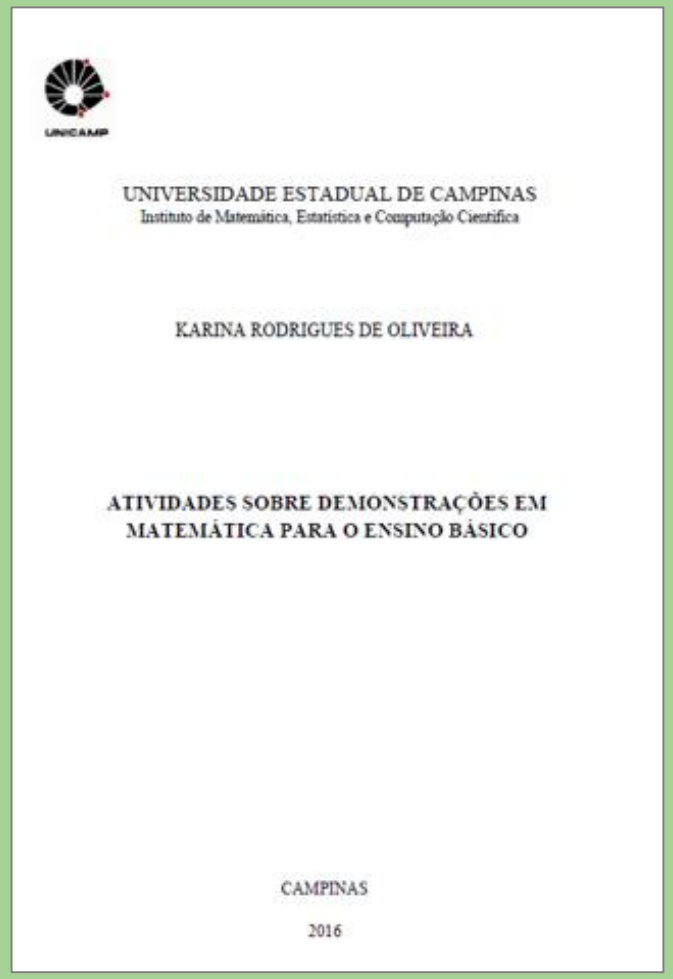
Laboratório de Ensino de Matemática

IMECC/UNICAMP

30/03/2017 Maria Zoraide M C Soares

Demonstrações em Matemática (motivação)



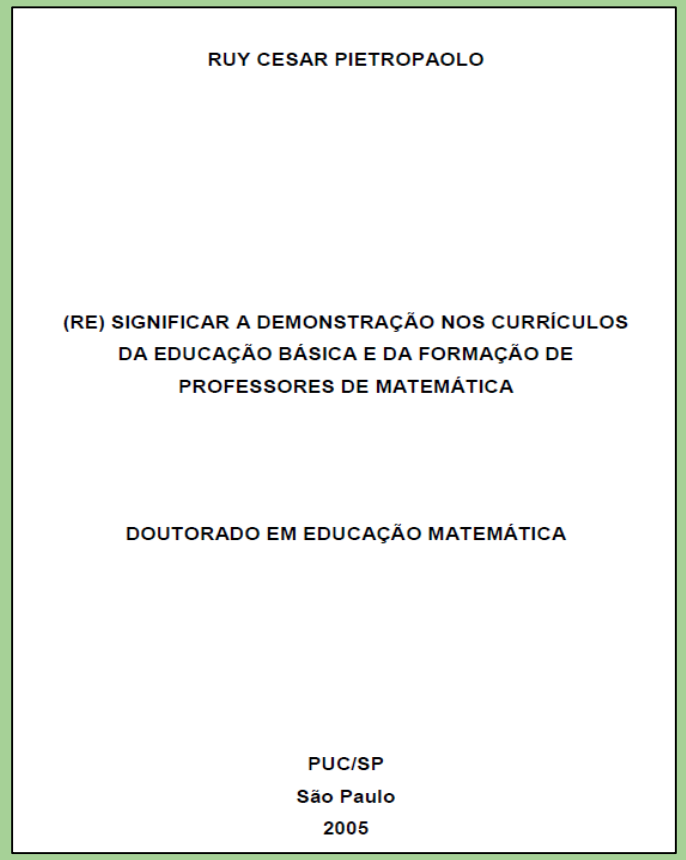
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

KARINA RODRIGUES DE OLIVEIRA

ATIVIDADES SOBRE DEMONSTRAÇÕES EM MATEMÁTICA PARA O ENSINO BÁSICO

CAMPINAS

2016



RUY CESAR PIETROPAOLO

(RE) SIGNIFICAR A DEMONSTRAÇÃO NOS CURRÍCULOS DA EDUCAÇÃO BÁSICA E DA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP
São Paulo
2005

Maria Zoraide M C Soares
mzsoares@uol.com.br

Significados do verbo demonstrar

A demonstração no âmbito social: evidencia aquilo que se quer ver

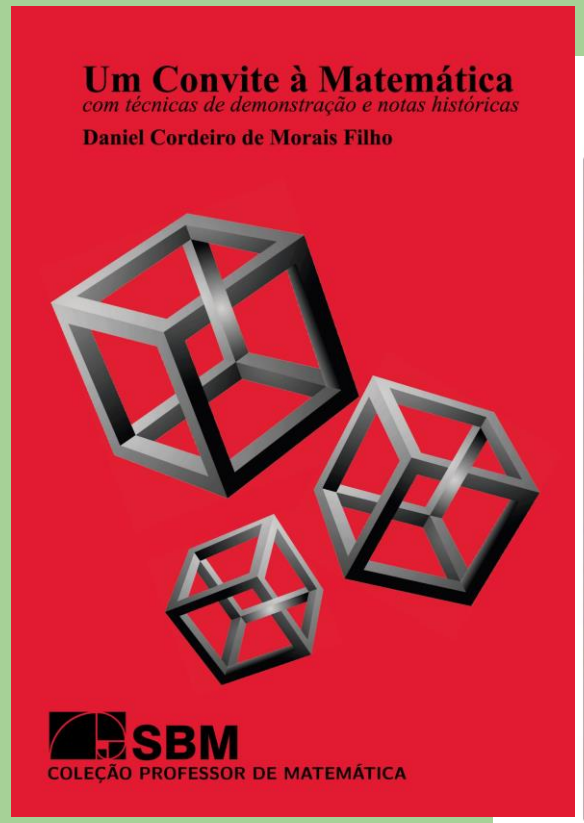
- O movimento se demonstra andando;
- Tudo que você aguentou demonstra que você tem paciência;
- Este creme demonstra que você rejuvenesceu;
- Demonstrações de amor .

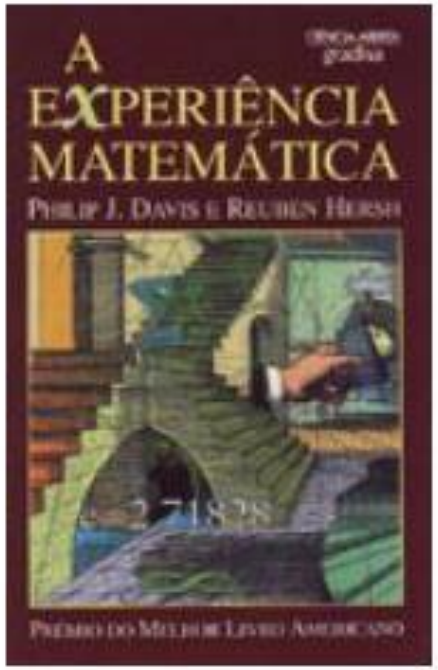
A demonstração no âmbito religioso: demonstrações da existência de Deus.

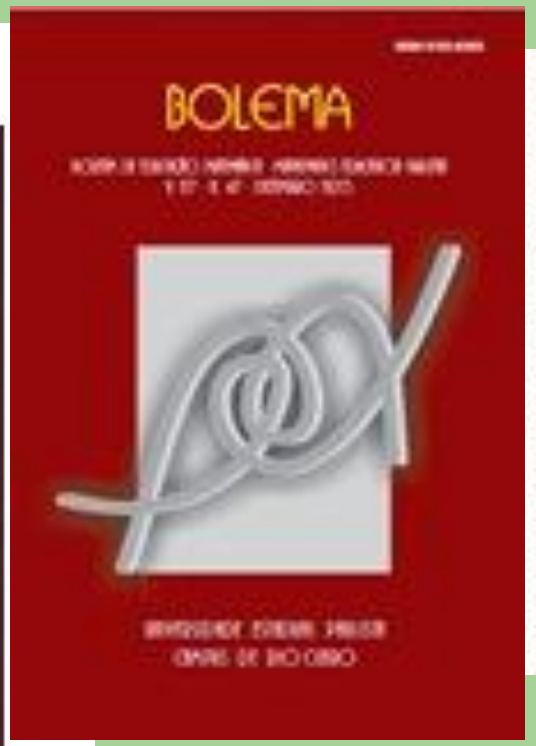
A demonstração no âmbito militar: demonstração de força.

A demonstração no âmbito jurídico: não é a comprovação da ocorrência de um determinado fato, mas o convencimento de que a resposta jurídica é mais adequada.

