbb{CP}(k) \times \mathbb{CP}(k))$ pertence a S_{4k+n}^4 , para qualquer $n \geq 0$.

PROPOSIÇÃO 2.03. Seja $\mathbb{CP}(\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^3)$ o espaço fibrado complexo projetivo associado ao fibrado $\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^3$. Existe uma ação semi-livre de S^1 em $\mathbb{CP}(\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^3) \in SF_{10}(S^1)$ fixando $\mathbb{CP}(2) \cup$ ponto.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(\lambda \oplus 1_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{CP}(2)) \cup (1_{\mathbb{C}}^5 \rightarrow \mathbb{CP}(0)) \in M_{10}(S^1)$. Temos:

$$\bar{J}(\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^2 + 1_{\mathbb{C}}^5) = \bar{J}(\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^2) + \bar{J}(1_{\mathbb{C}}^5).$$

$$= \bar{J}(\lambda_2) + \bar{J}(1_{\mathbb{C}})$$

$$= [V(3,0)]\theta^3 + [V(3,1)]\theta^4 + [V(3,2)]\theta^5 + \dots$$

Como, $[V(3,0)] = [\mathbb{CP}(3)] = [\mathbb{RP}(3) \times \mathbb{RP}(3)] = 0$, e

$$[V(3,1)] = [\mathbb{CP}(4)] + [\mathbb{CP}(\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^2)] + \sum_{k=0}^0 [\mathbb{CP}(1-k)] [V(3,k)]$$

$$= [\mathbb{CP}(4)] + [\mathbb{CP}(\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^2)] + [\mathbb{CP}(1)] [V(3,0)]$$

$$= [\mathbb{CP}(4)] + [\mathbb{CP}(\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^2)]$$

$$= [\mathbb{CP}(4)] + [\mathbb{CP}(4)] = 0 \quad \text{por (1.20).}$$

Portanto,

$$\bar{J}(\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^2 + 1_{\mathbb{C}}^5) = [V(3,2)]\theta^5 + \text{termos com pot. } > \text{ de } \theta.$$

Como,

$$\begin{aligned}
 [V(3,2)] &= [\mathbb{CP}(5)] + [\mathbb{CP}(\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^3)] + \sum_{k=0}^1 [\mathbb{CP}(2-k)] [V(3,k)] \\
 &= [\mathbb{CP}(\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^3)] + [\mathbb{CP}(2)] [V(3,0)] + [\mathbb{CP}(1)] [V(3,1)] \\
 &= [\mathbb{CP}(\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^3)],
 \end{aligned}$$

e pelo lema (1.13), concluímos que existe ação semi-livre de S^1 em $\mathbb{CP}(\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^3)$, fixando $\mathbb{CP}(2) \cup$ ponto que é o espaço base do fibrado $\lambda_2 \oplus 1_{\mathbb{C}}^2 + 1_{\mathbb{C}}^5$.

Vamos agora analisar o efeito do homomorfismo de Boardman $\bar{J}$ em alguns elementos de $M_{10}(S^1)$. No que segue denotaremos por x_n a classe de $RP(n)$.

$$\begin{aligned}
 SF_{10}(S^1) \rightarrow M_{10}(S^1) &= \bigoplus_{k=0}^5 N_{10-2k}(BU_k) \\
 &= N_{10}(BU_0) + N_8(BU_1) + N_6(BU_2) + N_4(BU_3) + N_2(BU_4) + N_0(BU_5)
 \end{aligned}$$

$$N_{10}(BU_0) \simeq N_{10}.$$

Sejam os elementos $x_8^{\lambda_0}, x_6^{\lambda_1}, x_4^{\lambda_2}, x_2^{\lambda_3}, \lambda_4$ pertencentes a $N_8(BU_1)$. Temos:

$$\bar{J}(x_8 \lambda_0) = x_8 \theta^4$$

$$\bar{J}(x_6 \lambda_1) = x_6 \theta^3 + x_6 [V(2,0)] \theta^5 + x_6 [V(2,1)] \theta^6 + \dots$$

$$\bar{J}(x_4 \lambda_2) = x_4 \theta^2 + x_4 [V(3,0)] \theta^5 + x_4 [V(3,1)] \theta^6 + \dots$$

$$\bar{J}(x_2 \lambda_3) = x_2 \theta + x_2 [V(4,0)] \theta^5 + x_2 [V(4,1)] \theta^6 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_4) = 1 + [V(5,0)] \theta^5 + \dots$$

Sejam $x_4 \lambda_0 \lambda_1, x_2 \lambda_0 \lambda_2, \lambda_0 \lambda_3, x_2 \lambda_1^2, \lambda_1 \lambda_2$ em $N_6(BU_2)$. Temos:

$$\bar{J}(x_4 \lambda_0 \lambda_1) = x_4 \theta^2 + x_4 [V(2,0)] \theta^4 + x_4 [V(2,1)] \theta^5 + x_4 [V(2,2)] \theta^6 + \dots$$

$$\bar{J}(x_2 \lambda_0 \lambda_2) = x_2 \theta + x_2 [V(3,0)] \theta^4 + x_2 [V(3,1)] \theta^5 + x_2 [V(3,2)] \theta^6 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_0 \lambda_3) = 1 + [V(4,0)] \theta^4 + [V(4,1)] \theta^5 + [V(4,2)] \theta^6 + \dots$$

$$\bar{J}(x_2 \lambda_1^2) = 1 + [V(2,0)]^2 \theta^4 + [V(2,1)]^2 \theta^6 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_1 \lambda_2) = 1 + [V(2,0)] \theta^2 + [V(2,2)] \theta^4 + [V(3,2)] \theta^5 + \dots$$

