EQUAÇÕES ALGÉBRICAS – UMA REVISÃO

E. Capelas Oliveira

RELATÓRIO TÉCNICO Nº 16/87

RESUMO. Através de processos de fatoração discute-se as fórmulas resolutivas para equações algébricas com coeficientes constantes, até quarto grau, a partir de suas equações resolventes.

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação
IMECC – UNICAMP
Caixa Postal 6065
13.081 – Campinas, SP
BRASIL

Abril – 1987

1.) INTRODUÇÃO

Ao procurarmos as raízes de um polinômio, de uma só variável, com coeficientes constantes, de grau n

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_o$$

onde $a_n \neq 0$ nos deparamos sempre com uma equação algébrica do tipo

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_o + a_1 x^1 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = 0$$

sendo os a_i's os coeficientes, e, para $a_n \neq 0$ a equação é chamada equação algébrica de grau n com coeficientes constantes.

O teorema fundamental da álgebra afirma:
"Toda equação algébrica de grau maior que zero, com coeficientes constantes, no corpo dos números complexos, admite solução, em $\mathbb{C}$", ou, equivalentemente, "$\mathbb{C}$ é um corpo algebricamente fechado", foi provado por Gauss (1777-1855). Nesta revisão apresenta-se e discute-se as fórmulas resolutivas para equações algébricas, com coeficientes constantes, expressas em termos de radicais,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$$

com $n = 1,2,3,4$, uma vez que Abel (1802-1829) e Galois (1811-1832) provaram não existir fórmulas resolutivas, em termos de radicais, para equações algébricas de grau maior ou igual a cinco, exceto em casos particulares.

2.) EQUAÇÕES DO 1º GRAU

Toda equação do 1º grau de uma só variável, com coeficientes constantes, pode ser reduzida à forma

$$\sum_{i=0}^{1} a_i x^i = a_o + a_1 x = 0$$

onde a_o e a_1 são os coeficientes, pertencentes ao corpo dos números complexos.

A solução desta equação é dada por

$$x = -\frac{a_o}{a_1}$$

onde $a_1 \neq 0$. No caso em que $a_1 = 0$ temos uma equação de grau zero e o teorema fundamental da álgebra não se aplica. Neste caso temos

$$a_1 = 0 \begin{cases} a_o = 0 & \text{identidade} \\ a_o \neq 0 & \text{incongruência} \end{cases} \quad \text{ou}$$

3.) EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Uma equação do 2º grau, em sua forma mais geral, é dada por

3.1 $$\sum_{i=0}^{2} a_i x^i = a_o + a_1 x + a_2 x^2 = 0$$

onde os coeficientes a_i's pertencem ao corpo dos números complexos, com $a_2 \neq 0$. O caso em que $a_2 = 0$ recaimos no caso discutido anteriormente.

Discutiremos, então, o caso em que o coeficiente $a_2 \neq 0$. Para obter a solução usaremos um processo de fatoração, a saber, recairemos numa equação de 1º grau, que é chamada de resolvente para a equação do 2º grau.

Multiplicando-se a Eq. (3.1) por $4a_2$ e adicionando-se a_1^2 em ambos os membros obtém-se

$$4a_2^2x^2 + 4a_2a_1x + a_1^2 = a_1^2 - 4a_2a_o.$$

O primeiro membro desta equação é um quadrado perfeito, logo, extraindo-se a raiz quadrada de ambos os membros obtém-se

$$2a_2x + a_1 = \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_o}$$

que nada mais é que uma equação do 1º grau - resolvente , para a equação do 2º grau - cuja solução é

$$x = \frac{1}{2a_2} (-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_o})$$

onde o sinal (±) indica que temos duas soluções. Note-se que se $a_1^2 - 4a_2a_o \geq 0$ as raízes são reais, caso contrário, complexas conjugadas.

4.) EQUAÇÕES DO 3º GRAU

A fórmula resolutiva, em termos de radicais, de uma equação do 3º grau, com coeficientes constantes, obtida primeiramente por Cardan (1501-1576), requer um pouco mais de álgebra.

Vamos escrever a equação do 3º grau,em sua forma mais geral, numa equação do 3º grau incompleta para, então, utilizarmos o processo de fatoração-resolvente.

A forma mais geral de uma equação do 3º grau é

$$\sum_{i=0}^{3} a_i x^i = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0 \tag{4.1}$$

com $a_3 \neq 0$. Quando $a_3 = 0$ recaimos em um dos casos anteriores, dependendo dos outros coeficientes.