Demonstrações em Matemática







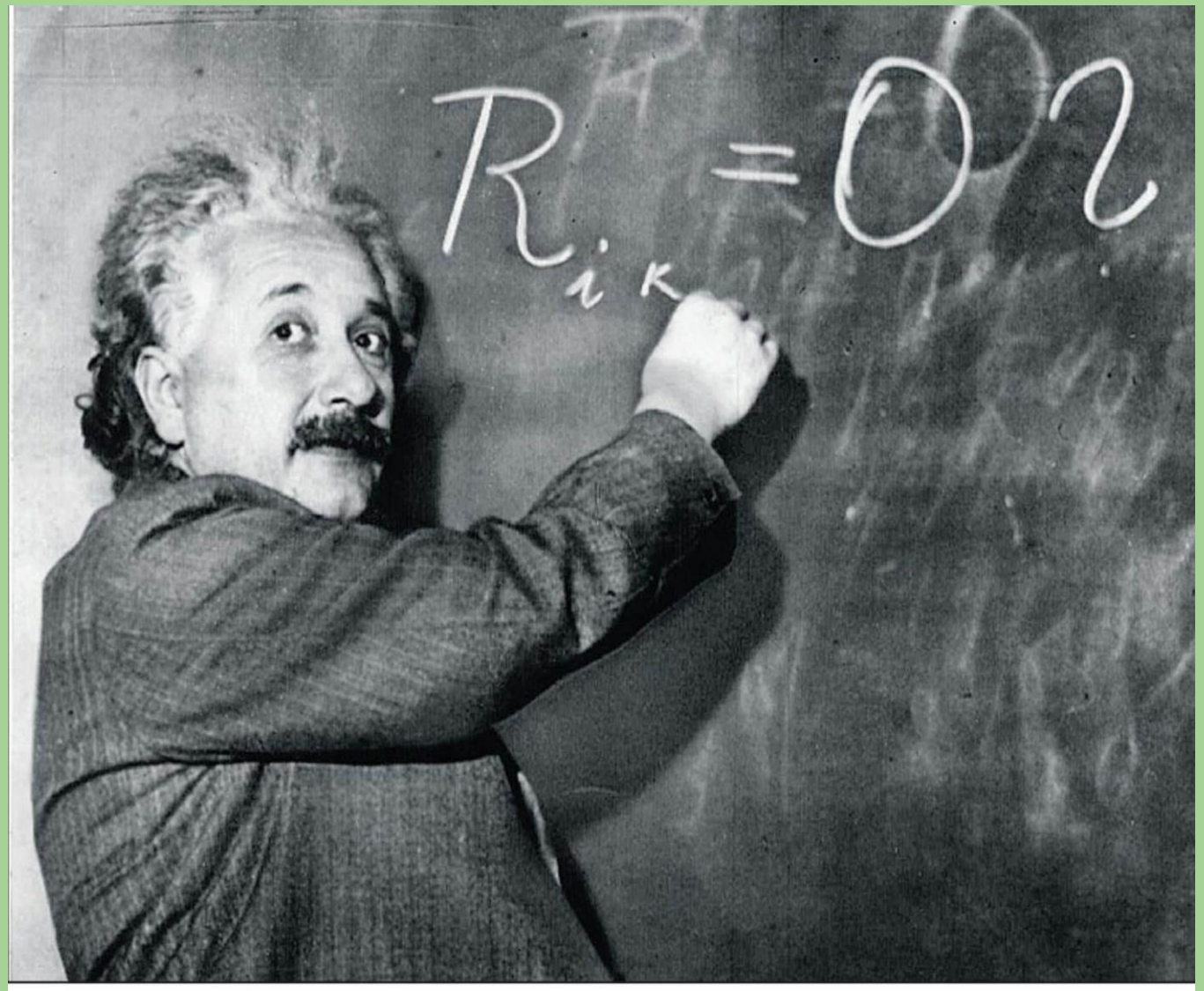
Demonstrações em Matemática

Ora, um matemático tem uma vantagem sem par sobre os outros cientistas, em geral, historiadores, políticos, e expoentes de outras profissões: ele Pode errar. A fortiori, ele pode também acertar. [...]

Um erro feito por um matemático, mesmo um grande matemático, não é uma "diferença de pontos de vista ou "uma outra interpretação dos dados" ou "ditado por uma ideologia conflitante"; é um erro. Os maiores matemáticos, aqueles que descobriram a maior quantidade de verdades matemáticas, são também aqueles que publicaram o maior número de demonstrações com lacunas, asserções insuficientemente qualificadas, e meros erros [...].

Os erros cometidos por um grande matemático são de dois tipos: primeiramente, enganos triviais, que qualquer um pode corrigir; em segundo lugar, falhas titânicas, refletindo a escala do combate travado pelo grande matemático. Falhas desse último tipo são, frequentemente, tão importantes como o sucesso, pois dão lugar a grandes descobertas por outros matemáticos. [...]" (C.A.Truesdell, III, 1919-2000)

Um diálogo imaginário entre um matemático ideal e um aluno que lhe trouxe um problema estranho.



- Estudante (E): Professor, o que é uma demonstração matemática?
- Matemático Imaginário (MI): Você não sabe isso? Em que ano você está?
- E: Terceiro ano de pós-graduação;
- MI: Incrível! Uma demonstração é o que você me tem visto fazer no quadro negro três vezes por semana durante três anos! Eis o que é uma demonstração.
- E: Desculpe, professor. Eu deveria ter explicado melhor. Eu sou de filosofia, não de matemática. Nunca segui seus cursos.
- MI: Oh! Bem, este caso, você já fez algum curso de matemática, não? Conhece a demonstração do teorema fundamental do cálculo ou do teorema fundamental da álgebra?
- E: Já vi raciocínios em geometria; em álgebra e em cálculo que eram chamados de demonstrações. O que lhe estou pedindo não são exemplos de demonstrações, é por uma definição de demonstração. De outra maneira, como posso saber que exemplos estão certos?
- MI: Bem, tudo isso já foi esclarecido pelo lógico Tarski, acho eu, e alguns outros, talvez Russel ou Peano. De qualquer maneira, o que se deve fazer é o seguinte: você escreve os axiomas de sua teoria em uma linguagem formal com uma lista ou alfabeto de símbolos dados. Então, você escreve as hipóteses de seu teorema usando o mesmo simbolismo. Você mostra então como poderá transformar a hipótese passo a passo, usando as regras da lógica, até chegar à conclusão. Isso é uma demonstração.
- E: É mesmo? Espantoso! Já segui cursos de cálculo elementar e avançado, álgebra básica e topologia, e nunca vi isso ser feito.
- MI: Oh! Em verdade ninguém nunca faz realmente isso. Levaria toda a vida! Mostra-se simplesmente que poderia ser feito, isso é suficiente.
- E: Mas nem isso parece com o que era feito em meus cursos e textos. Assim, no final das contas, os matemáticos realmente não fazem demonstrações.
- MI: Claro que fazemos! Se um teorema não for demonstrado não vale nada.
- E: Então o que é uma demonstração? Se for esta história de linguagem formal e de transformar fórmulas, ninguém jamais demonstra alguma coisa. Temos que saber linguagem formal e lógica formal antes de poder entender o que é uma demonstração matemática?
- MI: Claro que não! Quanto menos você souber, melhor. Todas essas coisas são idiotices abstratas, de qualquer maneira.
- E: Então o que é realmente uma demonstração?
- MI: Bem, é um raciocínio que convence alguém que conhece o assunto.
- E: Alguém que conhece o assunto? Então a definição de demonstração é subjetiva: depende das pessoas. Antes que eu possa decidir se algo é uma demonstração, tenho que decidir quem são os peritos. O que é que isso tem a ver com demonstrações?
- MI: Não, não. Não há nada subjetivo sobre isso! Todo mundo sabe o que é uma demonstração. Basta ler alguns livros, assistir a cursos de um matemático competente, e você aprenderá o que é uma demonstração.
- E: O senhor tem certeza?
- MI: Bem, é possível que você não aprenda, se não tiver nenhuma aptidão para isso. O que pode acontecer, você entende.
- E: Então, o Sr. Determina o que é uma demonstração, e se eu não aprender a determinar da mesma maneira, o Sr. concluirá que eu não tenho aptidão para o assunto.
- MI: Se eu não concluir, quem o fará?

Quase que universalmente, falar em matemática é falar em demonstração. Joseph R. Shoenfield, “Mathematical Logic”, encontramos a citação:

“ […]

O aspecto conspícuo (notável) da matemática, em oposição às outras ciências, é o uso da DEMONSTRAÇÃO, em vez da observação. Um físico pode provar leis físicas a partir de outras leis físicas; mas ele, usualmente, considera a concordância com a observação como o teste último para uma lei física. Um matemático pode, ocasionalmente, usar a observação; pode por exemplo, medir os ângulos de muitos triângulos e concluir que a soma dos ângulos é sempre 180^0*. Entretanto, aceitará isso, como uma lei da matemática, somente quando tiver sido demonstrado*”.

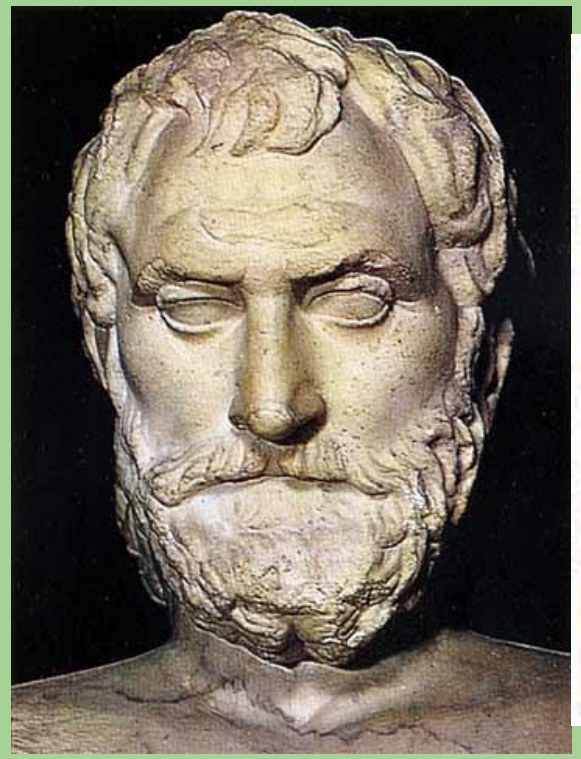
Segundo Halmos, a lógica demorou quase duzentos anos para dar uma explicação precisa ao conceito de demonstração.

Elementos de uma demonstração:

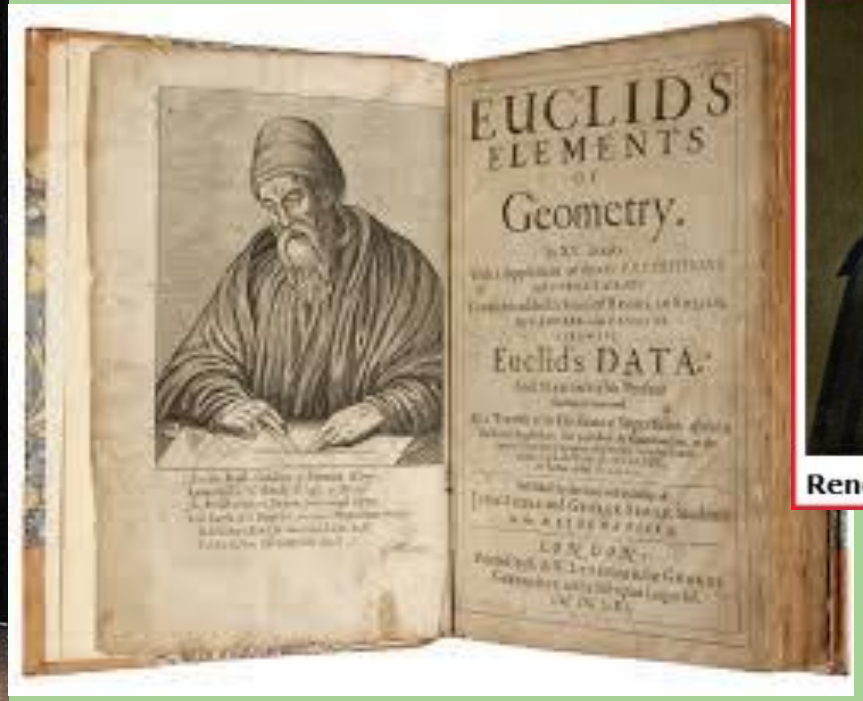
1. Hipótese (s).
2. Axiomas.
3. Definições.
4. Teoremas já demonstrados.
5. Os passos da demonstração, previamente provados.
6. As regras de inferência e técnicas de demonstração.

