SOBRE A TOPOLOGIA COMPACTO-PORTADA UNIFORME EM ESPAÇOS DE APLICAÇÕES HOLOMORFAS

MÁRIO C. MATOS

RESUMO

A Topologia Compacto-Portada Uniforme é Introduzida. Seus limitados e compactos são caracterizados.

Mário C. Matos
Departamento de Matemática
Universidade Estadual de Campinas
Campinas - Brasil

Novembro - 1977

SOBRE A TOPOLOGIA COMPACTO-PORTADA UNIFORME EM ESPAÇOS DE APLICAÇÕES HOLOMORFAS

Mário C. Matos
Universidade Estadual de Campinas

1. Motivação

L. Nachbin em [1] introduziu e estudou a topologia compacto-portada $\mathcal{T}_\omega$ em espaços de aplicações holomorfas entre espaços normados. A partir deste trabalho, Nachbin, seus alunos e outros matemáticos publicaram vários artigos analisando os mais diversos aspectos dessa topologia. Veja [2] para uma lista desses trabalhos publicados até 1972. J. A. Barroso, em [3], introduziu a generalização natural dessa topologia para espaços de aplicações holomorfas entre espaços localmente convexos e demonstrou resultados interessantes. Na versão localmente convexa os resultados de [1] só foram demonstrados em casos particulares. Veja Barroso [3] e Matos [4]. Outros aspectos topológicos também foram estudados no caso localmente convexo e deram origem a alguns resultados interessantes. As dificuldades técnicas para a obtenção de tais resultados quando comparadas com aquelas do caso normado são bem maiores. Neste trabalho introduzimos uma nova topologia que coincide com a topologia de Nachbin no caso normado e que nos parece tecnicamente mais manejável para o caso localmente convexo. Tanto assim que os resultados de [1] são verdadeiros em geral para essa topologia conforme demonstraremos aqui.

2. A topologia compacto-portada uniforme

Sejam E e F espaços localmente convexos complexos e U um aberto não vazio de E. Sem perder generalidade e para ganhar em simplicidade podemos supor F normado. Utilizaremos as notações de [1], [2] e [3]. No espaço dos polinômios n-homogêneos contínuos de E em F $\mathcal{P}(^nE;F)$ consideramos a topologia $\mathcal{T}_i(^nE;F)$. Veja [3]. Ela é a topologia limite indutivo das topologias seminormadas naturais de $\mathcal{P}(^nE_\alpha;F)$

para $\alpha \in SC(E)$ = conjunto das seminormas contínuas em E. $\mathcal{P}({}^{n}E_{\alpha};F)$ é o espaço dos polinômios n-homogêneos contínuos do espaço seminormado $E_{\alpha} = (E,\alpha)$ em F munido com a topologia natural definida pela seminorma

$$\|P\|_{\alpha} = \sup\left\{ \|P(t)\| \ ; \ \alpha(t) \leq 1 \right\}$$

$P \in \mathcal{P}({}^{n}E_{\alpha};F)$. $\mathcal{P}_{i}({}^{n}E;F)$ indica $\mathcal{P}({}^{n}E;F)$ munido com $\mathcal{P}_{i}({}^{n}E;F)$.

Se $p \in SC(\mathcal{P}_{i}({}^{n}E;F))$ e $\alpha \in SC(E)$ define-se

$$\|p\|_{\alpha} = \sup\left\{ p(P) \ ; \ P \in \mathcal{P}({}^{n}E;F) \text{ e } \|P\|_{\alpha} \leq 1 \right\}$$

É claro que $p(P) \leq \|p\|_{\alpha} \|P\|_{\alpha}$ para todo $P \in \mathcal{P}({}^{n}E;F)$.

<u>Definição 1</u> - Uma sequência $\{p_m\}$ de seminormas $p_m \in SC(\mathcal{P}_{i}({}^{m}E;F))$ é <u>uniforme</u> se

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \|p_m\|_{\alpha}^{\frac{1}{m}} < +\infty$$

para todo $\alpha \in SC(E)$.