Sejam $x_4 \lambda_0^3, x_2 \lambda_0^2 \lambda_1, \lambda_0^2 \lambda_2, \lambda_0 \lambda_1^2$ em $N_4(BU_3)$. Temos:

$$\bar{J}(x_4 \lambda_0^3) = x_4 \theta^2$$

$$\bar{J}(x_2 \lambda_0^2 \lambda_1) = x_2 \theta + x_2 [V(2,0)] \theta^3 + x_2 [V(2,1)] \theta^4 + x_2 [V(2,2)] \theta^5 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_0^2 \lambda_2) = 1 + [V(3,0)] \theta^3 + [V(3,1)] \theta^4 + [V(3,2)] \theta^5 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_0 \lambda_1^2) = 1 + [V(2,0)] \theta^4 + [V(2,1)] \theta^5 + \dots$$

Sejam $x_2 \lambda_0^4$, $\lambda_0^3 \lambda_1$ em $N_2(BU_4)$. Temos:

$$\bar{J}(x_2 \lambda_0^4) = x_2 \theta$$

$$\bar{J}(\lambda_0^3 \lambda_1) = 1 + [V(2,0)] \theta^2 + [V(2,1)] \theta^3 + [V(2,2)] \theta^4 + [V(2,3)] \theta^5 + \dots$$

Para $\lambda_0^5 \in N_0(BU_5)$, temos: $\bar{J}(\lambda_0^5) = 1$.

Portanto,

$$\bar{J}(\lambda_0^5 + \lambda_4) = [V(5,0)] \theta^5 + \dots$$

$$\bar{J}(x_2 \lambda_3 + x_2 \lambda_0^4) = x_2 [V(4,0)] \theta^5 + \dots$$

$$\bar{J}(x_4 \lambda_2 + x_4 \lambda_0^3) = x_4 [V(3,0)] \theta^5 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_0^3 \lambda_1) = ([V(3,2)] + [V(2,3)] \theta^5 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_0^2 \lambda_2 + \lambda_0^5) = [V(3,2)] \theta^5 + \dots$$

$$\bar{J}(x_2 \lambda_3 + x_2 \lambda_0 \lambda_2) = (x_2 [V(3,1)] + x_2 [V(4,0)]) \theta^5 + \dots$$

Assim, concluímos que existe ação semi-livre de S^1 em:

- (a) $[V(5,0)]$ fixando $\mathbb{CP}(4) \cup \mathbb{CP}(0)$.
- (b) $\mathbb{RP}(2) \times \mathbb{CP}(4)$ fixando $\mathbb{RP}(2) \times \mathbb{CP}(3) \cup \mathbb{RP}(2)$.
- (c) $\mathbb{RP}(4) \times \mathbb{CP}(3)$ fixando $\mathbb{RP}(4) \times \mathbb{CP}(2) \cup \mathbb{RP}(4)$.
- (d) $V(3,2) \cup V(2,3)$ fixando $\mathbb{CP}(1) \times \mathbb{CP}(2) \cup \mathbb{CP}(1)$.
- (e) $V(3,2)$ fixando $\mathbb{CP}(2) \cup \mathbb{CP}(0)$.
- (f) $\mathbb{RP}(2) \times V(3,1)$ fixando $\mathbb{RP}(2) \times \mathbb{CP}(2) \cup \mathbb{RP}(2)$.
- (g) $(\mathbb{RP}(2) \times V(3,1)) \cup (\mathbb{RP}(2) \times \mathbb{CP}(4))$ fixando $\mathbb{RP}(2) \times \mathbb{CP}(3) \cup \mathbb{RP}(2) \times \mathbb{CP}(2)$.

Com o objetivo de calcular S_{2n}^2 , isto é, o conjunto de classes M^{2n} em N_{2n} para as quais existe uma variedade v^{2n+2} com ação semi-livre de S^1 com conjunto de pontos fixos bordante a M^{2n} , vamos primeiramente calcular esses conjuntos para alguns valores de n , mais precisamente calcular S_{2n}^2 para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. No que segue M^{2n} denotará $\mathbb{RP}(2n)$. Observamos que, se um elemento α (em $SF_{2(n+1)}(S^1)$) pertence a S_{2n}^2 , então $j\alpha \in N_{2n}(BU_1)$. Sendo λ_n , o fibrado linha complexo canônico sobre $\mathbb{CP}(n)$, temos:

$$\bar{J}(\lambda_0) = 1$$

$$\bar{J}(\lambda_1) = 1 + [v(2,0)]\theta^2 + [v(2,1)]\theta^3 + [v(2,2)]\theta^4 + [v(2,3)]\theta^5 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_2) = 1 + [v(3,0)]\theta^3 + [v(3,1)]\theta^4 + [v(3,2)]\theta^5 + [v(3,3)]\theta^6 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_3) = 1 + [v(4,0)]\theta^4 + [v(4,1)]\theta^5 + [v(4,2)]\theta^6 + [v(4,3)]\theta^7 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_4) = 1 + [v(5,0)]\theta^5 + [v(5,1)]\theta^6 + [v(5,2)]\theta^7 + [v(5,3)]\theta^8 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_5) = 1 + [v(6,0)]\theta^6 + [v(6,1)]\theta^7 + [v(6,2)]\theta^8 + [v(6,3)]\theta^9 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_6) = 1 + [v(7,0)]\theta^7 + [v(7,1)]\theta^8 + [v(7,2)]\theta^9 + [v(7,3)]\theta^{10} + \dots$$

$$n = 1$$

$$\begin{aligned} SF_4(S^1) &\xrightarrow{j} M_4(S^1) = \bigoplus_{k=0}^2 N_{4-2k}(BU_k) \\ &= N_4(BU_0) + N_2(BU_1) + N_0(BU_2) \end{aligned}$$