Que podem ser usados quantas vezes forem necessários.

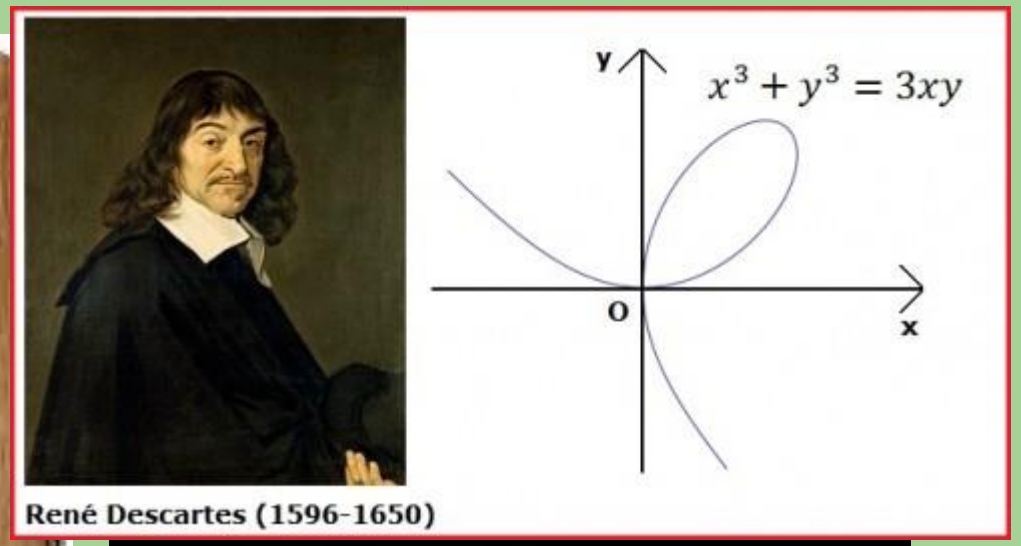
A Demonstração na história

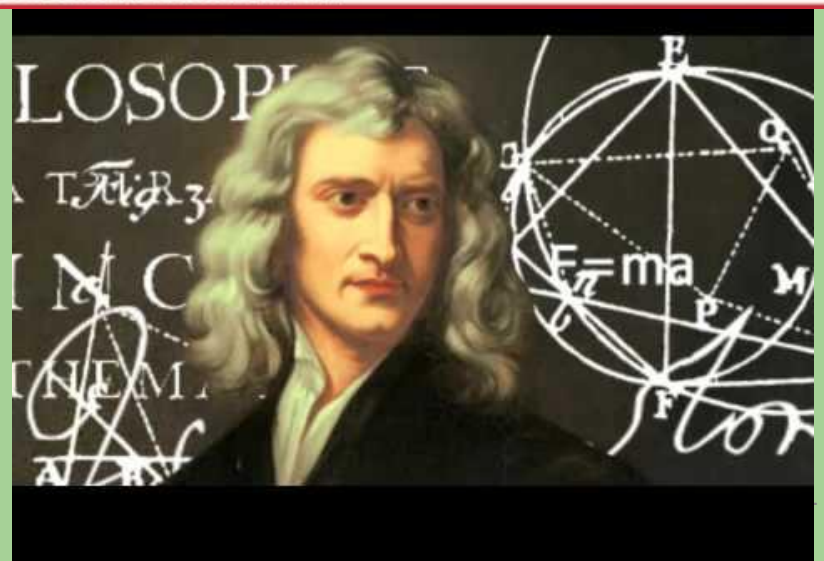


Tales



Euclides





Newton

Demonstração na sala de aula

Lilian Nasser no seu livro Argumentação e Provas afirma que na maioria das escolas brasileiras: os jovens não estão habituados a pensar e comunicar suas ideias. Este fato já foi observado internacionalmente, e a investigação sobre "argumentação e provas no ensino de matemática" vem recebendo atenção cada vez maior de pesquisadores e educadores matemáticos.

Pesquisas desenvolvidas internacionalmente foram relatadas por Hanna e Jahnke em 1996, no capítulo intitulado 'Proof and proving', incluído no manual de Educação Matemática, o "International Handbook of Mathematics Education", pp.877-908. Nele são citadas pesquisas sobre as funções da prova (Hanna, 1990; de Villiers, 1990), os tipos de provas aceitos por matemáticos e educadores matemáticos (Bell, 1976; Balacheff, 1988; Davis, 1993), além de estudos investigando os progressos dos alunos no desenvolvimento do raciocínio dedutivo (Hersh, 1993; Hoyles, 1997).

A prova ou demonstração tem diversas funções:

- Validar um resultado, isto é, comprovar que é verdadeiro. Muitas vezes, o resultado é óbvio para os alunos, que não vêm necessidade alguma de verificar sua veracidade. Essa função se torna altamente motivadora quando há alguma dúvida, ou seja, quando é preciso validar ou refutar uma conjectura.
- Outra função da prova é a de explicar ou elucidar, isto é, mostrar porque o resultado é verdadeiro. Por exemplo as provas por indução e por absurdo.
- Alguns pesquisadores, enfatizam a função da prova de sistematizar, isto é, preparar para o domínio do processo dedutivo. Nesse sentido, acompanhando as demonstrações apresentadas pelo professor, o aluno vai tomando conhecimento das estruturas da matemática, para no futuro dominar o processo dedutivo, e até, em alguns casos, ser capaz de fazer demonstrações por si mesmo. Para isso, é necessário que o professor não esconda dos alunos as dificuldades encontradas e o motivo de certos passos tomados no desenvolvimento de uma demonstração
- Função da descoberta de novos resultados.
- Função da comunicação que é a transmissão do conhecimento matemático.

Tipos de provas

- Grande parte dos alunos não dominam uma prova formal, nem quando chegam à universidade, nem quando se formam, e nem mesmo depois de alguns anos do magistério.

- Mas a prova *formal* não é o único tipo de prova. Alguns pesquisadores como Hanna (1990), do Canadá, e Nicholas Balacheff (1988), da França, defendem a *prova ingênua*, isto é, uma argumentação aceitável, que pode ter diversos níveis de rigor, dependendo da idade e do ano de escolaridade do aluno que a apresenta.

Rezende e Nasser (1994) também encontraram em sua investigação mais quatro tipos de provas:

- Justificativa pragmática: o aluno atesta a veracidade de uma afirmativa com base em apenas alguns casos particulares.

- Recorrência a uma autoridade: o aluno afirma que o resultado é verdadeiro porque o professor falou, ou porque estava no livro texto.

- Exemplo crucial: o aluno desenvolve através de um exemplo o raciocínio que poderia ter sido feito no caso geral.

- Justificativa gráfica: o aluno mostra numa figura porque o resultado é verdadeiro.

Como os alunos devem ser preparados para dominar o processo dedutivo

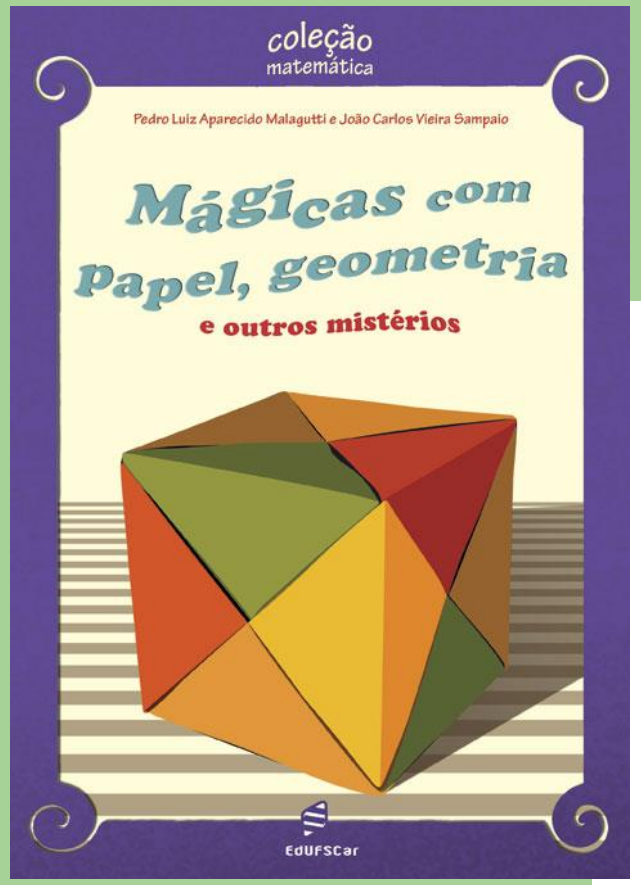
É necessário ajudar o aluno a desenvolver o seu raciocínio lógico e prepará-lo para dominar o processo dedutivo. A habilidade de argumentar deve ser construída ao longo dos anos de escolaridade, através de atividades variadas como jogos, problemas-desafio, ou simplesmente exigindo-se justificativas para todas as respostas.

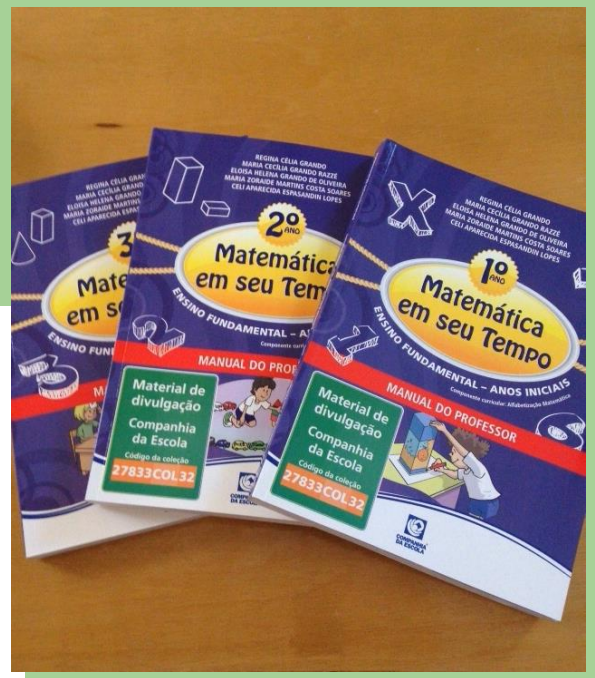
Observa-se que nas séries iniciais a criança é mais espontânea e consegue explicar seu raciocínio oralmente, com naturalidade. Conforme os anos vão passando, essa espontaneidade diminui, e o aluno não consegue justificar suas soluções nem oralmente e nem por escrito. Portanto a habilidade de argumentar deve ser trabalhada desde as primeiras séries, para que o aluno mais tarde seja capaz de defender um ponto de vista próprio, seja numa conversa informal, seja numa questão de matemática.

