# ELETRODINÂMICA:
# FORMALISMO DA ÁLGEBRA DE CLIFFORD

*José Ricardo de Resende Zeni*
e
*Waldyr Alves Rodrigues Jr.*

**RELATÓRIO TÉCNICO Nº 21/87**

**RESUMO:** A intenção deste trabalho é divulgar o esquema algébrico desenvolvido por David Hestenes para trabalhar as álgebras de Clifford. Assim, esperamos que a formulação da teoria Eletrodinâmica através desse esquema sirva para destacar os êxitos do mesmo. Em particular, devemos contrastar a formulação feita neste trabalho com a formulação tensorial da Eletrodinâmica e observar dois fatos marcantes: (1) a linguagem apresentada é intrínseca; (2) ela permite uma transposição rigorosa entre a formulação relativista, sediada no $\mathbb{R}^{1,3}$, e a formulação vetorial, sediada no $\mathbb{R}^3$. Nas formulações usuais os elementos da formulação vetorial são identificados "à dedo" com elementos da formulação tensorial.

Além da simplicidade computacional e da força de expressão de seus elementos, devemos destacar também o poderio de tal linguagem, demonstrado na obtenção das Leis de Conservação diretamente da Equação de Maxwell.

Por fim, num "ato de fé", acreditamos que o desenvolvimento desta linguagem pode ser comparado ao surgimento do cálculo vetorial, introduzido nos fins do século passado por Gibbs. Assim, esperamos que tal linguagem além de propiciar um alargamento dos horizontes teóricos, seja também acessível a estudantes que estejam terminando a graduação, fornecendo "ferramentas" poderosas para a formulação e investigação das teorias físicas e matemáticas.

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação
IMECC – UNICAMP
Caixa Postal 6065
13.081 - Campinas, SP
BRASIL



**Junho – 1987**

# ELETRODINÂMICA: FORMALISMO DA ÁLGEBRA DE CLIFFORD

Palavras chaves: Álgebras de Clifford, Equações de Maxwell, Campos Relativistas, Leis de Conservação (Diferenciais).

Apresentação: As álgebras de Clifford oferecem um instrumental simples e poderoso para a formulação de várias teorias físicas, compatibilizando dois aspectos que acreditamos serem os mais saudáveis para a fundação de uma teoria: poucas expressões primitivas, condensando muitas informações, e simplicidade nos cálculos para obtermos as informações. Neste trabalho apresentamos os resultados obtidos para a teoria Eletrodinâmica. Os principais resultados teóricos das formulações usuais da Eletrodinâmica são obtidos sem dificuldade, apresentando expressões simples e significativas.

## §1. REVISÃO DO ESQUEMA ALGÉBRICO

A construção das álgebras de Clifford é assentada na natureza dual de seus números: um número de Clifford representa tanto um operando quanto um operador que transforma um número em outro. Além do mais, tanto o número em si quanto as operações existentes dentro da álgebra são passiveis de uma significativa interpretação geométrica.

O caráter geométrico das álgebras de Clifford é realçado pelo esquema algébrico desenvolvido por David Hestenes (ver Zn, He e HS) aqui adotado, que introduz generalizações dos produtos interno e exterior para operações entre diferentes objetos da álgebra. As álgebras de Clifford ($C_n$) são álgebras associativas associadas a espaços vetoriais ($V_n$) munidos de produto interno. O produto de Clifford é aqui denominado produto geométrico. Temos dois resultados básicos para a construção do edifício teórico.

Estrutura dos números de Clifford: qualquer número de Clifford pode ser escrito como uma soma sobre multivetores de diferentes graduações, os quais são linearmente independente entre si (aqui denominamos por multivetor um número de Clifford de graduação homogênea). Um r-vetor (multivetor de graduação igual a r) tem como forma geral uma soma sobre r-lâminas. As lâminas são os objetos fundamentais da álgebra. Uma r-lâmina é formada pelo produto geométrico de r vetores ortogonais entre si.