$$\text{geradores de } N_2(BU_1) : [M^2]\lambda_0 \text{ e } \lambda_1$$

$$\bar{J}([M^2]\lambda_0) = [M^2]\theta \bar{J}(\lambda_0) = [M^2]\theta$$

$$\bar{J}(\lambda_1) = 1 + [v(2,0)]\theta^2 + [v(2,1)]\theta^3 + \dots$$

$$\text{Portanto, } S_2^2 = (0).$$

$n = 2$

$$SF_6(S^1) \xrightarrow{j} M_6(S^1) = \bigoplus_{k=0}^3 N_{6-2k}(BU_k) \\ = \dots + N_4(BU_1) + \dots$$

geradores de $N_4(BU_1)$: $[M^4]\lambda_0$, $[M^2]\lambda_1$ e λ_2

$$\bar{J}([M^4]\lambda_0) = [M^4]\theta^2$$

$$\bar{J}([M^2]\lambda_1) = [M^2]\theta\{1 + [V(2,0)]\theta^2 + [V(2,1)]\theta^3 + [V(2,2)]\theta^4 + \dots\} \\ = [M^2]\theta + [M^2][V(2,0)]\theta^3 + [M^2][V(2,1)]\theta^4 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_2) = 1 + [V(3,0)]\theta^3 + [V(3,1)]\theta^4 + [V(3,2)]\theta^5 + \dots$$

Portanto, $S_4^2 = (0)$.

$n = 3$

$$SF_8(S^1) \xrightarrow{j} M_8(S^1) = \bigoplus_{k=0}^4 N_{8-2k}(BU_k) \\ = \dots + N_6(BU_1) + \dots$$

geradores de $N_6(BU_1)$: $[M^6]\lambda_0$, $[M^4]\lambda_1$, $[M^2]\lambda_2$, λ_3

$$\bar{J}([M^6] \lambda_0) = [M^6] \theta^3$$

$$\bar{J}([M^4] \lambda_1) = [M^4] \theta^2 + [M^4][V(2,0)] \theta^4 + [M^4][V(2,1)] \theta^5 + \dots$$

$$\bar{J}([M^2] \lambda_2) = [M^2] \theta + [M^2][V(3,0)] \theta^4 + [M^2][V(3,1)] \theta^5 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_3) = 1 + [V(4,0)] \theta^4 + [V(4,1)] \theta^5 + [V(4,2)] \theta^6 + \dots$$

Portanto, $S_6^2 = (0)$.

$n = 4$

$$\begin{aligned} SF_{10}(S^1) &\xrightarrow{j} M_{10}(S^1) = \bigoplus_{k=0}^5 N_{10-2k}(BU_k) \\ &= \dots + N_8(BU_1) + \dots \end{aligned}$$

geradores de $N_8(BU_1)$: $[M^8] \lambda_0$, $[M^6] \lambda_1$, $[M^4] \lambda_2$, $[M^2] \lambda_3$ e λ_4

$$\bar{J}([M^8] \lambda_0) = [M^8] \theta^4$$

$$\bar{J}([M^6] \lambda_1) = [M^6] \theta^3 + [M^6][V(2,0)] \theta^5 + [M^6][V(2,1)] \theta^6 + \dots$$

$$\bar{J}([M^4] \lambda_2) = [M^4] \theta^2 + [M^4][V(3,0)] \theta^5 + [M^4][V(3,1)] \theta^6 + \dots$$

$$\bar{J}([M^2] \lambda_3) = [M^2] \theta + [M^2][V(4,0)] \theta^5 + [M^2][V(4,1)] \theta^6 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_4) = 1 + [V(5,0)] \theta^5 + [V(5,1)] \theta^6 + \dots$$

Portanto, $S_8^2 = (0)$.

$n = 5$

$$SF_{12}(s^1) \xrightarrow{j} M_{12}(s^1) = \bigoplus_{k=0}^6 N_{12-2k}(BU_k) \\ = \dots + N_{10}(BU_1) + \dots$$

geradores de $N_{10}(BU_1)$: $[M^{10}] \lambda_0$, $[M^8] \lambda_1$, $[M^6] \lambda_2$, $[M^4] \lambda_3$, $[M^2] \lambda_4$ e λ_5

$$\bar{J}([M^{10}] \lambda_0) = [M^{10}] \theta^5$$

$$\bar{J}([M^8] \lambda_1) = [M^8] \theta^4 + [M^8][V(2,0)] \theta^6 + [M^8][V(2,1)] \theta^7 + \dots$$

$$\bar{J}([M^6] \lambda_2) = [M^6] \theta^3 + [M^6][V(3,0)] \theta^6 + [M^6][V(3,1)] \theta^7 + \dots$$

$$\bar{J}([M^4] \lambda_3) = [M^4] \theta^2 + [M^4][V(4,0)] \theta^6 + [M^4][V(4,1)] \theta^7 + \dots$$

$$\bar{J}([M^2] \lambda_4) = [M^2] \theta + [M^2][V(5,0)] \theta^6 + [M^2][V(5,1)] \theta^7 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_5) = 1 + [V(6,0)] \theta^6 + [V(6,1)] \theta^7 + [V(6,2)] \theta^8 + \dots$$

Portanto, $S_{10}^2 = (0)$.