Uma vez que $a_3 \neq 0$ podemos dividir a eq.(4.1) por a_3, para obter uma equação de 3º grau numa forma mais conveniente. Sendo

$$p = \frac{a_2}{a_3} \qquad q = \frac{a_1}{a_3} \qquad \text{e} \qquad r = \frac{a_o}{a_3}$$

obtemos a seguinte equação.

4.2 $$x^3 + px^2 + qx + r = 0 .$$

Fazendo-se uma mudança de variável do tipo

4.3 $$x = y - \frac{p}{3}$$

a eq. (4.2) toma a seguinte forma

4.4 $$y^3 + uy + v = 0$$

onde as novas constantes u e v estão definidas por

4.5 $$3u = 3q - p^2 \quad \text{e} \quad 27v = 2p^3 - 9pq + 27r.$$

A eq. (4.4) é uma equação incompleta do 3º grau que sempre pode ser colocada numa forma fatorada.

Utilizando-se a identidade

4.6 $$x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = (x + a + b)\,[x^2 - (a + b)x + a^2 - ab + b^2]$$

e identificando-se com a eq. (4.4). Temos

4.7 $$u = -3ab \quad \text{e} \quad v = a^3 + b^3.$$

Da primeira equação de (4.7) temos $u^3 = -27a^3b^3$ de onde concluimos que a^3 e b^3 são raízes da seguinte equação do 2º grau

4.8 $$z^2 - vz - \frac{u^3}{27} = 0$$

que recebe o nome de resolvente para a equação do 3º grau . Note que a resolvente é do 2º grau.

Denotando-se por A e B as raízes desta resolvente temos que

4.9 $$y_1 = -\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = -a - b$$

é uma raiz da equação do 3º grau incompleta, eq. (4.4), onde

$$A = \frac{1}{2}v + \sqrt{\Delta} \qquad e \qquad B = \frac{1}{2}v - \sqrt{\Delta}$$

sendo $108\Delta = 27v^2 + 4u^3$. Basta notar que $[x + (a + b)]$ é fator da eq. (4.6) que é o mesmo que a eq. (4.4) via tarnsformação (4.7).

As outras duas raízes são obtidas a partir do outro fator quadrático

$$x^2 - (a + b)x + a^2 - ab - b^2$$

cujas raízes são

$$x = \frac{1}{2}\left[(a + b) \pm (a - b)\sqrt{-3}\right]$$

onde a e b estão dados por $a = \sqrt[3]{A}$ e $b = \sqrt[3]{B}$.

Consequentemente, as três raízes da equação do 3º grau, com coeficientes constantes, são:

$$4.10 \qquad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}p - a - b \\ x_2 = -\frac{1}{3}p + \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b)\sqrt{-3} \\ x_3 = -\frac{1}{3}p + \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b)\sqrt{-3} \end{cases}$$

onde $a = \sqrt[3]{A}$ e $b = \sqrt[3]{B}$, sendo A e B as raízes da equação (4.8). As equações dadas em (4.10) são conhecidas como fórmulas de Cardan. Note-se que se $\Delta < 0$ as três raízes são reais, caso contrário uma das raízes é real e as outras duas são complexas conjugadas, por causa do fator $\sqrt{-3}$ nas expressões das raízes.

5.) EQUAÇÕES DO 4º GRAU

Finalizando, passemos a discutir a fórmula resolutiva para uma equação do 4º grau, com coeficientes constantes , apresentada primeiramente por Ferrari (1522-1565), aluno de Cardan.

Seja a equação do 4º grau, com coeficientes constantes , em sua forma mais geral

5.1 $$\sum_{i=0}^{4} a_i x^i = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 = 0$$

com $a_4 \neq 0$. O caso em que $a_4 = 0$ já foi discutido nos parágrafos anteriores.

Dividindo-se a Eq. (5.1) por a_4 obtemos a seguinte equação

5.2 $$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

onde $p = a_3/a_4$, $q = a_2/a_4$, $r = a_1/a_4$ e $s = a_o/a_4$.