Estrutura do Produto Geométrico: o produto geométrico entre dois vetores quaisquer pode ser expandido como:

$$ab = a.b + a \wedge b$$

onde a.b é o produto interno usual do espaço de base ($V_n$), que é comutativo e resulta em um escalar, enquanto que $a \wedge b$ é denominado o produto exterior entre a e b, que é anticomutativo e resulta em um bivetor.

A partir desta formula podemos desenvolver o produto geométrico entre quaisquer elementos da álgebra usando a associatividade do produto e sua linearidade (ver He, Zn ou HS). As generalizações mais ũteis exploram a decomposição do produto geométrico em parte simétrica e antisimétrica. No caso do produto geométrico (representado por justaposição) entre um vetor e um r-vetor ($A_r$), temos que:

$$vA_r = v.A_r + v \wedge A_r \text{ , onde definimos}$$

$$v.A_r = 1/2 \{vA_r - (-1)^r A_r v\} = \langle vA_r \rangle_{r-1} \text{ , e também}$$

$$v \wedge A_r = 1/2 \{vA_r + (-1)^r A_r v\} = \langle vA_r \rangle_{r+1}$$

onde $\langle \ \rangle_K$ seleciona o multivetor componente do número de graduação k. No caso de $A_r$ ser uma r-lâmina formada pelos vetores $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r$, nessa ordem, temos alternativamente que:

$$v.A_r = \Sigma_{K=1}^{r} (-1)^{k+1} (v.a_k) a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_{k+1} \ldots a_r$$

$v \wedge A_r = tA_r$, onde t é a componente do vetor v que é ortogonal a todos os vetores que compõe $A_r$ ($t.a_j = 0$, qualquer que seja j).

O produto geométrico entre dois multivetores de quaisquer graduação tem como forma geral a seguinte expressão (ver Zn ou HS):

$$A_r B_s = \langle A_r B_s \rangle_{|s-r|} + \langle A_r B_s \rangle_{|s-r|+2} + \ldots + \langle A_r B_s \rangle_{s+r-2} + \langle A_r B_s \rangle_{s+r}$$

O fato essencial é a graduação dos multivetores resultantes. Entre outros resultados, a fórmula acima mostra que o subespaço de $C_n$ gerado pelos multivetores de graduação par é fechado pelo produto geométrico, e forma uma subálgebra de $C_n$ denominada a subálgebra par de

$C_n$. Os multivetores componentes do produto $(A_r B_s)$ de graduação extrema fornecem a definição geral para os produtos interno e exterior:

$A_r.B_s = \langle A_r B_s \rangle_{|s-r|}$ , enquanto que: $A_r \wedge B_s = \langle A_r B_s \rangle_{s+r}$

Para o produto entre lâminas são válidos os seguintes resultados:

$A_r.B_s = (a_1 a_2 \ldots a_{r-1} a_r).B_s = (a_1 a_2 \ldots a_{r-1}).(a_r.B_s) = \ldots$, e assim por diante, onde consideramos $s \geq r$.

$A_r \wedge B_s = T_r B_s$ , onde $T_r$ é o r-vetor derivado de $A_r$ formado por vetores $(t_{j,s})$ que são a componente de cada fator $(a_j)$ de $A_r$ ortogonal a todos os vetores de $B_s$.

O produto exterior entre vários vetores pode ser definido como o produto geométrico entre as componentes dos vetores que são ortogonais entre si, sendo portanto equivalente a uma lâmina.

Os multivetores de maior graduação em $C_n$ são denominados pseudoescalares. O que faz os pseudoescalares receberem atenção especial é o resultado de que o produto geométrico de qualquer número da álgebra por um pseudoescalar reduz-se simplesmente ao produto interno entre os mesmos elementos. Esse resultado permite-nos definir uma dualidade entre os r-vetores e os (n-r)-vetores, denominada dualidade por pseudoescalar (ver Zn ou He).