<u>Definição 2</u> - Uma seminorma p no espaço $\mathcal{H}(U;F)$ das aplicações holomorfas de U em F é <u>portada uniformemente</u> por um subconjunto compacto K de U se existe uma sequência uniforme $\{p_m\}$, $p_m \in SC(\mathcal{P}_{i}({}^{m}E;F))$, $m \in \mathbb{N}$, tal que para cada $\varepsilon > 0$, é possivel determinar $C(\varepsilon) > 0$ satisfazendo

$$p(f) \leq C(\varepsilon) \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m} \sup_{t \in K} p_m\left(\frac{1}{m!}\hat{d}^{m}f(t)\right) \qquad \forall f \in \mathcal{H}(U;F).$$

<u>Definição 3</u> - A <u>topologia compacto-portada uniforme</u> $\tau_{\omega u}$ em $\mathcal{P}(U;F)$ é a topologia localmente convexa gerada por todas as seminormas portadas uniformemente por compactos de U.

<u>Observação</u> - Não é difícil mostrar que $\tau_{\omega} = \tau_{\omega u}$ se E é normado e que $\tau_{\omega u} \subset \tau_{\omega}$ em geral. Sabe-se também que $\tau_{\omega} = \tau_{\omega u}$ no caso em que E é um espaço de Silva. Neste caso tem-se também a igualdade dessas topologias com a topologia compacta-aber

ta. Não sabemos se existe algum caso em que $\tau_{\omega u} \neq \tau_\omega$.

3. Conjuntos limitados

Teorema 1 - Seja $\mathcal{X}$ um subconjunto de $\mathcal{H}(U;F)$. $\mathcal{X}$ é $\tau_{\omega u}$-limitado se, e só se, para todo compacto K contido em U e toda sequência uniforme $\{p_m\}$, $p_m \in SC(\mathcal{P}_i({}^mE;F))$, $m \in \mathbb{N}$, existem $C \geq 0$, $c \geq 0$ tais que

$$p_m\left(\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(t)\right) \leq C\, c^m$$

para quísquer $t \in K$, $f \in \mathcal{X}$ e $m \in \mathbb{N}$.

Lema - Se $s_{m,i} \geq 0$ para quaisquer $m \in \mathbb{N}$ e $i \in I$, então

$$\sup_{i \in I} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m\, s_{m,i} < +\infty$$

para toda sequência $\{\alpha_m\}$ de números positivos tal que $\lim \alpha_m^{\frac{1}{m}} = 0$ se, e só se, existem $C \geq 0$ e $c \geq 0$ tais que $s_{m,i} \leq C\, c^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e $i \in I$.

Demonstração do Teorema 1 - Seja $\mathcal{X}$ $\tau_{\omega u}$-limitado. Se $K \subset U$ é compacto, $\{p_m\}$ é uniforme e $\{\alpha_m\}$ é uma sequência de números positivos tal que $\lim \alpha_m^{\frac{1}{m}} = 0$, então a seminorma p definida em $\mathcal{H}(U;F)$ por

$$p(f) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \sup_{t \in K} p_m\left(\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(t)\right)$$

é uniformemente portada por K. Consequentemente p é limitada em $\mathcal{X}$. O lema implica então na existência de $C \geq 0$ e $c \geq 0$ tais que

$$p_m\left(\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(t)\right) \leq C\, c^m$$

para quaisquer $f \in \mathcal{X}$, $t \in K$ e $m \in \mathbb{N}$. A implicação contrária é de fácil demonstração.

Definição 4 - A topologia τ_{∞_i} em $\mathcal{H}(U;F)$ é a topologia localmente convexa gerada por todas as seminormas do tipo

$$p_{K,\tau,m}(f) = \sup_{t\in K} \tau\left(\frac{1}{m!}\,\widehat{d}^m f(t)\right)$$

para qualquer $f \in \mathcal{H}(U;F)$, onde K varia na coleção de compactos de U, m varia em $\mathbb{N}$ e τ varia em $SC(\mathcal{P}_i(^nE;F))$.