Uma mudança de variável do tipo

5.3 $$x = y - \frac{1}{4}p$$

reduz a eq. (5.2) a uma equação do 4º grau incompleta, ou seja

5.4 $$y^4 + uy^2 + vy + w = 0$$

onde os novos coeficientes estão definidos por

5.5
$$-\frac{3p^2}{8} + q = u \qquad \frac{p^3}{8} - \frac{pq}{2} + r = v$$
$$-\frac{3p^4}{256} + \frac{qp^2}{16} - \frac{rp}{4} + s = w$$

Consideremos, agora, a seguinte identidade

5.4' $$(x + a + b + c)\,(x + a - b - c)\,(x - a + b - c)\,(x - a - b + c) =$$
$$= x^4 - 2(a^2+b^2+c^2)x^2 + 8abcx + a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$

que, de imediato, pode ser identificada com a eq.(5.4). Logo, conhecidos a,b e c temos que as raízes da eq. (5.4) são:

5.6 $$\begin{aligned} y_1 &= -a-b-c \\ y_2 &= -a+b+c \\ y_3 &= a-b+c \\ y_4 &= a+b-c \end{aligned}$$

Conhecidas as raízes podemos escrever, a partir das relações entre as raízes e os coeficientes, da eq.(5.4)

5.7 $$\begin{aligned} y_1+y_2+y_3+y_4 &= 0 \\ y_1y_2+y_1y_3+y_1y_4+y_2y_3+y_2y_4+y_3y_4 &= u \\ y_1y_2y_3+y_1y_2y_4+y_1y_3y_4+y_2y_3y_4 &= -v \\ y_1\,y_2y_3\,y_4 &= w \end{aligned}$$

e, substituindo-se as equações dadas em (5.6) nas eq.(5.7) obtemos

5.8 $$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= -\frac{u}{2} \\ a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 &= \frac{u^2-4w}{16} \\ a^2b^2c^2 &= \frac{v^2}{64} \end{aligned}$$

Logo, das equações acima, temos que a^2, b^2 e c^2 são raízes da equação

5.9 $$z^3+\frac{u}{2}z^2+\frac{u^2-4w}{16}z-\frac{v^2}{64}=0$$

que é chamada resolvente para a equação do 4º grau. Note que esta equação é do 3º grau.

Chamando-se w_1, w_2 e w_3 as soluções da eq.(5.9), discutida no parágrafo anterior, concluimos que as soluções da eq.(5.2) são

$$x_1 = -p/4 - \sqrt{w_1} - \sqrt{w_2} - \sqrt{w_3}$$

$$x_2 = -p/4 - \sqrt{w_1} + \sqrt{w_2} + \sqrt{w_3}$$

$$x_3 = -p/4 + \sqrt{w_1} + \sqrt{w_2} - \sqrt{w_3}$$

$$x_4 = -p/4 + \sqrt{w_1} - \sqrt{w_2} + \sqrt{w_3}$$

onde $\sqrt{w_1} = a$, $\sqrt{w_2} = b$ e $\sqrt{w_3} = c$.

Para escrevermos as raízes em função dos parâmetros iniciais basta fazer o processo inverso. O método discutido acima é devido a Lagrange (1736-1813). A maneira que Ferrari obteve as soluções da equação foi fazendo uso única e exclusivamente do método de fatoração.

6.) CONCLUSÕES

Notemos que, a partir das demonstrações acima, todas resolventes têm grau menor que a equação original. Este fato levou os matemáticos a concluir que sempre uma equação de grau N poderia ser reduzida à uma equação de grau (N-1). Porém, no estudo de uma equação de grau cinco obteve-se uma equação de resolvente de grau seis.

Várias propostas foram feitas. A mais elegante demonstração foi feita por Malfati que concluiu que o grau, m, de uma resolvente para uma equação de grau n está dado por $2m = (n-1)(n-2)$ ou seja, em consequência desta expressão, qualquer valor de m, maior que quatro, possui uma resolvente de grau maior que a equação original.

Concluímos que esta revisão de equações algébricas com coeficientes constantes, será de grande valia para que muitos professores possam fazer com que seus alunos treinem , a partir desta, radicais, números complexos, polinômios bem como equações algébricas.

Uma vez que equações de grau menor que três são exaustivamente discutidas, a nível de segundo grau, sugerimos as seguintes equações: ($x^3 - 8 = 0$; $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$; $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$; $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; $x^4 - 4x + 3 = 0$; $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$ e $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 6x - 3 = 0$).

Finalizando, indicamos o excelente livro: *Theory of Equations*, Uspenky, J.V., McGraw-Hill, Book Company, inc. (1948) para maiores detalhes sobre o apresentado nesta revisão.

AGRADECIMENTO: O autor agradece o Prof. Adolfo Maia Jr. pelas sugestivas e valiosas discussões bem como a leitura final deste manuscrito.