Introduzimos agora as operações de inversão (ou conjugação) e reversão em $C_n$. As operações são lineares, e quando quadramos-as obtemos a identidade. O reverso de um número é obtido revertendo-se o produto entre os vetores que formam os multivetores componentes do número. O reverso $(A_r^\dagger)$ de um r-vetor $(A_r)$ é dado por:

$$A_r^\dagger = (-1)^{r(r+1)/2} A_r$$

A operação de inversão inverte o sentido de todos os vetores do espaço de base. O conjugado $(A_r^*)$ de um r-vetor $(A_r)$ é dado por:

$$A_r^* = (-1)^r A_r$$

## §2. ÁLGEBRAS DE PAULI E DE MINKOWSKI

A álgebra de Clifford associada ao espaço vetorial euclidiano $R^3$ é denominada álgebra de Pauli (P). Os vetores da base (ortonormal) do $R^3$ serão indicados pela letra s, e obedecem as seguintes relações:

$s_j.s_k = 0$, se $j \neq k$; e também: $s_j^2 = +1$

Uma base para P é dada por $\{1, s_j, s_{jk}, I\}$, onde $s_{jk} = s_j \wedge s_k$, e I é a unidade pseudoescalar em P, definida como:

$I = s_1 s_2 s_3 = 1/6\ \epsilon_{ijk}\ s_{ijk}$

Os pseudoescalares de P comutam com qualquer elemento de P.

O produto vetorial ($\times$) entre dois vetores do $R^3$ é definido como:

$a \times b = - I\ (a \wedge b)$

Desta definição decorrem provas simples e significativas para muitas identidades do cálculo vetorial.

A álgebra de Clifford associada ao espaço vetorial de Minkowski ($R^{1,3}$) é denominada naturalmente de álgebra de Minkowski (M) (em He é denominada, erroneamente, de álgebra de Dirac, já revisto em He2). Os vetores da base do $R^{1,3}$ serão indicados pela letra e, e satisfazem as seguintes relações:

$e_0^2 = +1\ ,\ e_j^2 = -1 \qquad e_\mu . e_\nu = 0,$ se $\mu \neq \nu$

Uma base para M é dada por $\{1, e_\mu, e_{\mu\nu}, e_{\mu\nu\gamma}, e_5\}$, onde a unidade pseudoescalar em M, indicada por $e_5$, é dada por:

$e_5 = e_0 e_1 e_2 e_3 = 1/24\ \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\ e_{\mu\nu\alpha\beta}$, onde $\epsilon^{0123} = +1$

Os pseudoescalares em M comutam (anticomutam) com multivetores de graduação par (ímpar).

A base recíproca é dada pelos versores $e^\mu$ que satisfazem:

$e^\mu e_\nu = \delta^\mu_\nu$ , então $e^0 = e_0\ ,\ e^k = - e_k$

Assim, também devemos ter: $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = e_5 e^{\mu\nu\alpha\beta}$

As álgebras de Pauli e de Minkowski são relacionadas de modo que P é a subálgebra par de M. Afim de ser consistente com as relações já estudadas, definimos a projeção de M em P como abaixo:

$e_{j0} \mapsto s_j$ , e assim segue que:

$e_{jk} \mapsto - s_{jk}$ , e também: $e_5 \mapsto I$

Os vetores e trivetores de M são projetados em P multiplicando-os por $e_0$. Por exemplo, seja v um vetor em M, então temos que:

$v e_0 \mapsto v^0 + \vec{v}$, onde $v^0$ e $\vec{v}$ são escalar e vetor, respectivamente.

Em vista da relação entre P e M, é conveniente extender a conjugação, indicada por *, existente em P para M (conjugação em M é indicada por barra sobre o número). Assim, definimos:

$A^* = e_0 A e_0$ , onde A pertence a M.