$$n = 6$$

$$SF_{14}(S^1) \xrightarrow{j} M_{14}(S^1) = \bigoplus_{k=0}^7 N_{14-2k}(BU_k) \\ = \dots + N_{12}(BU_1) + \dots$$

geradores de $N_{12}(BU_1)$: $[M^{12}]\lambda_0$, $[M^{10}]\lambda_1$, $[M^8]\lambda_2$, $[M^6]\lambda_3$, $[M^4]\lambda_4$, $[M^2]\lambda_5$ e λ_6

$$\bar{J}([M^{12}]\lambda_0) = [M^{12}]\theta^6$$

$$\bar{J}([M^{10}]\lambda_1) = [M^{10}]\theta^5 + [M^{10}][V(2,0)]\theta^7 + [M^{10}][V(2,1)]\theta^8 + \dots$$

$$\bar{J}([M^8]\lambda_2) = [M^8]\theta^4 + [M^8][V(3,0)]\theta^7 + [M^8][V(3,1)]\theta^8 + \dots$$

$$\bar{J}([M^6]\lambda_3) = [M^6]\theta^3 + [M^6][V(4,0)]\theta^7 + [M^6][V(4,1)]\theta^8 + \dots$$

$$\bar{J}([M^4]\lambda_4) = [M^4]\theta^2 + [M^4][V(5,0)]\theta^7 + [M^4][V(5,1)]\theta^8 + \dots$$

$$\bar{J}([M^2]\lambda_5) = [M^2]\theta + [M^2][V(6,0)]\theta^7 + [M^2][V(6,1)]\theta^8 + \dots$$

$$\bar{J}(\lambda_6) = 1 + [V(7,0)]\theta^7 + [V(7,1)]\theta^8 + \dots$$

$$\text{Portanto, } S_{12}^2 = (0).$$

Analizando o que foi feito acima, podemos generalizar.

Temos:

PROPOSIÇÃO 2.04. Seja a ação semi-livre de S^1 (V^{2n+2}, T). Se o conjunto de pontos fixos N é de codimensão 2, então N é bordo, isto é, $S_{2n}^2 = (0)$, $\forall n \geq 0$.

DEMONSTRAÇÃO.

$$SF_{2n+2}(S^1) \xrightarrow{j} M_{2n+2}(S^1) = \bigoplus_{k=0}^{n+1} N_{2n+2-2k}(BU_k).$$

Para que um elemento α (em $SF_{2n+2}(S^1)$) pertença a S_{2n}^2 , devemos ter $j\alpha \in N_{2n}(BU_1)$, mas $N_{2n}(BU_1)$ é gerado pelos elementos:

$$[M^{2n-2i}] \lambda_i, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Como

$$\bar{J}([M^{2n-2i}] \lambda_i) = [M^{2n-2i}] \theta^{n-i} + \sum_{j=0}^{\infty} [M^{2n-2i}][V(i+1, j)] \theta^{n+j+1}.$$

Assim qualquer combinação dos elementos $\bar{J}([M^{2n-2i}] \lambda_i)$ $0 \leq i \leq n$, contém potências de θ menores que $n+1$. E como, para um elemento $\alpha \in SF_{2n+2}(S^1)$, $\bar{J}j\alpha$ pertence ao ideal gerado por θ^{n+1} , então não existe elemento, não bordo, em $SF_{2n+2}(S^1)$ com a imagem através de j em $N_{2n}(BU_1)$. Portanto, $S_{2n}^2 = (0)$, $\forall n$.

PROPOSIÇÃO 2.05. S_n^{2k} contém a classe de cobordismo de

$$\mathbb{CP}(\xi^k) \cup M^{n-2k+1} \times \mathbb{CP}(k-1),$$

onde $\xi^k \rightarrow M^{n-2k+1}$ é um k -fibrado complexo e $\mathbb{CP}(\xi^k)$ denota o espaço total do espaço fibrado projetivo complexo associado.

DEMONSTRAÇÃO. Considere a soma de Whitney

$$\xi^k \oplus 1_{\mathbb{C}}^k \rightarrow M^{n-2k+1}$$

e o espaço total $\mathbb{CP}(\xi^k \oplus 1_{\mathbb{C}}^k)$ do fibrado projetivo associado. A multiplicação por um escalar nas fibras de ξ^k induz uma ação semi-livre de S^1 em $\mathbb{CP}(\xi^k \oplus 1_{\mathbb{C}}^k)$ que fixa o conjunto

$$\mathbb{CP}(\xi^k) \cup M^{n-2k+1} \times \mathbb{CP}(k-1).$$

Considere $\xi \rightarrow X$ um k -fibrado complexo. A classe total de Chern de $\xi \rightarrow X$ pode ser expressa na forma fatorada $\sum_{j=1}^{k+1} (1+t_j)$, e para cada $m > 0$ introduzimos as funções simétricas elementares

$$s_m(\xi) = \sum_{j=1}^{k+1} (t_j)^m$$

cada $s_m(\xi)$ pode ser expressa de forma única como uma polinomial

homogenea nas classes de Chern (as funções simétricas elementares), logo $s_m(\xi) \in H^{2m}(X; \mathbb{Z})$. Para uma soma de Whitney,

$$s_m(\xi_1 \oplus \xi_2) = s_m(\xi_1) + s_m(\xi_2)$$

(Veja [9], pag. 292).

LEMA 2.06. Seja $\mathbb{CP}(n_1, n_2, \dots, n_k)$ o espaço fibrado projetivo complexo $2(n+k-1)$ -dimensional associado ao fibrado $\lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_k$ sobre $\mathbb{CP}(n_1) \times \dots \times \mathbb{CP}(n_k)$, onde λ_i é o pullback do fibrado linear canônico sobre o i -ésimo fator. Então para $k > 1$, $\mathbb{CP}(n_1, \dots, n_k)$ é indecomponível em N_* se, e somente se

$$\binom{n+k-2}{n_1} + \dots + \binom{n+k-2}{n_k}$$

é ímpar, onde $n = n_1 + \dots + n_k$.