Estratégias usadas para desenvolver as habilidades de argumentação dos alunos

- Após tentar resolver uma tarefa individualmente e de ouvir a explicação do professor, os alunos trabalham em grupos discutindo soluções para o mesmo problema.
- Os alunos avaliam justificativas apresentadas pelos colegas.
- Problemas do tipo desafio, que requerem raciocínio lógico, são sempre propostos, independentemente do tópico que esteja sendo abordado.
- O mesmo problema é proposto tanto a estudantes que já aprenderam o conteúdo matemático correspondente, quanto àqueles que ainda não adquiriram esse conhecimento, a fim de evitar o uso de algoritmos ou fórmulas.
- O computador é usado para verificar se uma afirmativa é verdadeira ou falsa; depois de convencidos da verdade (ou não), os alunos são levados a justifica-la, ou a procurar um contraexemplo.

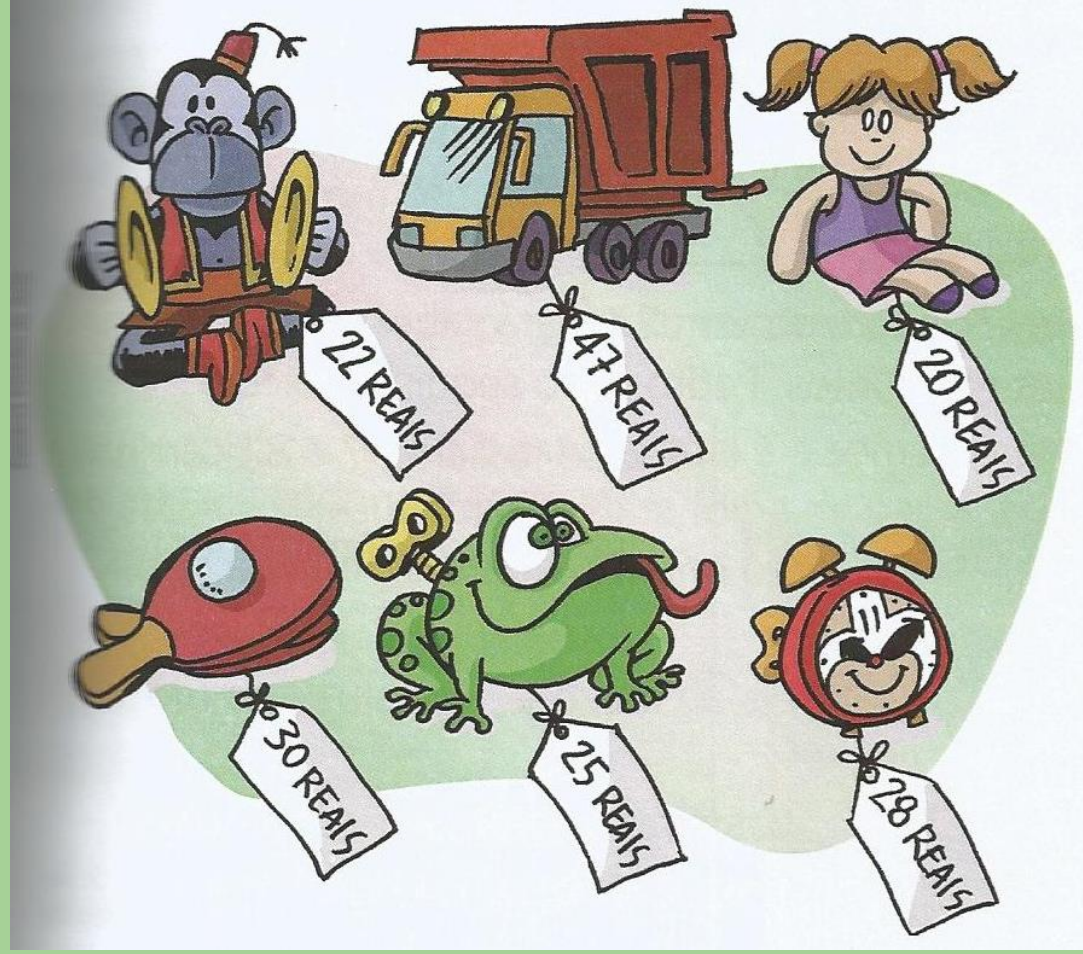
Ideias para o EF1, EF2 e Ensino Médio



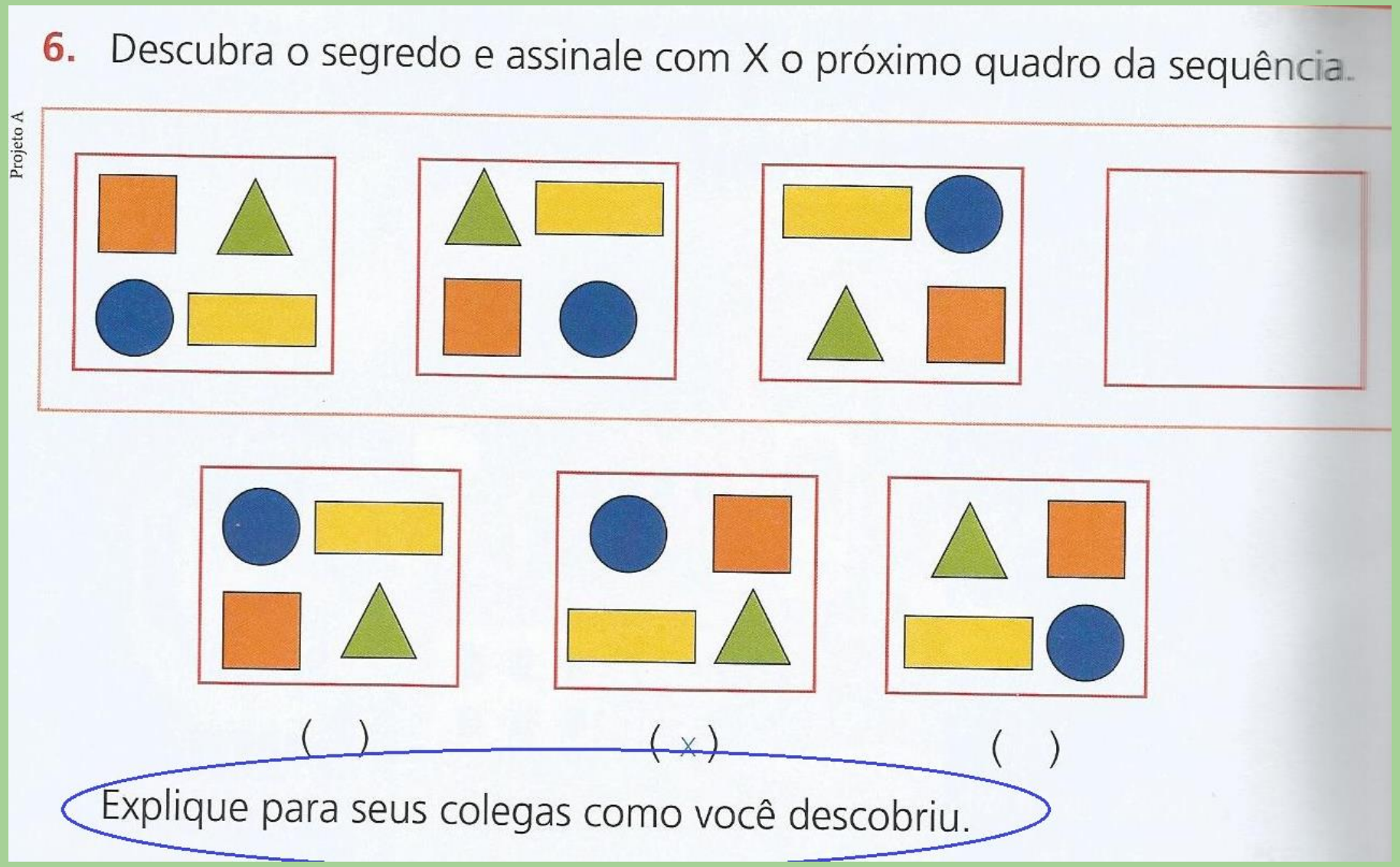


Atividade 1

b) Eloisa pretende gastar todo o dinheiro que tem comprando alguns dos brinquedos abaixo. Quais brinquedos ela poderá comprar? Mostre como você pensou.



Atividade 2



Projeto A

6. Descubra o segredo e assinale com X o próximo quadro da sequência.

( ) (x) ( )

Explique para seus colegas como você descobriu.

Atividade 3

7. Considere os seguintes números:

90 20 60 80 20 40 30 10 10 50 70

a) Adicionando dois desses números, forme 100.

_____ + _____ = 100 Respostas possíveis: 90 + 10; 80 + 20; 70 + 30; 60 + 40.

b) Adicionando três desses números, forme 100.

_____ + _____ + _____ = 100 Respostas possíveis: 80 + 10 + 10; 70 + 20 + 10; 60 + 30 + 10; 60 + 20 + 20; 50 + 40 + 10; 50 + 30 + 20.

c) Adicionando quatro desses números, forme 100.

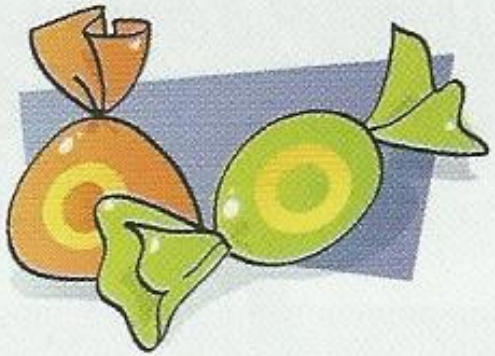
_____ + _____ + _____ + _____= 100 Respostas possíveis: 60 + 20 + 10 + 10; 50 + 10 + 10 + 30; 50 + 20 + 20 + 10.

Compare seus resultados com os de seus colegas. Todos fizeram do mesmo jeito que você? Resposta pessoal.

Atividade 4

86 De caramelos

Entre tres niños se comen 17 caramelos. Andrés come más caramelos que los otros dos niños.



¿Cuál es el mínimo número de caramelos que se ha comido Andrés?