Para completar nossa exposição necessitamos introduzir operadores diferenciais sobre as variedades, espaço euclidiano e espaço-tempo da relatividade especial, cujos espaços tangentes (em qualquer ponto da variedade!) são respectivamente, os espaços vetoriais $R^3$ e $R^{1,3}$. Para trabalhar com tais operadores nos restringiremos a sistemas de coordenadas cujos versores são constantes em qualquer ponto da variedade, de modo que as operações algébricas possam ser efetuadas separadamente das operações de diferenciação (a diferenciação atua sómente nas coordenadas dos objetos, enquanto que as operações algébricas atuam sobre os elementos da base de $C_n$). Assim, definimos o operador gradiente em P ($\nabla$) e em M ($\Box$), respectivamente como abaixo:

$\nabla = s_j\partial_j$ $\qquad \Box = e^{\mu}\partial_{\mu}$

A projeção do operador $\Box$ em P é dada abaixo:

$e_0\Box \mapsto \partial_0 + \nabla$

Devemos observar que a projeção acima viola a convenção anterior para a projeção de vetores de M em P. Assim deve ser, por causa da base recíproca que em P é igual a base natural, e em M não.

O operador gradiente ao quadrado é um escalar. Em M ele representa o operador da equação de onda, e em P representa o laplaciano, sendo relacionados como se segue: $\Box^2 = \partial_0^2 - \nabla^2$

## §3. ELETRODINÂMICA

Utilizamos a representação usual para os campos elétrico e magnético, E e B: eles são vetores em P, devendo assim, ser representados por bivetores em M, tendo sómente componentes temporais, isto é:

$\vec{E} = E^j s_j$ , $\quad \vec{B} = B^j s_j$ , em P, enquanto que

$E = E^{j0} e_{j0}$ , $\quad B = B^{j0} e_{j0}$ , em M, onde as coordenadas contravariantes (superíndices) em M são iguais as coordenadas em P.

Ao invés de trabalhar diretamente com os campos E e B em M, é conveniente trabalhar com o bivetor de campo (F), dado por:

$F = E + e_5B$ , cujas componentes temporais são as componentes de E, e as componentes espaciais são as componentes de B, isto é:

$F^{j0} = E^{j0}$ $\qquad F^{jk} = \epsilon_{jik}B^{i0}$ $\qquad (F^{\mu\nu} = - F^{\nu\mu})$

É por vezes conveniente utilizarmos objetos derivados de F a partir das operações anteriormente definidas dentro da álgebra. Entre eles destacam-se o conjugado espacial (F*) e o dual (D), dados por:

$F^* = - E + e_5B$ , enquanto que: $D = e_5F = Fe_5 = - B + e_5E$

Explicitamente, as componentes de D são dadas por:

$D^{\mu\nu} = 1/2\ \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\beta\alpha}$

Assim, os campos E e B podem ser expressos em termos de F e F*
como mostrado abaixo:

$E = 1/2\ (F - F^*)$ , enquanto que: $B = -1/2\ e_5(F + F^*)$

O vetor corrente (J) em M engloba a densidade de carga e o vetor corrente em P, e é dado por:

$J = J^0 e_0 + J^k e_k$ , ou: $Je_0 \mapsto \rho + \vec{J}$ $(\rho = J^0)$.

Antes de prosseguirmos devemos destacar um dos maiores êxitos da álgebra de Clifford: todos os elementos da álgebra transformam-se do mesmo modo quando efetuamos uma transformação de coordenadas no espaço de base, $V_n$ (de outra forma não teria sentido somarmos multivetores de diferentes graduações). Este não é o caso do cálculo tensorial, onde as coordenadas dos tensores de diferentes graus ('rank') comportam-se distintamente em relação a transformação de coordenadas.

Podemos escrever uma transformação de coordenadas dentro da álgebra de Clifford sob a seguinte forma (ver He ou Gr):

$e'_\mu = £^{-1} e_\mu £$ , onde: $£^{-1}£ = ££^{-1} = 1$

Nesta representação é imediato verificar que qualquer elemento da álgebra transforma-se do mesmo modo, quando efetuamos uma transformação de coordenada. Considere por exemplo um elemento da base dos bivetores, $e_{\mu\nu} = e_\mu e_\nu$ . O elemento transformado, $e'_{\mu\nu}$ , é dado por:

$e'_{\mu\nu} = e'_\mu e'_\nu = £^{-1} e_{\mu\nu} £$ , como queriamos demonstrar.