Observação - Se E é normado com dimensão infinita e $F \neq \{0\}$ então $\tau_{\infty_i} \neq \tau_{\omega u}$. Em geral $\tau_{\infty_i} \subset \tau_{\omega u}$. Temos também a igualdade da duas topologias quando E é de dimensão finita ou um espaço de Silva ou $F = \{0\}$.

Teorema 2 - Em cada $\tau_{\omega u}$-limitado $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}(U;F)$ as estruturas uniformes associadas com $\tau_{\omega u}$ e τ_{∞_i} induzem a mesma estrutura uniforme. Em particular, $\tau_{\omega u}$ e τ_{∞_i} induzem em $\mathcal{X}$ a mesma topologia.

Demonstração - Vamos supor primeiro que $0 \in \mathcal{X}$. Como $\tau_{\infty_i} \subset \tau_{\omega u}$ é claro que uma vizinhança de 0 na topologia de $\mathcal{X}$ induzida por τ_{∞_i} é também uma vizinhança de 0 na topologia de $\mathcal{X}$ induzida por $\tau_{\omega u}$. Mostremos que vale a recíproca. Seja p uma seminorma $\tau_{\omega u}$-continua em $\mathcal{H}(U;F)$. Portanto p é uniformemente portada por um compacto K de U. Sejam $\{p_m\}$ e $C(\varepsilon) \geqslant 0$ como na Definição 2. Como $\mathcal{X}$ é $\tau_{\omega u}$-limitado existem $C \geqslant 0$ e $c \geqslant 0$ como no Teorema 1. Escolhamos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon c < 1$ e $\mu \in \mathbb{N}$ tal que

$$C\, C(\varepsilon) \sum_{m>\mu} (\varepsilon c)^m \leqslant 1/2$$

Definamos a seminorma τ_{∞_i}-contínua q por

$$q(f) = C(\varepsilon) \sum_{m=0}^{\mu} \varepsilon^m \sup_{t\in K} p_m\left(\frac{1}{m!}\,\widehat{d}^m f(t)\right)$$

É claro então que se $f \in \mathcal{X}$ e $q(f) \leqslant 1/2$, então $p(f) \leqslant 1$.

Vamos supor agora que $\mathcal{X}$ é um conjunto arbitrário $\tau_{\omega u}$-limitado. O conjunto $\mathcal{X} - \mathcal{X}$ de todas as diferenças de dois elementos de $\mathcal{X}$ é também $\tau_{\omega u}$-limitado. Como ele contem 0 as vizinhanças de 0 nele induzidas pelas topologias τ_{∞_i} e $\tau_{\omega u}$ são idênticas. Segue assim que as estruturas uniformes em $\mathcal{X}$ associadas a essas topologias são as mesmas.

4. Conjuntos relativamente compactos

Teorema 3 - Seja $\mathcal{X}$ um subconjunto de $\mathcal{H}(U;F)$. Então $\mathcal{X}$ é $\tau_{\omega u}$-relativamente compacto se, e só se, $\mathcal{X}$ é $\tau_{\infty i}$-relativamente compacto e $\tau_{\omega u}$-limitado.

Demonstração - Basta mostrar que se $\mathcal{X}$ é $\tau_{\infty i}$-relativamente compacto e $\tau_{\omega u}$-limitado então ele é $\tau_{\omega u}$-relativamente compacto. Pelo Teorema 2 as aderências de $\mathcal{X}$ para $\tau_{\infty i}$ e $\tau_{\omega u}$ são iguais e $\tau_{\omega u}$-limitadas. Ainda pelo Teorema 2 $\tau_{\omega u}$ e $\tau_{\infty i}$ induzem nessa aderência a mesma topologia e daí segue o resultado procurado.