Atividade 5

Cálculo mental

Divide entre 2 un número con todas sus cifras pares

46 : 2 = 23

28 : 2 80 : 2
64 : 2 42 : 2

284 : 2 = 142

426 : 2 208 : 2
640 : 2 842 : 2

6.208 : 2 = 3.104

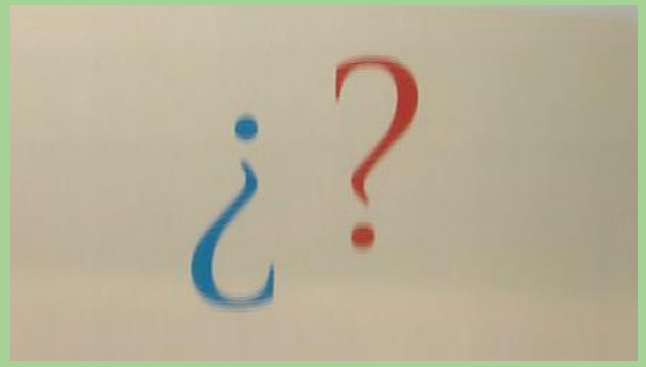
2.468 : 2 6.084 : 2
4.620 : 2 8.462 : 2

Atividade 6

Paulo encontrou o resultado
$2^{30} = 1.073.741.823$
para a potência de 2.

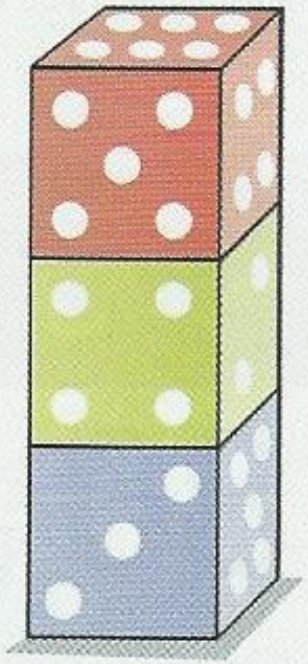
Está certo o resultado?

<u>Explique como pensou</u>.



Atividade 7

91 La cara inferior



Tres dados idénticos están colocados formando una torre. La cara inferior de cada dado marca los mismos puntos que la superior del dado que está debajo.

Si en la cara de arriba hay un 6, ¿cuánto marca la cara de más abajo?

Atividade 8

Razonamiento

Observa cada división y escribe en tu cuaderno.

```
2 3 6 | 4
  3 6   5 9
    0
```

- Otra división exacta con el mismo cociente.

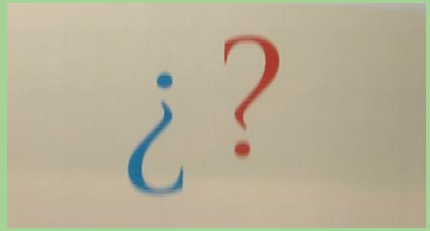
```
3 1 4 | 6
  1 4   5 2
    2
```

- Una división con el mismo cociente y el triple de resto.
- Una división con el mismo cociente y la mitad de resto.

Atividade 9

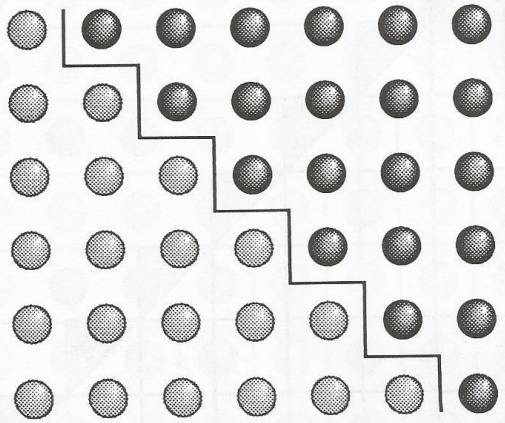
Você pode escrever todos os múltiplos de um número?
E todos os divisores?

Qual é o menor número de divisores de um número?
Quais são?



Atividade 10

Sums of Integers I



$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

—"The ancient Greeks"
(as cited by Martin Gardner)

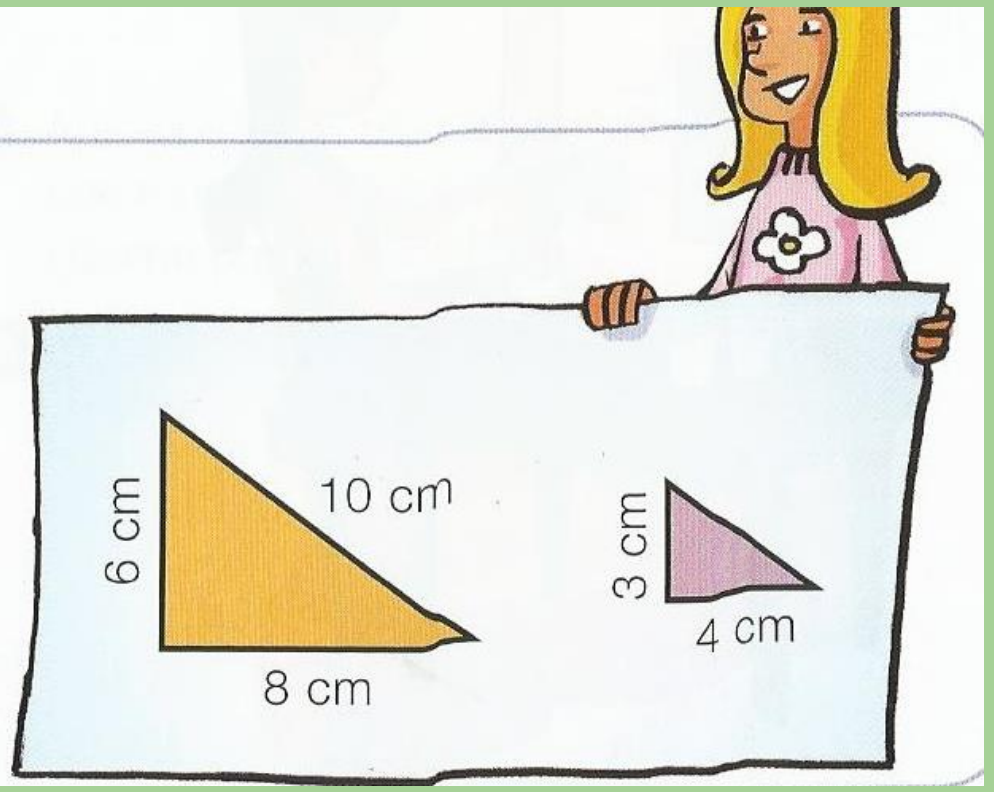
Atividade 13

Razonamiento

Piensa y contesta.

Los dos triángulos de la derecha son semejantes.

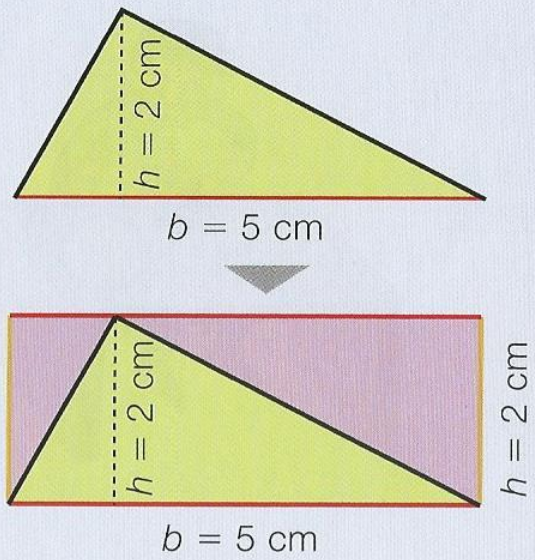
- ¿Cuánto medirá el lado mayor del triángulo morado? ¿Cómo lo has hallado? Dibuja un triángulo con esas medidas y comprueba tu respuesta.
- ¿Qué relación hay entre los perímetros de los dos triángulos? ¿Por qué?



Atividade 14

Área del triángulo

14



¿Cuál es el área de este triángulo?

Fíjate en que si trazamos paralelas a la base y a la altura del triángulo, se forma un rectángulo.

Este rectángulo tiene la misma base, b, y la misma altura, h, que el triángulo.

Observa que la parte verde es igual que la morada. Es decir, el área del triángulo es la mitad del área del rectángulo.

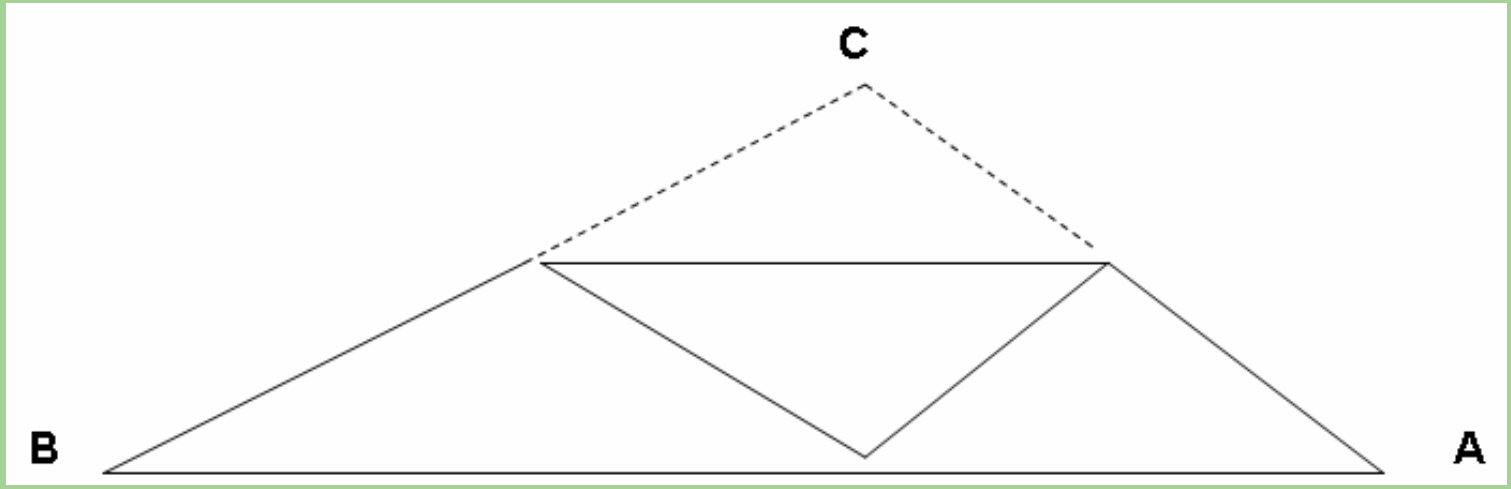
$$\text{Área del triángulo} = \frac{\text{Área del rectángulo}}{2} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