Este resultado implica que as equações da Eletrodinâmica obtidas pelo formalismo da álgebra de Clifford são invariantes na forma quando passamos de um referencial inercial para outro, mesmo que nossas equações envolvam multivetores de diferentes graduações; ou seja, a formulação aqui obtida é covariante.

Em particular, as transformações de Lorentz (próprias e homogêneas) são geradas por bivetores, sendo os operadores da transformação ( £) formados sómente por multivetores de graduação par. Então, $F^2$ representa os invariantes do campo eletromagnético, pois $F^2$ tem sómente componentes escalares e pseudoescalares (note que os pseudoescalares comutam com multivetores de graduação par!), dadas por:

$\langle FF \rangle_0 = F.F = 1/2\ F^{\mu\nu} F_{\nu\mu}$

$\langle FF \rangle_4 = F \wedge F = 1/4\ F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} e_{\mu\nu\alpha\beta} = -\ 1/4\ F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} e_5 \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$

ou de outra forma, os invariantes do campo eletromagnético são:

$F^{\mu\nu} F_{\nu\mu}$ , e também: $F^{\mu\nu} D_{\nu\mu}$

Os axiomas da teoria eletrodinâmica, formulados por Maxwell, assumem em M uma expressão simples, dada por uma simples equação:

$$\square F = J$$

A expansão do produto geométrico envolvendo o operador gradiente nos produtos interno e exterior leva as seguintes equações para F:

$$\square . F = J \text{ , enquanto que } \quad \square \wedge F = 0$$

Quando multiplicamos a equação de Maxwell por $e_5$ , obtemos:

$$\square D = - e_5 J \text{ , ou equivalentemente: } \square . D = 0 \text{ , e } \quad \square \wedge D = -e_5 J.$$

A equação para a divergência do dual (D) é equivalente a equação para o rotacional de F, e vice-versa. Quando expressas por componentes as equações acima resultam ser as mesmas encontradas na formulação tensorial.

A projeção da equação de Maxwell em P é imediata, desde que F é um bivetor, e assim temos que:

$$e_0 \quad \square F = e_0 J \mapsto (\partial_0 + \nabla)(\vec{E} + I\vec{B}) = \rho - \vec{J}$$

Após desenvolvermos o produto geométrico envolvendo o operador gradiente (note que $\nabla(I\vec{B}) = I \nabla \vec{B}$), e equacionarmos separadamente multivetores de mesma graduação, encontramos a forma vetorial das equações de Maxwell, esquematicamente temos que:

| | | |
|---|---|---|
| $\nabla . \vec{E} = \rho$ | | parte escalar |
| $\partial_0 \vec{E} + I(\nabla \wedge \vec{B}) = - \vec{J}$ | (ou, $\nabla X \vec{B} = \vec{J} + \partial_0 \vec{E}$) | parte vetor |
| $\nabla \wedge \vec{E} + I \partial_0 \vec{B} = 0$ | (ou, $\nabla X \vec{E} = -\partial_0 \vec{B}$) | parte bivetor |
| $I(\nabla . \vec{B}) = 0$ | (ou $\nabla . \vec{B} = 0$) | parte pseudoescalar |

Nossas equações devem ser iguais as equações escritas no sistema de unidades CGS, a menos de fatores de $4\pi$ . Consideramos também a velocidade da luz igual a unidade.