DEMONSTRAÇÃO. Denotamos por $B(\lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_k) \rightarrow \mathbb{CP}(n_1) \times \dots \times \mathbb{CP}(n_k)$ o $(2k-1)$ -fibrado esférico associado e por

$$p : \mathbb{CP}(n_1, \dots, n_k) \rightarrow \mathbb{CP}(n_1) \times \dots \times \mathbb{CP}(n_k)$$

o fibrado associado com fibra $\mathbb{CP}(k-1)$. Neste caso o $(2k-1)$ -fibrado esférico $B(\lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_k)$ é um $U(1)$ -fibrado principal sobre $\mathbb{CP}(n_1, \dots, n_k)$. Seja $c \in H^2(\mathbb{CP}(n_1, \dots, n_k); \mathbb{Z}_2)$ a classe

de Chern módulo 2 deste $U(1)$ -fibrado. De acordo com ([12], pag. 36):

$$c^k = \sum_{j=1}^k p^*(v_j) c^{k-j},$$

onde $1, v_1, \dots, v_k$ são as classes de Chern módulo 2 de

$$\lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_k \rightarrow \mathbb{CP}(n_1) \times \dots \times \mathbb{CP}(n_k).$$

Por indução em i , podemos verificar que

$$c^{k-l+1} = \bar{v}_1 c^{k-l} + \text{termos com pot. } < \text{ de } c,$$

onde v_i 's são as classes dual de Chern, pois: para $i = 1$, temos:

$$c^{k-l+1} = c^k = \bar{v}_1 c^{k-l} + v_2 c^{k-l-1} + \text{termos com pot. } < \text{ de } c,$$

para $i = 2$:

$$\begin{aligned} c^{k-l+2} = c^k c &= \bar{v}_1 c^k + v_2 c^{k-l} + v_3 c^{k-l-1} + \text{termos com pot. } < \text{ de } c \\ &= \bar{v}_2 c^{k-l} + (\bar{v}_1 v_2 + v_3) c^{k-l-1} + \text{pot. } < \text{ de } c. \end{aligned}$$

Supondo que vale para i , podemos verificar que vale para

$i+1$:

$$c^{k-1+i+1} = c^{k-1+i}c$$

$$= (\bar{v}_1 c^{k-1} + (v_2 \bar{v}_{i-1} + v_3 \bar{v}_{i-2} + \dots + \bar{v}_{i-1} \bar{v}_1 + v_{i+1}) c^{k-2} + \text{pot.} < \text{de } c) c$$

$$= \bar{v}_1 c^k + (v_2 \bar{v}_{i-1} + v_3 \bar{v}_{i-2} + \dots + v_{i-1} \bar{v}_1 + v_{i+1}) c^{k-1} + \text{pot.} < \text{de } c$$

$$= \bar{v}_1 v_1 c^{k-1} + (v_2 \bar{v}_{i-1} + v_3 \bar{v}_{i-2} + \dots + v_{i-1} \bar{v}_1 + v_{i+1}) c^{k-1} + \text{pot.} < \text{de } c$$

$$= (\bar{v}_1 v_1 + v_2 \bar{v}_{i-1} + \dots + v_{i-1} \bar{v}_1 + v_{i+1}) c^{k-1} + \text{pot.} < \text{de } c$$

$$= \bar{v}_{i+1} c^{k-1} + \text{pot.} < \text{de } c.$$

Assim, $c^{k-1+n} = \bar{v}_n c^{k-1} + \text{termos com pot.} < \text{de } c$, e como os coeficientes dos termos com potências $< \text{de } c$ pertencem a $H^j(\mathbb{CP}(n_1) \times \dots \times \mathbb{CP}(n_k))$ com $j > 2n$, temos que $c^{k-1+n} = \bar{v}_n c^{k-1}$, e também $c^n = \bar{v}_n$. Analogamente, temos que $c^{n-j} = \bar{v}_{n-j}$.

A classe total de Stiefel-Whitney da $2(n+k-1)$ -variedade $\mathbb{CP}(n_1, \dots, n_k)$ é

$$\left(\sum_0^{2n} p^*(w_j) \right) \left(\sum_0^k p^*(v_j) (1+c)^{k-j} \right),$$

onde $1, w_1, \dots, w_{2n}$ são as classes de Stiefel-Whitney de $\mathbb{CP}(n_1) \times \dots \times \mathbb{CP}(n_k)$. Seja

$$\pi_i : \mathbb{CP}(n_1) \times \dots \times \mathbb{CP}(n_k) \rightarrow \mathbb{CP}(n_i)$$

a projeção no i -ésimo fator, α o elemento não nulo de $H^1(\mathbb{CP}(n_i); \mathbb{Z}_2)$, e $\alpha_i = \pi_i^*(\alpha)$. Então a classe de Stiefel-Whitney de $\mathbb{CP}(n_1) \times \dots \times \mathbb{CP}(n_k)$ é

$$\prod_{i=1}^k (1 + \alpha_i)^{n_i+1}.$$

Portanto,

$$\sum_{0}^{2n} p^*(w_k) = \prod_{i=1}^k (1 + \alpha_i)^{n_i+1}.$$

A classe de Stiefel-Whitney do fibrado

$$\lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_k \rightarrow \mathbb{CP}(n_1) \times \dots \times \mathbb{CP}(n_k)$$

é $\prod_{i=1}^k (1 + \alpha_i)$. Portanto,

$$\sum_{i=1}^k p^*(v_j) (1 + c)^{k-j} = \prod_{i=1}^k (1 + c + \alpha_i).$$

Assim, a classe total de Stiefel-Whitney de $\mathbb{CP}(n_1, \dots, n_k)$ é

$$\prod_{i=1}^k (1 + \alpha_i)^{n_i+1} \cdot \prod_{i=1}^k (1 + c + \alpha_i).$$

Então a classe

$$s_{2(n+k-1)} = \sum_i (n_i + 1) \alpha_i^{n+k-1} + \sum_i (c + \alpha_i)^{n+k-1}.$$