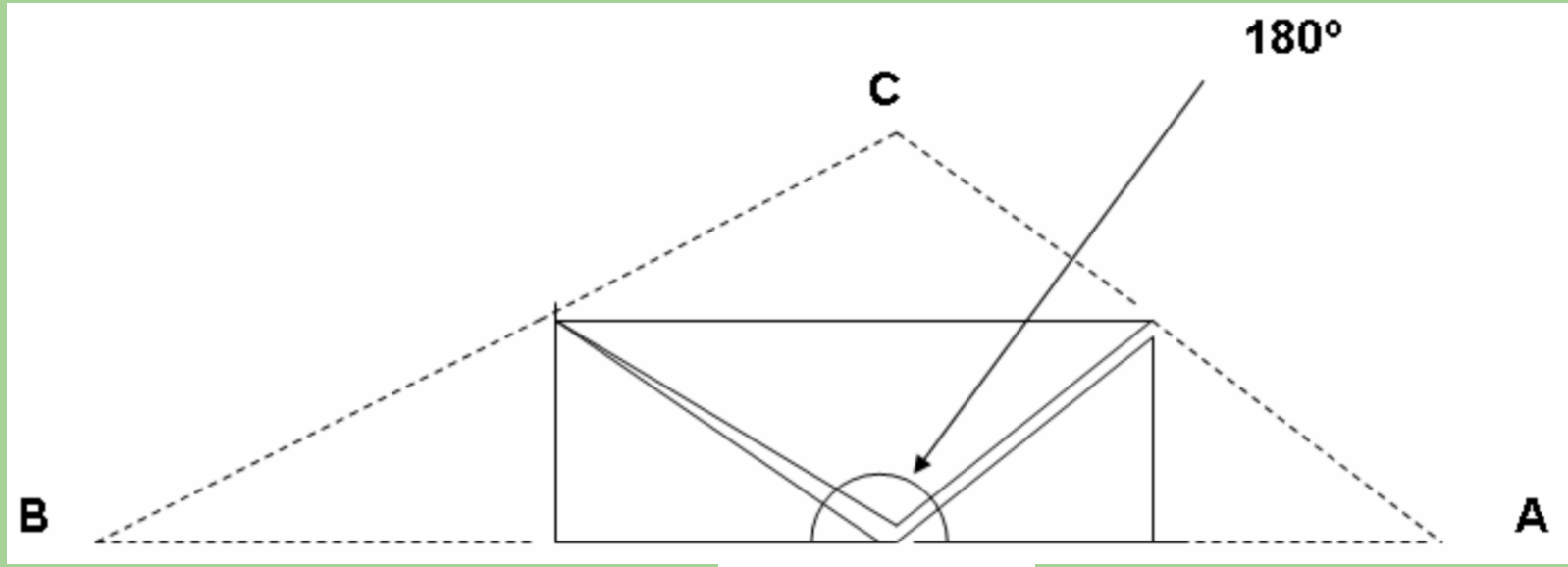
$$\text{Área} = \frac{b \times h}{2} = \frac{5\text{ cm} \times 2\text{ cm}}{2} = 5\text{ cm}^2$$

El área de un triángulo es el producto de su base por su altura dividido entre 2.

$$\text{Área del triángulo} = \frac{b \times h}{2}$$

Atividade 17



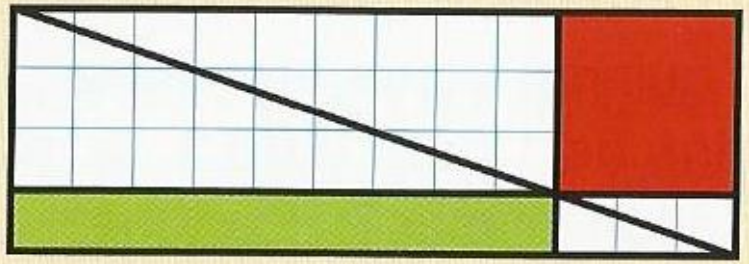


C+B+A

Atividade 11

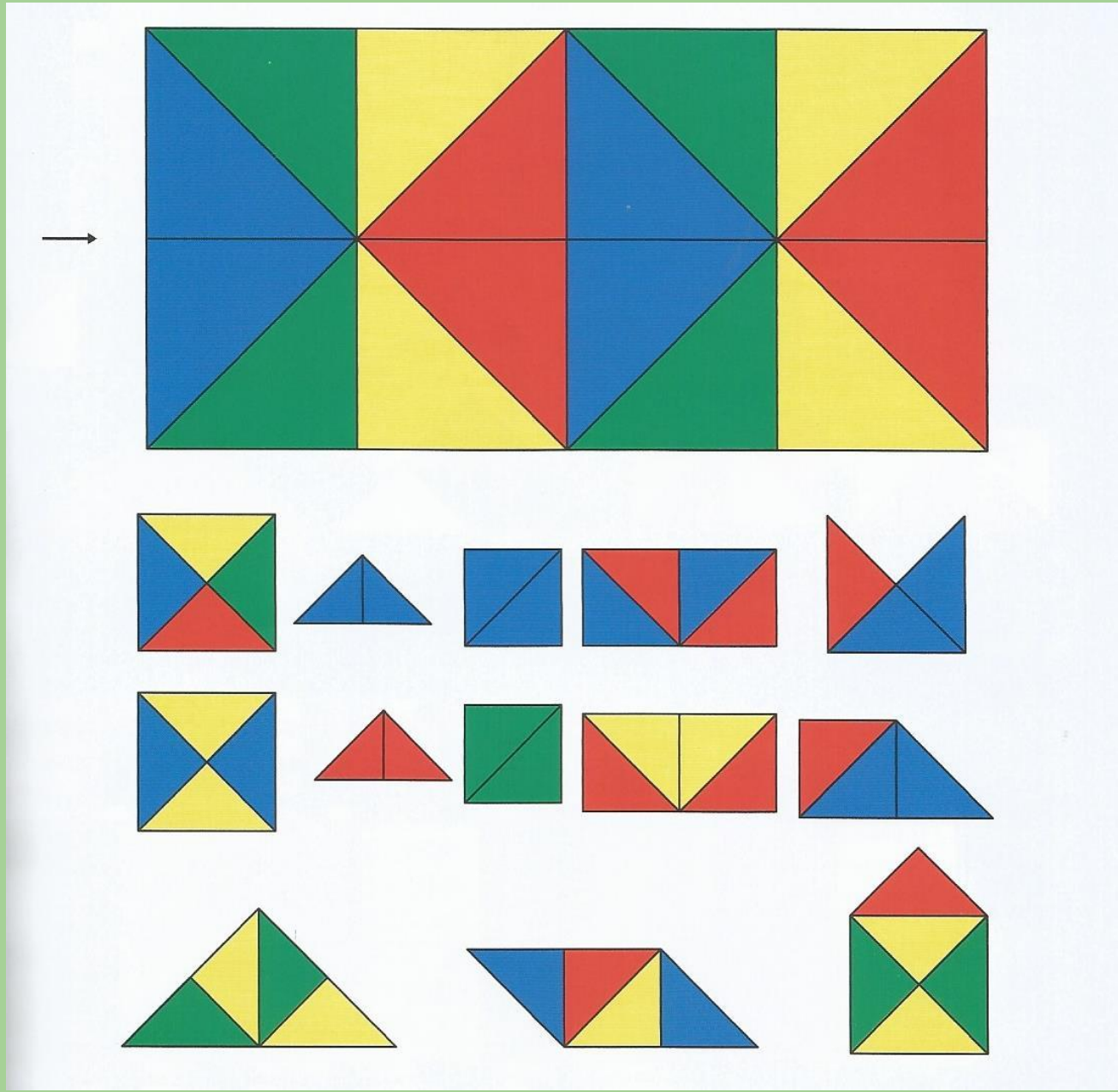
Demuestra tu talento

13 ¿Qué área de color es la más grande? Explica por qué.



Copia la figura en tu cuaderno, cuenta los cuadraditos que forman cada cuadrilátero y comprueba tu respuesta.

Atividade 12



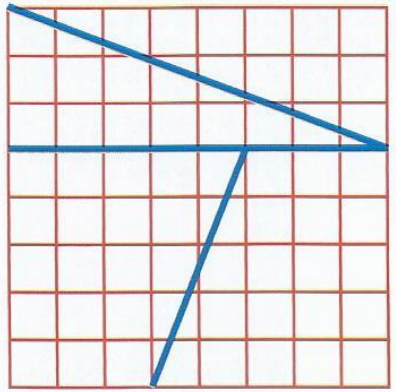
Dobre o retângulo maior ao meio na linha indicada pela seta. Cole as duas metades. Em seguida, dobrando a fita, obtenha os padrões descritos abaixo.

Atividade 15

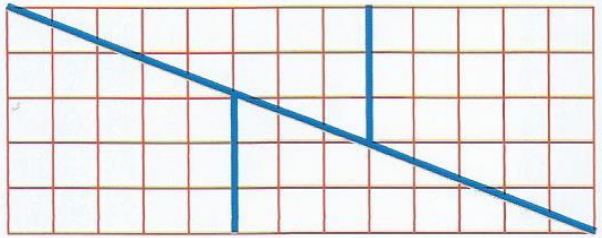
Aumente a área de um terreno redesenhando sua planta

O enigma de Hooper

William Hooper criou em 1794 este interessante enigma em uma publicação intitulada *Rational Recreations*. Inicialmente, o quadrado da figura abaixo, subdividido em 64 quadrados menores, é recortado ao longo das três linhas mais grossas (azuis) traçadas sobre ele.



As quatro regiões resultantes são reagrupadas, formando o retângulo da figura abaixo.

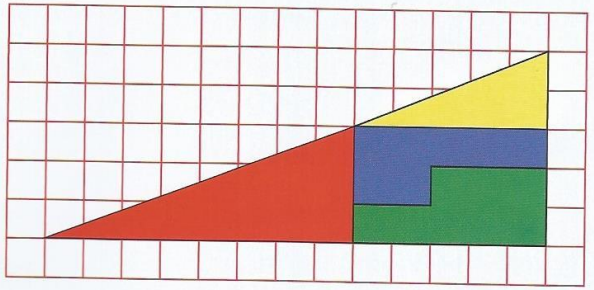


Considerando-se cada quadradinho como uma unidade de área, o quadrado tem 64 unidades de área, mas o retângulo tem 13 × 5 = 65 unidades de área. Como se explica isto?

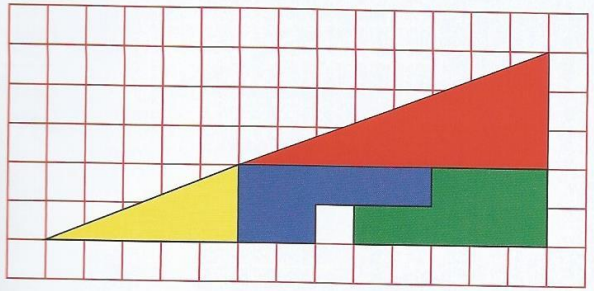
Atividade 16

O enigma de Paul Curry

Paul Curry, um ilusionista de Nova York, criou em 1953 um outro interessante enigma envolvendo áreas. Inicialmente, repare na configuração de quatro peças sobre um fundo quadriculado, formando, ao que parece ser, um triângulo retângulo.