Podemos obter diretamente da equação de Maxwell em M a equação de continuidade para o vetor corrente, assim como estabelecer a equação de onda para as componentes do bivetor de campo (que nos permite o desenvolvimento dos campos E e B, em P, em multipolos vetoriais). Para isso aplicamos à equação de Maxwell ( $\square F = J$) novamente o operador gradiente, resultando em:

$$\square^2 F = \square J \text{ , e desde que } \square^2 \text{ é um escalar, devemos ter:}$$

$$\square^2 F = \square \wedge J \text{ , enquanto que } \quad \square . J = 0 \quad (\text{ou, } \partial_0 \rho + \nabla . \vec{J} = 0).$$

A teoria de potenciais para o campo eletromagnético pode ser desenvolvida notando que o objeto básico em M é um bivetor e tem rotacional nulo. Então, o bivetor F pode ser escrito como o rotacional de um vetor, denominado vetor potencial (A) em M, isto é:

$$\Box\wedge F = 0, \text{ se e somente se: } F = \Box\wedge A$$

A equação satisfeita pelo potencial é dada por:

$$\Box.(\Box\wedge A) = \Box^2 A - \Box(\Box.A) = J$$

Notamos que a alteração do potencial pela adição do gradiente de uma função escalar (função de calibre) não altera o bivetor de campo. Assim, podemos aproveitar a liberdade oferecida na construção dos potenciais para facilitar a equação satisfeita pelos mesmos.

Os potenciais que tem divergência nula (em M) pertencem ao calibre de Lorentz, e satisfazem a equação de onda desacoplada por componente, isto é:

$$\text{se } \Box.A = 0 \text{ , então: } \Box^2 A = J$$

Uma solução da equação de Maxwell em termos dos potenciais sempre pode ser escrita no calibre de Lorentz efetuando-se uma transformação dee calibre sobre um potencial solução qualquer (A), onde a função de calibre ($\psi$) satisfaz:

$\Box^2\psi = - \Box.A$ , então se: $A' = A + \Box\psi$ , $A'$ gera o mesmo campo eletromagnético que A e pertence ao calibre de Lorentz.

O calibre de Coulomb é formado pelos potenciais cujas componente vetor em P tem divergência espacial nula. A equação em M para o potencial fica:

$$\Box^2 A - \Box(\partial_0\Phi) = J, \text{ se } \Box.A = \partial_0\Phi \quad (\text{onde: } Ae_0 \mapsto \Phi + \vec{A})$$

Quando projetamos a equação acima em P temos que:

$$\nabla^2\Phi = - \rho \text{ , e: } \Box^2\vec{A} = \vec{J} - \nabla(\partial_0\Phi)$$

Uma solução da equação de Maxwell sempre pode ser escrita no calibre de Coulomb efetuando uma transformação de calibre sobre uma solução qualquer (A) tal que a função de calibre ($\psi$) satisfaça:

$\nabla^2\psi = - \nabla.\vec{A}$ , então se: $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi$ , e $\Phi' = \Phi$ , $A'$ gera o mesmo campo que A e é um potencial do calibre de Coulomb.

Estudaremos agora as leis de conservação (ver Zn, He ou Gr). É interessante notar que na formulação da eletrodinâmica pela álgebra de Clifford essas leis (e consequentemente o "acoplamento" correto entre os campos e as fontes) são obtidas diretamente da equação de Maxwell, sem necessidade de postularmos alguma outra equação, tipo equação de movimento (força de Lorentz, ou formalismo lagrangeano).

Trabalhando com a equação de Maxwell e com a equação obtida desta por reversão, desenvolvemos a seguinte expressão:

$1/2\{F^{\dagger}\Box F + F^{\dagger}\Box^{\dagger}F\} = 1/2\{F^{\dagger}J + J^{\dagger}F\}$ , onde $\Box^{\dagger}$ atua sobre objetos a sua esquerda. Como $F^{\dagger} = -F$, e também $J^{\dagger} = J$, segue que:

$-1/2\{F\Box F + F\Box^{\dagger}F\} = 1/2(JF - FJ) = J.F = -F.J$

O produto interno F.J é identificado com o vetor força de Lorentz relativista, cujas componentes são mais fácilmente reconhecidas em P:

$Qe_0 = 1/2(FJ - JF)e_0 = 1/2(FJe_0 - Je_0F^*) \mapsto W + \vec{Q}$

onde $W = \vec{J}.\vec{E}$, e $\vec{Q} = \rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B}$, são reconhecidos como o trabalho efetuado pelo campo sobre as fontes, e a força aplicada sobre as fontes.