Como $\alpha_i^{n+k-1} = 0$, pois $k > 1$ e $n_1 + \dots + n_k + k - 1 > n_1 + \dots + n_k > n_i$, $\forall i$ temos

$$\begin{aligned} s_{2(n+k-1)} &= \sum_i (c + \alpha_i)^{n+k-1} \\ &= kc^{n+k-1} + \sum_{j=1}^n \binom{n+k-1}{j} s_j c^{n+k-1-j} \\ &= c^{k-1} \{ kc^n + \sum_{j=1}^n \binom{n+k-1}{j} s_j c^{n-j} \} \\ &= c^{k-1} \{ k\bar{v}_n + \sum_{j=1}^n \binom{n+k-1}{j} s_j \bar{v}_{n-j} \} \end{aligned}$$

onde $s_j = \sum_{i=1}^k \alpha_i^j$ é a j -ésima s -classe de $\lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_k$. E por ([21], 3.4) o valor desta classe característica é

$$\binom{n+k-2}{n_1} + \dots + \binom{n+k-2}{n_k}.$$

PROPOSIÇÃO 2.07. S_{2n}^{2k} contém uma classe de cobordismo indecompo nível para cada k tal que $4 \leq k \leq \alpha(n)$, onde $\alpha(n)$ denota o número de termos na expansão diádica de n .

DEMONSTRAÇÃO. Seja o fibrado

$$\lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_k \rightarrow \mathbb{CP}(n_1) \times \dots \times \mathbb{CP}(n_k)$$

do lema anterior, onde $n_1, \dots, n_k$ é uma partição de $n - k + 1$.

O espaço fibrado projetivo complexo associado é uma $2n$ -variedade.

Por (2.05) S_{2n}^{2k} contém a classe de cobordismo de

$$\mathbb{CP}(n_1, \dots, n_k) \cup \mathbb{CP}(n_1) \times \dots \times \mathbb{CP}(n_k) \times \mathbb{CP}(k - 1)$$

e esta classe, por (2.06) é indecomponível se, e somente se,

$$\binom{n-1}{n_1} + \dots + \binom{n-1}{n_k} = 1 \text{ mod. } 2.$$

Portanto, é suficiente encontrar para cada n e k uma partição

$(n_1, \dots, n_k)$ de $n - k + 1$ tal que $\binom{n-1}{n_1} + \dots + \binom{n-1}{n_k} = 1 \text{ mod. } 2$.

Por [7], 3.3), se $n = 2^{r_1} + \dots + 2^{r_t}$, $r_1 > \dots > r_t > 0$, e $4 \leq k \leq t$, então

$$(2^{r_1} + \dots + 2^{r_{t-k+2}}, 2^{r_{t-k+3}} - 1, \dots, 2^{r_{t-1}} - 1, 2^{r_t-1} - 1, 2^{r_t-1} - 1)$$

é a partição procurada. Se $n = 2^{r_1} + \dots + 2^{r_t}$, onde $r_1 > \dots > r_t = 0$ e existe um i , $2 \leq i \leq t$, tal que $r_{i-1} > r_i + 1$, e $4 \leq k \leq t$, então

$$(2^{r_1} - 2, 2^{r_2} - 1, \dots, 2^{r_{k-2}} - 1, 2^{r_{k-1}} + \dots + 2^{r_{t-1}}, 1)$$

é a partição procurada.

CONJUNTO DE PONTOS FIXOS E O FIBRADO NORMAL

PROPOSIÇÃO 2.08. Se M^{2n} é uma variedade fechada não bordo, então para $k \geq 1$ não existe variedade com ação semi-livre de S^1 $(V^{2(n+k)}, T)$ fixando $\eta^k \rightarrow M^{2n}$ com η^k fibrado trivial complexo.

DEMONSTRAÇÃO. Supondo $\eta^k \rightarrow M^{2n}$ trivial temos:

$$\bar{J}(\eta^k \rightarrow M^{2n}) = [M^{2n}] \theta^n + \text{pot. } > \text{ de } \theta.$$

Como $[M^{2n}] \neq 0$, não existe $(V^{2(n+k)}, T)$ com conjunto de pontos fixos $(\eta^k \rightarrow M^n)$, pois caso contrário teríamos:

$$\bar{J}(\eta^k \rightarrow M^{2n}) = [V^{2(n+k)}] \theta^{n+k} + \text{pot. } > \text{ de } \theta.$$

PROPOSIÇÃO 2.09. Suponha que (M^{2n}, T) é uma ação semi-livre de S^1 em uma variedade fechada, e que F^{2n} é a união das componentes $2m$ -dimensionais do conjunto de pontos fixos de T . Se as classes de Whitney do fibrado normal a F^{2m} são triviais, para todo $0 \leq m \leq n-1$, então $[F^{2m}] = 0$ para $0 \leq m \leq n-1$ e $[M^{2n}] = [F^{2n}]$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja o fibrado normal $\xi_m : E_m \rightarrow F^{2m}$, $0 \leq m \leq n-1$. Como as classes de Whitney de ξ são triviais, então ξ_m é

bordante em $N_{2m}(BU(n-m))$ ao fibrado complexo trivial. Assim,

$$\bar{J}(\Sigma \xi_m) = \Sigma \bar{J}(\xi_m) = \Sigma [F^{2m}] \theta^m.$$

Mas como,

$$\bar{J}(\Sigma \xi_m) = \bar{J}(M^{2n}, T) = [M^{2n}] \theta^n + \text{pot. } > \text{ de } \theta,$$

então devemos ter $[F^{2m}] = 0$ para $0 \leq m \leq n-1$ e $[F^{2n}] = [M^{2n}]$.