Agora, as quatro peças são rearranjadas formando, ao que parece ser, um triângulo retângulo de mesmas dimensões (base e altura) que o primeiro.

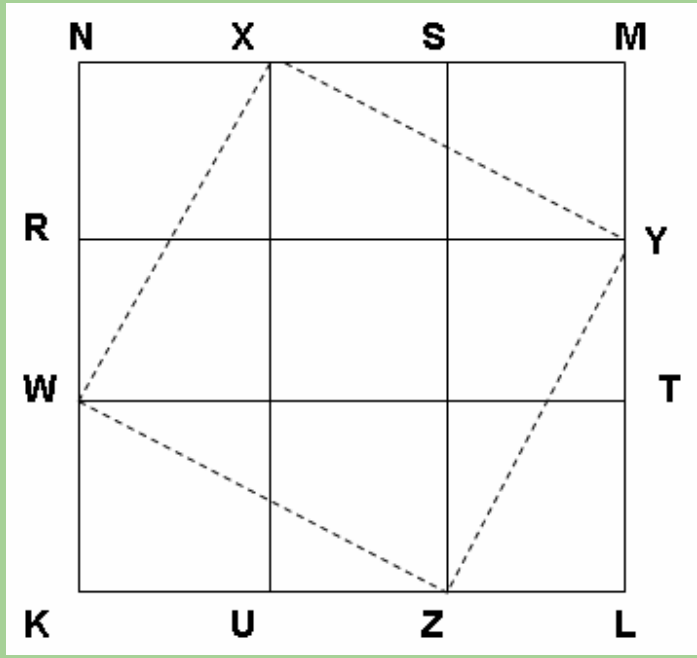


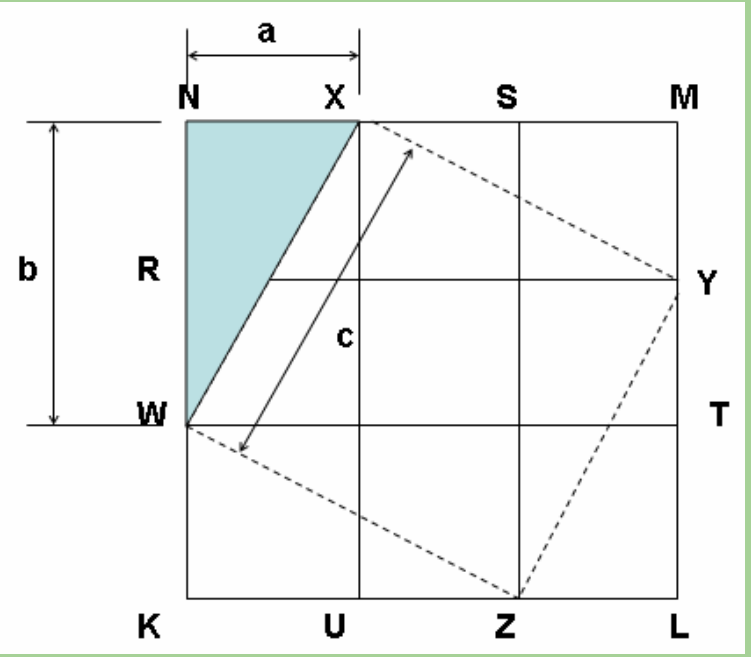
Um buraco branco, de uma unidade de área, formou-se no interior do triângulo, próximo à sua base. A área total das quatro peças foi preservada. Como se explica que o triângulo retângulo possa acomodar uma unidade de área em seu interior sem alterar suas dimensões (base e altura)?

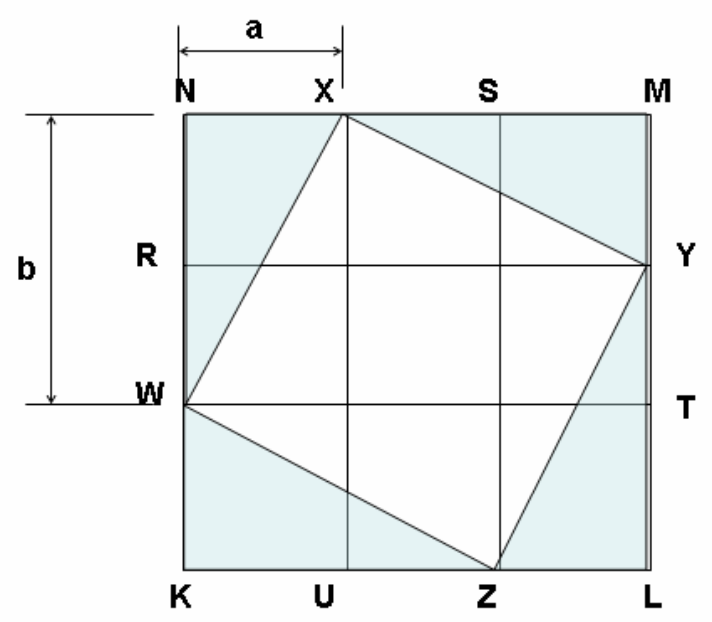
O enigma do retângulo

Esta é uma brincadeira geométrica inventada por Martin Gardner em 1954. Um retângulo é traçado sobre um fundo quadriculado, como mostra a figura seguinte. Traça-se então uma linha em forma de escada, subdividindo o retângulo em duas metades de mesmas dimensões. Recortando-se o retângulo pelo seu contorno, e recortando-o depois em duas metades, ao longo da linha em escada, teremos duas partes geometricamente idênticas.

Atividade 18 O Teorema de Pitágoras



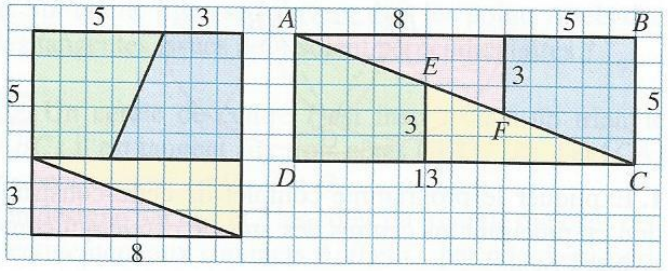




Atividade 19

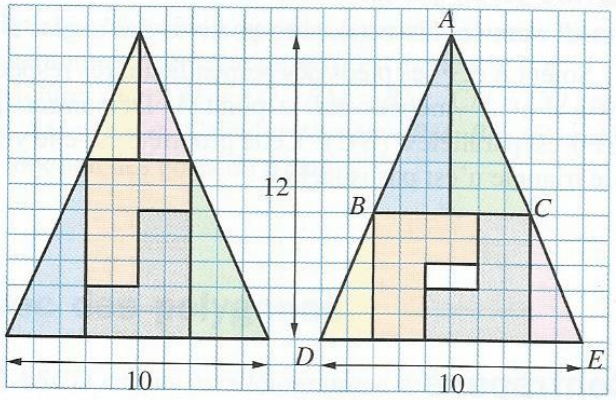
Pièges et astuces

88 Merlin a réalisé le puzzle suivant, dont les quatre pièces peuvent former un carré ou un rectangle, selon la façon dont on les dispose.



Il en déduit que l'aire du carré (8×8, donc 64) est égale à celle du rectangle (13×5, donc 65) ! Lola a su lui expliquer ce qui n'allait pas en utilisant la propriété de Thalès pour montrer que les points A, C, E, F ne sont pas exactement alignés.
Retrouver la démonstration de Lola.

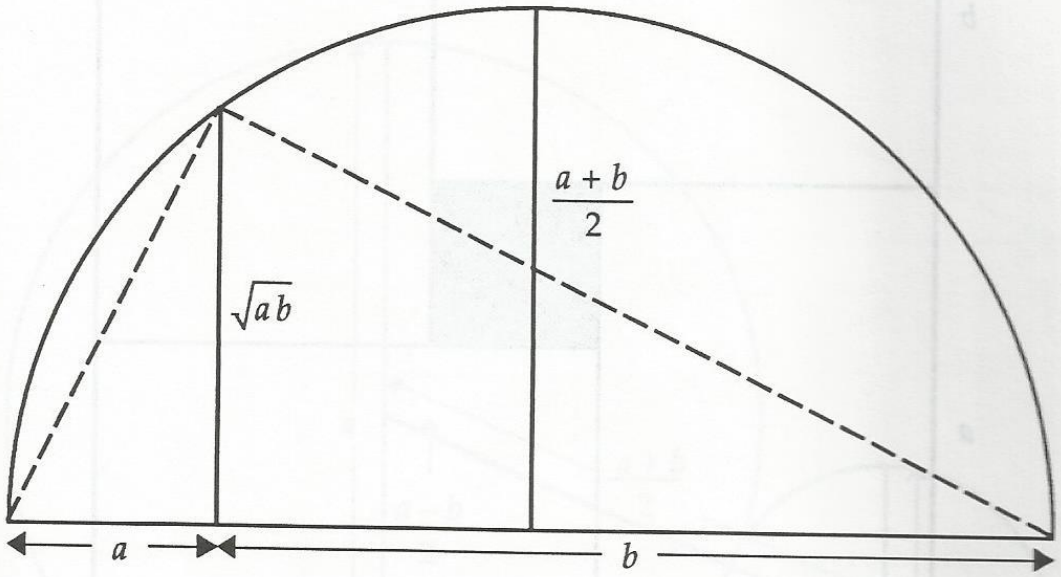
89 Pour continuer son explication, Lola a réalisé le puzzle suivant, où l'on pourrait croire que 12×5 est égal à $12 \times 5 - 2$!



Utiliser encore la propriété de Thalès ou sa réciproque pour démasquer l'imposture.