Na equação de conservação, o termo à esquerda reduz-se a forma $\partial_\mu S^\mu$,onde $S^\mu = -1/2\ Fe^\mu F$. É imediato verificar que $S^{\mu\dagger} = S^\mu$ , e que $\overline{S^\mu} = -S^\mu$ . Os únicos objetos em M que se comportam desse modo sobre inversão $(^{-})$ e reversão $(\dagger)$ no espaço-tempo são vetores, e portanto somos obrigados a concluir que os $S^\mu$ são vetores.

A lei de conservação acima obtida quando explicitada por componentes é dada por:

$\partial_\mu S^{\mu\nu} = -Q^\nu = -F^{\nu\mu}J_\mu$

Uma forma mais conhecida desta equação pode ser obtida explorando a simetria entre as componentes dos vetores $S^\mu$ , isto é, $S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$ (observe que $S^{\mu\nu}$ é a parte escalar de $-1/2\ Fe^\mu Fe^\nu$). Assim, podemos escrever a lei de conservação como:

$\partial_\nu S^{\mu\nu} = -Q^\mu$ , ou $\Box.S^\mu = -Q^\mu$

A componente temporal expressa a conservação da energia, e as componentes espaciais expressam a conservação do momento linear associado aos campos e fontes, conforme a identificação das componentes dos vetores $S^\mu$ feita a seguir. A expressão para as componentes dos vetores $S^\mu$ pode ser obtida adotando-se o seguinte procedimento:

$S^0 = -1/2\ Fe^0Fe_0e_0 = -1/2\ FF^*\ e_0$ . Assim, temos que:

$S^0e_0 \mapsto U + \vec{S}^0$, onde $U = 1/2(E^2 + B^2)$, e $\vec{S}^0 = \vec{E}\times\vec{B}$, são identificados com a densidade de energia do campo eletromagnético e com o vetor de Poynting (este representa o momento linear do campo eletromagnético), respectivamente.

Analogamente, as componentes dos vetores (em M) $S^j$ são obtidas escrevendo:

$S^j = 1/2\ Fe^jFe_je_j$ , onde não devemos somar sobre o índice j.

Prosseguimos notando que: $e^j F e_j = E - e_5 B - 2(E^{j0} - e_5 B^{j0}) e_{j0}$ .
Trabalhando sòmente com a parte vetor da expressão acima, segue que:

$S^j e_0 \mapsto S^{j0} + \vec{S}^j$ , onde as componentes dos vetores (em P) $\vec{S}^j$ são identificadas com as componentes do tensor das tensões de Maxwell:

$S^{jk} = U\delta^{jk} - 2(E^j E^k + B^j B^k)$

Por fim discutiremos a lei de conservação para o momento angular. O momento angular relativista associado ao campo eletromagnético é expresso em M por quatro bivetores ($M^\gamma$ ) dados por:

$M^\gamma = S^\gamma \wedge x$ , onde x é o vetor posição em M ($xe_0 \mapsto t + \vec{x}$).

Para facilitar a representação dos bivetores $M^\gamma$ , projetamos-os em P e escrevemos o resultado da projeção como se segue:

$M^\gamma \mapsto \vec{M}^\gamma + I\vec{N}^\gamma$, onde os vetores $\vec{M}^\gamma$e $\vec{N}^\gamma$são dados por:

$\vec{M}^\gamma = t\vec{S}^\gamma - S^{\gamma 0}\vec{x}$ $\qquad\qquad$ $\vec{N}^\gamma = \vec{x} \times \vec{S}^\gamma$

O vetor $\vec{N}^0$ é o momento angular do campo eletromagnético (momento do vetor de Poynting).