PROPOSIÇÃO 2.10. Se existe uma ação semi-livre de S^1 (V^6, T) com conjunto de pontos fixos M^2 então $[M^2]$ é bordo.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $1, v_1, v_2$ as classes de Chern módulo 2 de $v^2 \rightarrow M^2$ (fibrado normal complexo), portanto $v_2 \in H^4(M^2) = 0$. Assim, $v_i = 0$ para $i > 1$. Portanto existe $\gamma^1 \rightarrow N^2$ tal que $[\gamma^1 \oplus 1_{\mathbb{C}} \rightarrow N^2] = [v^2 \rightarrow M^2]$. Então

$$\bar{J}(\gamma^1 \rightarrow N^2) = \bar{J}(\gamma^1 \oplus 1_{\mathbb{C}} \rightarrow N^2)$$

$$= \bar{J}(v^2 \rightarrow M^2)$$

$$= [v^6] \theta^3 + \dots$$

Portanto, a classe de N^2 pertence a $S_2^2 = (0)$. Mas como $[M^2] = [N^2]$,

temos que $[M^2]$ é bordo.

PROPOSIÇÃO 2.11. $S_2^{2k} = (0)$ para $\forall k \geq 1$.

DEMONSTRAÇÃO. Segue imediatamente de (2.04) e (2.10).

Seja uma aplicação $f: M^n \rightarrow X$ onde M^n é uma variedade fechada. Seja $h^m \in H^m(X; \mathbb{Z}_2)$ uma classe de cohomologia de X . Para toda partição $i_1 + \dots + i_k = n - m$, o número

$$\langle w_{i_1} \dots w_{i_k} f^*(h^m), \sigma_n \rangle \in \mathbb{Z}_2.$$

onde w_i 's são classes de Stiefel-Whitney de M^n , e $\sigma_n \in H_n(M^n; \mathbb{Z}_2)$ é a classe fundamental, está definido. Chamamos este número um número de Whitney da aplicação f associado com h^m .

TEOREMA 2.12. Se $f: M^n \rightarrow X$ é uma variedade singular não orientada em um CW complexo X , então $[M^n, f] = 0$ se, e somente se, todos os números de Whitney de $[M^n, f]$ são nulos. (Veja [11], 17.2).

Seja $[M^n, S] \in N_n(S^1)$, então $M^n \rightarrow M^n/S$ é um S^1 -fibrado principal, logo existe uma aplicação $f: M^n/S \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ classificando este fibrado, única a menos de homotopia. Agora $H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$ é uma álgebra polinomial com um gerador de dimensão 2 denotado

por c . Existe $f^*(c) \in H^2(M^n/S; \mathbb{Z}_2)$, que será chamado classe característica da ação semi-livre. Portanto,

TEOREMA 2.13. A classe de bordismo $[M^n, T]$ em $N_n(S^1)$ de uma ação semi-livre de S^1 em uma variedade fechada é univocamente determinada pelos inteiros módulo 2 $\langle w_{i_1} \dots w_{i_k} c^m, \sigma_n \rangle$ onde w_i são as classes de Stiefel-Whitney de M^n/S , $\sigma_n \in H_n(M^n/S; \mathbb{Z}_2)$ é a classe fundamental de M^n/S , e $i_1 + \dots + i_k = n - m$. Estes números são os números de Whitney da ação semi-livre.

PROPOSIÇÃO 2.14. Seja $\xi : E \rightarrow V^{2m}$ um fibrado complexo k -dimensional sobre uma variedade conexa V^{2m} , onde todas as classes de Stiefel-Whitney de V^{2m} são triviais. Então se $[S(\xi), S]$ é bordo em $N_{2m+2k-1}(S^1)$, ξ é bordante em $N_{2m}(BU_k)$ a um fibrado complexo trivial.

DEMONSTRAÇÃO. Como $[S(\xi), S]$ é bordo, todos os números de Whitney desta ação livre são nulos. Mostraremos que para qualquer partição $r = i_1 + \dots + i_j$

$$p^*(v_{i_1} \dots v_{i_j}) c^{m+k-1-r} = 0 \quad \text{em} \quad H^*(CP(\xi), \mathbb{Z}_2)$$

onde v_i 's são as classes de Whitney de ξ , $c \in H^2(CP(\xi); \mathbb{Z}_2)$ e $p^* : H^*(V^{2m}, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(CP(\xi), \mathbb{Z}_2)$. Para $r = 0$, $c^{m+k-1} = 0$, desde que $\langle c^{m+k-1}, \sigma_{m+k-1} \rangle = 0$ e $CP(\xi)$ é conexa. Supondo que

tenha sido provado para $r < r_0$, vamos provar que vale para r_0 . Escolha uma partição $r_0 = i_1 + \dots + i_j$, então

$$W_{i_1} \dots W_{i_j} c^{m+k-1-r_0} = 0$$

onde os W_i s são as classes de Stiefel-Whitney de $\mathbb{CP}(\xi)$. A classe total de Stiefel-Whitney da $(2m+2k-1)$ -variedade $\mathbb{CP}(\xi)$ é:

$$W = \left(\sum_0^{2m} p^*(w_j) \right) \left(\sum_0^k p^*(v_j) (1+c)^{k-j} \right)$$

onde $1, w_1, \dots, w_m$ são as classes de Stiefel-Whitney de V^{2m} . Como as classes de Stiefel-Whitney de V^{2m} são triviais temos que

$$\left(\sum_0^{2m} p^*(w_j) \right) = 1.$$

Portanto,

$$W = (1+c)^k + p^*(v_1)(1+c)^{k-1} + p^*(v_2)(1+c)^{k-2} + \dots + p^*(v_k).$$

Assim,

$$W_i = \binom{k}{i} c^i + \binom{k-1}{i-1} c^{i-1} p^*(v_1) + \dots + p^*(v_i).$$

Então,

$$w_{i_1} \dots w_{i_j} c^{m-k-l-r_0} = p^*(v_{i_1} \dots v_{i_j}) c^{m+k-l-r_0} +$$

+ termos envolvendo termos com pot. > de c.