Atividade 20

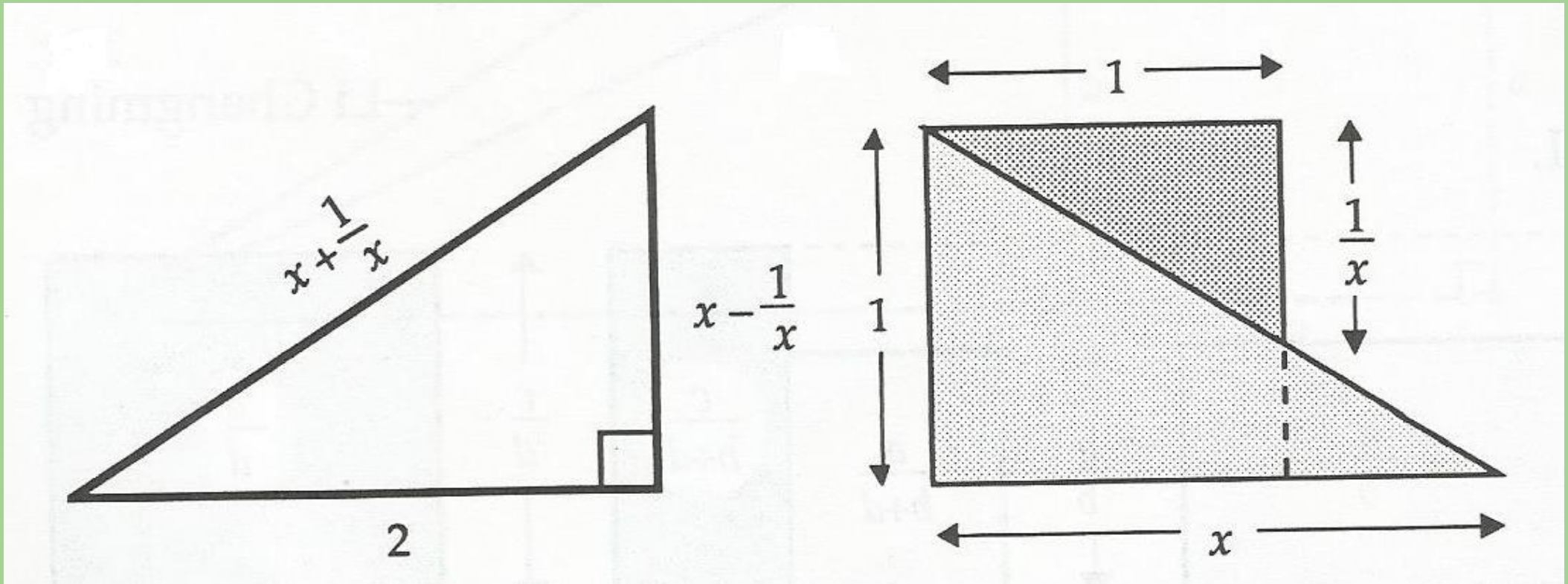
The Arithmetic Mean—Geometric Mean Inequality I



$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Atividade 21

$$x \geq 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$



Atividade 22

100 Corrections

Voici l'énoncé d'un exercice et les solutions correspondantes rédigées par quatre élèves de seconde.

Est-ce que j'obtiens toujours un nombre supérieur à 2 si j'ajoute un nombre positif et son inverse ?

Arnaud

$\frac{1}{3} + 3 = \frac{1}{3} + \frac{9}{3} = \frac{10}{3}$

C'est bien supérieur à 1.

De même :

$\frac{8}{11} + \frac{11}{8} = \frac{185}{88}$

qui vaut environ 2,10.

C'est encore vrai.

Cette propriété est vraie.

Basile

À l'aide de ma calculatrice j'ai essayé avec plusieurs fractions et je n'ai pas trouvé d'exemple tel que la somme $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ soit inférieure à 1.

La propriété est donc sûrement vraie !

Cécile

Prenons $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 1$

alors : $\frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} > 1$

d'où : $a^2 + b^2 > 2ab$

$a^2 + b^2 - 2ab > 0$

$(a-b)^2 > 0$

C'est vrai !

Delphine

Je cherche le signe de la différence :

$d = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2$. On a :

$d = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab}$

$d = \frac{(a-b)^2}{ab}$.

Le numérateur ainsi que le dénominateur étant positifs, d est positif, donc on a bien :

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$.

a. Critiquer chacune de ces argumentations.

b. Laquelle vous semble la meilleure ? Pourquoi ?

c. Rédiger une démonstration bien écrite.

Atividade 23

99 Trouver l'erreur

Puisque pour tout nombre x, $x - 2 \leqslant x$, alors $(x-2)^2 \leqslant x^2$, donc $x^2 - 4x + 4 \leqslant x^2$.
Ainsi $-4x \leqslant -4$, et donc $x \geqslant 1$.

Começando com os números inteiros positivos p e q, com p par, formamos os números

$$pq + 2, \qquad p^2 + q^3, \qquad (p+1)(q+1), \qquad (p+q)^2, \qquad p(q+1)$$

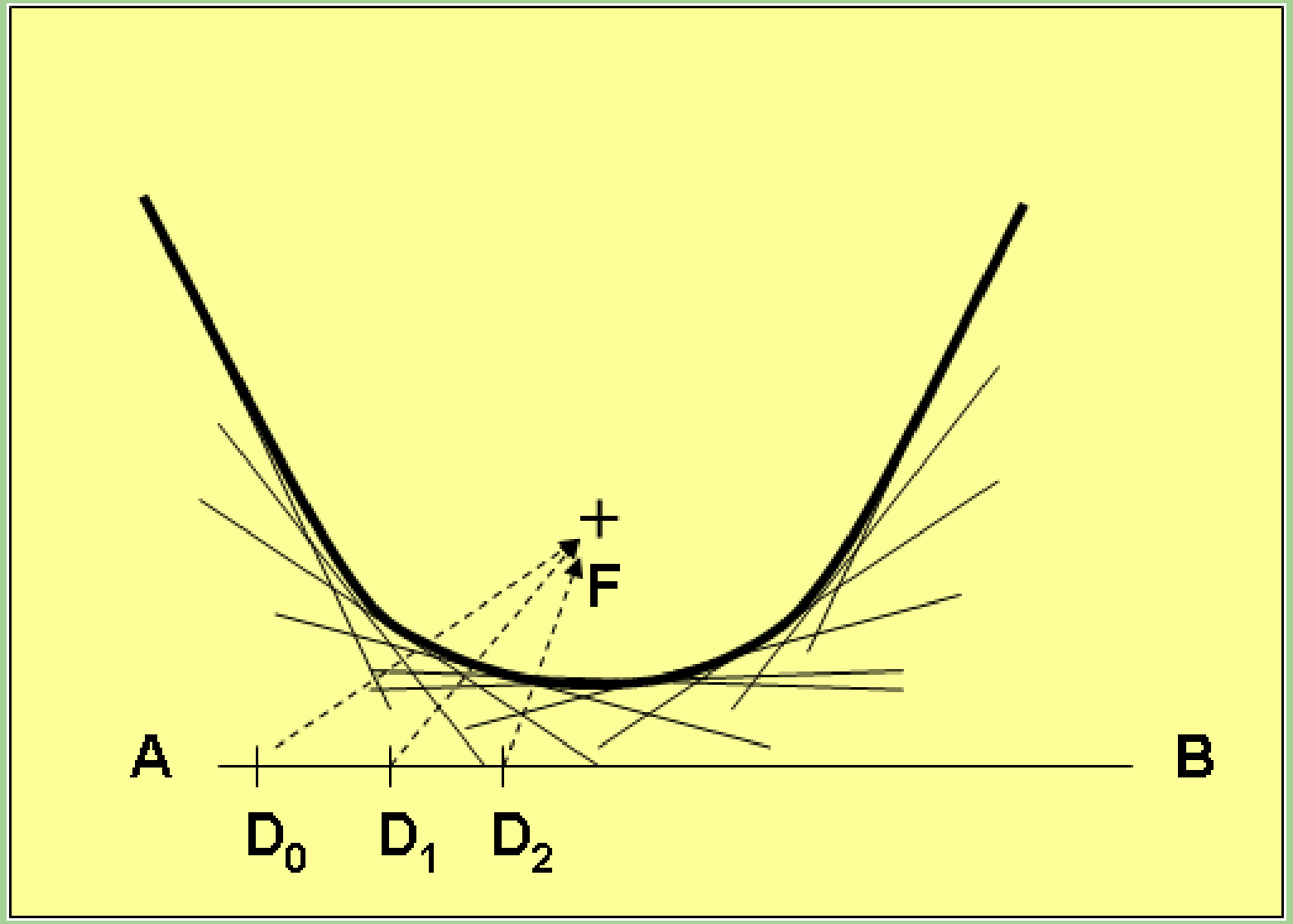
Destes cinco resultados, com certeza, quantos podem ser par?

p.q + 2
Sendo p par, temos:
Para q sendo par:
2.(2) + 2 = 6 (par)
Para q sendo ímpar:
2.(1) + 2 = 4 (par)
p.q + 2 = resultado par
$p^2 + q^3$
Sendo p par, temos:
Para q sendo par:
$(2)^2 + (2)^3 = 12$ (par)
Para q sendo ímpar:
$(2)^2 + (1)^3 = 5$ (ímpar)
$p^2 + q^3$ = nem sempre resulta em número par.
(p + 1).(q + 1)
Sendo p par, temos:
Para q sendo par:
(2 + 1).(2 + 1) = 9 (ímpar)

Para q sendo ímpar:
(1 + 1).(1 + 1)= 4 (par)
(p + 1).(q + 1) = nem sempre resulta em número par.
$(p + q)^2$
Sendo p par, temos:
Para q sendo par:
$(2 + 2)^2 = 16$ (par)
Para q sendo ímpar, temos:
$(2 + 1)^2 = 9$ (ímpar)
$(p + q)^2$ = nem sempre resulta em número par.

p.(q + 1)
Sendo p par, temos:
Para q sendo par:
2.(2 + 1) = 6 (par)
Para q sendo ímpar:
2.(1 + 1) = 4 (par)
p.(q + 1) = resultado par
Destes cinco resultados, com certeza, quantos podem ser par?
Resposta: Dos cinco resultados, apenas dois podem ser par: (p.q + 2) e p.(q + 1).

Atividade 24



Bibliografia:

Bolema. Boletim de Educação Matemática-Ano 15- Nº18-2002.

CORDEIRO, D.M.F. Um convite à Matemática: Fundamentos lógicos com Técnicas de Demonstração, Notas Históricas e Curiosidades, Segunda edição; Campina Grande, EDUFCG, 2007.

D'AMORE B.: Elementos da Didática da Matemática. Editora da Livraria da Física. São Paulo, 2007.

DAVIS, P. J. HERSH, R. A Experiência Matemática. Rio de Janeiro: F Alves, 1989.

FERNÁNDEZ, A. B. Projecto Saber Hacer. Matemáticas. Santillana Educación, S. L. Madrid, 2014.

GAUTHIER, R. L e outros. Math 2deProgramme 2000. Collection Indice. Bordas. Paris, 2000.

GRANDO, R.C e outros. Matemática em seu Tempo. Ensino Fundamental Anos Iniciais. Campinas, SP. Companhia da Escola, 2014

LILIAN N., TINOCO L.A. Argumentação e provas no ensino de matemática. Rio de Janeiro: UFRJ/Projeto Fundão, 2ed.,2003.

MALAGUTTI, P.L.A. Sampaio, J.C.S. Mágicas com papel, geometria e outros mistérios. Coleção Matemática. São Carlos, EduFSCar, 2014.

NELSEN, R.B. Proofs WithoutWords. Classroom Resource Materials of the Mathematical Association of America. Washington, USA, 1993.

OLIVEIRA, K. R. Atividades sobre demonstrações em matemática para o ensino básico. Tese Profmat. Unicamp, Campinas, 2016.

http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?view=000974062

PIETROPAOLO, R. C. (Re) Significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores da educação básica. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.