A lei de conservação para o momento angular relativista é obtida notando que $\partial_\gamma x = e_\gamma$, e por outro lado, temos que $S^\gamma \wedge e_\gamma = 0$, desde que $S^{\gamma\mu} = S^{\mu\gamma}$. Então, temos que:

$\partial_\gamma M^\gamma = \partial_\gamma (S^\gamma \wedge x) = (\partial_\gamma S^\gamma) \wedge x = - Q \wedge x$

O último termo engloba o torque sobre as fontes causado pelo campo e mais um vetor (em P) relacionado com o centro de massa relativista do sistema campo-fontes. Sua projeção em P é direta:

$Q \wedge x \mapsto \vec{R} + I\vec{T}$, onde temos que:

$\vec{R} = t\vec{Q} - W\vec{x}$ $\qquad\qquad$ $\vec{T} = \vec{x} \times \vec{Q}$

Com a notação acima definida, a lei de conservação para o momento angular relativista (que em M é uma equação em bivetor!) é melhor representada em P por duas equações vetoriais, a saber:

$\partial_\gamma \vec{M}^\gamma = - \vec{R}$ $\qquad\qquad$ $\partial_\gamma \vec{N}^\gamma = - \vec{T}$

A primeira destas equações expressa a conservação do centro de massa e a segunda expressa a conservação do momento angular do sistema campos-fontes.

**Conclusão:** a simplicidade nos cálculos e expressões é possível porque utilizamos uma linguagem intrínseca para os objetos, ao invés de trabalhar sòmente com as coordenadas, como é feito usualmente no cálculo tensorial (onde os índices causam um rebuscamento por vezes imemoriável das expressões, vide por exemplo a expressão para o tensor energia-momento do campo). Manifestamente, alguns leitores gostam de poder se referir as operações da álgebra (e principalmente aos operadores de diferenciação) por nomes comuns do cálculo vetorial (diferencial) elementar. Também a utilização de operações da álgebra fornece métodos simples e gerais para efetuarmos os cálculos e "explorarmos" as expressões.

**Agradecimentos:** Dirijo meus agradecimentos em especial ao grupo de Fisíca-Matemática (sediado no IMECC/UNICAMP) pelo ambiente propício a realização de tais estudos, em particular ao Prof. Márcio Rosa e ao Prof. Dr. Waldyr Rodrigues pelas sugestões e atenção dedicada no decorrer deste trabalho. Sou grato também a FAPESP pelo suporte financeiro a mim concedido, quando da apresentação do projeto de tese, e ao Instituto de Fisíca da UNICAMP(IFGW)*, pelos incentivos que tem prestado a minha pessoa.

*O autor é aluno de Pós Graduação do IFGW

**Bibliografia:**

(Zn) Zeni, J. Ricardo R. - Tese de Mestrado, IFGW - UNICAMP.

(He) Hestenes, David - "Space-time algebras", Ed. Gordon & Breach, 1966.

(He2) Hestenes, D. - "Clifford Algebra and the interpretation of Quantum Mechanics"

(He3) Hestenes, D. - "A Unified Language for Mathematics and Physics"
Estes dois artigos de Hestenes (He2 e He3) estão publicados em J.S.Chisholm and A.K.Common (editores), "Clifford Algebra and their aplications in Mathematical Physics", Ed. D. Reidel Publ. & Company (1986). Estes artigos são provenientes da First International Conference on Clifford Algebra (1985), realizada na Inglaterra.

(HS) D. Hestenes & G. Sobczyk - "Clifford Algebra to Geometric Calculus", Ed. D. Reidel Publ. & Cia, 1984.

(Gr) Greider, K. R. - "A unifyng Clifford Algebra Formalism for Relativistic Fields", Found. of Phys., vol 14, nº 6, pg 467/506, 1984.

(SW) N.A. Salingaros & G.P. Wene - "The Clifford Algebra of Differential Forms", Acta Aplicandae Mathematicae, vol 4, pgs 271/292, 1985.