Pela hipótese de indução, temos que

$$p^*(v_{i_1} \dots v_{i_s}) c^{m+k-l-r} = 0 \quad \text{para } r < r_0.$$

Portanto,

$$p^*(v_{i_1} \dots v_{i_j}) c^{m+k-l-r_0} = 0.$$

Para $r_0 = m$, temos

$$p^*(v_{i_1} \dots v_{i_j}) c^{k-l} = 0$$

para toda partição de m , o que implica que $v_{i_1} \dots v_{i_j} = 0$.

Portanto, todos os números de Whitney de ξ são nulos. Assim ξ é bordante a um fibrado complexo trivial.

PROPOSIÇÃO 2.15. Seja (M^{2n}, T) uma ação semi-livre de S^1 em uma $2n$ -variedade fechada, e seja o conjunto de pontos fixos F^{2k} de T uma $2k$ -variedade conexa. Se todas as classes de Stiefel-Whitney de F^{2k} são nulas, então $[M^{2n}] = 0$.

DEMONSTRAÇÃO. Como $\partial_j [M, T] = [S(\xi), S] = 0$ em $N_{2m}(BU_K)$, então

pelo resultado anterior o fibrado normal a F^{2k} é trivial. Portanto,

$$\bar{J}(\xi \rightarrow F^{2k}) = [F^{2k}] \theta^k = 0$$

pois, F^{2k} é bordo. Como também

$$\bar{J}(M^{2n}, T) = [M^{2n}] \theta^n + \text{pot. } > \text{ de } \theta,$$

devemos ter $[M^{2n}] = 0$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ALEXANDER, J. C.: The bordism ring of manifold with involutions. Proc. Amer. Math. Soc. 31(1972), 536 - 542.
- [2] BOARDMAN, J. M.: On manifolds with involution. Bull. Amer. Math. Soc. 73(1967), 136 - 138.
- [3] BOARDMAN, J. M.: Cobordism of involutions revisited. Lecture Notes in Math. N° 298, Springer-Verlag, Berlin (1972), 131 - 151.
- [4] BREDON, G. E.: "Introduction to compact transformation groups". Academic Press, New York and London, 1972.
- [5] CAPOBIANCO, F. L.: Involutions and semi-free S^1 -actions. Thesis, University of Virginia, 1975.
- [6] CAPOBIANCO, F. L.: Manifolds with involution whose fixed set has codimension four. Proc. Amer. Math. Soc. 61 (1976), 157 - 162.
- [7] CAPOBIANCO, F. L.: Fixed sets of involutions. Pacific J. Math. 75(1978), 339 - 345.
- [8] CONNER, P. E.: Lectures on Boardman's theory, (mimeographed notes), University of Virginia, 1966.
- [9] CONNER, P. E.: The Bordism class of a Bundle Space. Mich. Math. Journal, 14(1967), 289 - 303.
- [10] CONNER, P. E. and FLOYD, E. E.: Differentiable periodic maps. Bull. Amer. Math. Soc. 68(1962), 76 - 86.

- [11] CONNER, P. E. and FLOYD, E. E.: "Differentiable Periodic Maps". Springer-Verlag, Berlin and New York, 1964.
- [12] CONNER, P. E. and FLOYD, E. E.: Fibring within a Cobordism class. Michigan Math. Journal, 12(1965), 33 - 47.
- [13] KIIHL, J.C.S. e RODRIGUES, C.I.: O anel de bordismo de involuções e conjuntos de pontos fixos. Relatório Técnico Nº 39/87, IMECC-UNICAMP, 1987.
- [14] KIIHL, J. C. S.: Bordismo de involuções. Atas do 10º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1975.
- [15] KIIHL, J. C. S.: On a dual submanifold homomorphism. Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, Serie II, Tomo XXIX (1980), 411 - 419.
- [16] KIIHL, J. C. S.: Bordismo e Involuções. Universidade de Campinas, 1985.
- [17] MILNOR, J. W. and STASHEFF, J. D.: "Characteristic Classes". Ann. of Math. Studies Nº 76, Princeton Univ., Press, Princeton, New Jersey, 1974.
- [18] OSSA, E.: Fixpunktfreie S^1 -Aktionen. Math. Ann. 186(1970), 45 - 52.
- [19] SHIMADA, N. and WU, C. M.: Bordism algebras of periodic transformations. Osaka J. Math. 10(1973), 25 - 32.
- [20] STONG, R. E.: Unoriented Bordism and Actions of finite Groups. Memoirs of the AMS, Nº 103, 1970.

RELATORIOS TÉCNICOS — 1987

- [21] STONG, R. E.: On fibering of cobordism classes. Trans. Amer. Math. Soc. 178(1973), 431 - 447.
- [22] UCHIDA, F.: Bordism algebra of involutions. Proc. Japan Acad. 46(1970), 615 - 619.
- [23] UCHIDA, F.: Cobordism groups of semi-free S^1 and S^3 -actions. Osaka J. Math. 7(1970), 345 - 351.