No caso em que F é completo uma outra caracterização para conjuntos $\tau_{\omega u}$-relativamente compactos pode ser obtida usando o seguinte resultado.

Teorema 4 - Seja F completo e $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}(U;F)$ localmente limitado. $\mathcal{X}$ é $\tau_{\infty i}$-relativamente compacto se, e só se, $\mathcal{X}_n(t) = \left\{ \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(t) \; ; \; f \in \mathcal{X} \right\}$ é relativamente compacto em $\mathcal{P}_i({}^nE;F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t \in U$.

Demonstração - Definamos

$$\Phi : f \in \mathcal{H}(U;F) \longmapsto \Phi f \in \prod_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}(U;\mathcal{P}_i({}^nE;F))$$

com

$$\Phi f = \left\{ \frac{1}{n!} \hat{d}^n f \right\} .$$

Considere no domínio de Φ a topologia τ_{∞_i} e no seu contradomínio a topologia produto das topologias compacto-abertas de cada fator. Φ é uma aplicação biunívoca, linear, contínua e Φ^{-1} é também contínua. Suponhamos que $\mathcal{X}_n(t)$ seja relativamente compacto em $\mathcal{P}_i({}^nE;F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t \in U$. Para mostrar que $\mathcal{X}$ é relativamente compacto basta mostrar que $\Phi(\mathcal{X})$ é relativamente compacto para topologia produto. Mas então basta mostrar que as projeções de $\Phi(\mathcal{X})$ em cada fator são relativamente compactas. Como $\mathcal{X}$ é localmente limitado essas projeções são localmente limitadas e portanto equicontínuas. O que se deseja segue agora do Teorema de Ascoli [5] e do fato de F ser completo. A implicação contrária é de demonstração fácil.

Sabemos por [6] que para espaços holomorficamente infratonelados E (e. g. produtos quisquer de espços metrizáveis, espaços de Baire) $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}(U;F)$ é localmente limitado se, e só se, ele é limitado sobre os compactos de U. Daí a validade do seguinte resultado.

<u>Teorema 5</u> - Seja E holomorficamente infratonelado e $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}(U;F)$. $\mathcal{X}$ é τ_{wu}-relativamente compacto se, e só se, $\mathcal{X}$ é τ_{ω_i}-relativamente compacto. Além disso, se F é completo, $\mathcal{X}$ é τ_{wu}-relativamente compacto se, e só se, $\mathcal{X}$ é limitado sobre os compactos de U e $\mathcal{X}_n(t)$ é relativamente compacto em $\mathcal{P}_i({}^nE;F)$ para todo n em $\mathbb{N}$ e $t \in U$.

<u>Observação</u> - A melhor manejabilidade da topologia τ_{wu} no caso localmente convexo em contraposição com a topologia τ_w leva-nos a crer que outros resultados interessantes e bem gerais poderão ser obtidos. Outros aspectos topológicos de τ_{wu} começam agora a ser examinados por um grupo de estudantes de pós-graduação da Universidade Estadual de Campinas.

REFERÊNCIAS

[1] L. Nachbin - Topology on spaces of holomorphic mappings, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Heft 47, Springer-Verlag, Berlin, 1969

[2] L. Nachbin - Recent developments in infinite dimensional holomorphy, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 79, nº 4, 1973.

[3] J. A. Barroso - Topologias nos espaços de aplicações holomorfas entre espaços localmente convexos, Anais da Academia Brasileira de Ciências, 43, 1971

[4] M. C. Matos - Subconjuntos limitados e compactos de aplicações holomorfas entre espaços localmente convexos. Comunicação na Reunião da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, Belo Horiznte, 1975.

[5] N. Bourbaki - General Topology, Chapter X, Function Spaces, Hermann, Paris e Addison-Wesley ,Londres.

[6] J. A. Barroso, L. Nachbin e M. C. Matos - On bounded sets of holomorphic mappings, Proceedings on Infinite Dimensional Holomorphy, Lecture Notes 364, Springer-Verlag, 1974