SÉRIES DE FOURIER

(Uma aplicação da trigonometria na engenharia de telecomunicações)

Autores: João Manoel R. Zaninotto
jmzani@gmail.com
Profª Maria Zoraide M C Soares
mzsoares@uol.com.br

Laboratório de Ensino de Matemática

ÍNDICE

1. OBJETIVO DO TRABALHO

Este trabalho é dirigido aos alunos do Curso de Especialização em Matemática para Professores do Ensino Fundamental e Médio.

Tem como objetivo ilustrar uma aula de trigonometria, apresentando o método desenvolvido pelo matemático *Fourier* (1768-1830).

O matemático francês ***Jean-Baptiste Joseph Fourier*** é reconhecido por iniciar a investigação sobre a decomposição de funções periódicas em séries trigonométricas convergentes, as chamadas séries de *Fourier*.

Seu trabalho foi mundialmente difundido após a publicação da obra "A teoria analítica do calor" [Ref. 1], baseada na aplicação desta técnica aos problemas da condução do calor.

Nota: O estudo de funções não-periódicas, e sua decomposição através da chamada transformada de Fourier, não estão no escopo deste trabalho.

2. FUNÇÕES PERIÓDICAS

Conforme desenvolvimento na seção 6.3.2 [ref. 2], as <u>séries de Fourier</u> permitem a análise de <u>sinais periódicos</u>.

Um sinal periódico é definido como aquele que apresenta repetição de seus valores a um intervalo definido de tempo, denominado **período:**

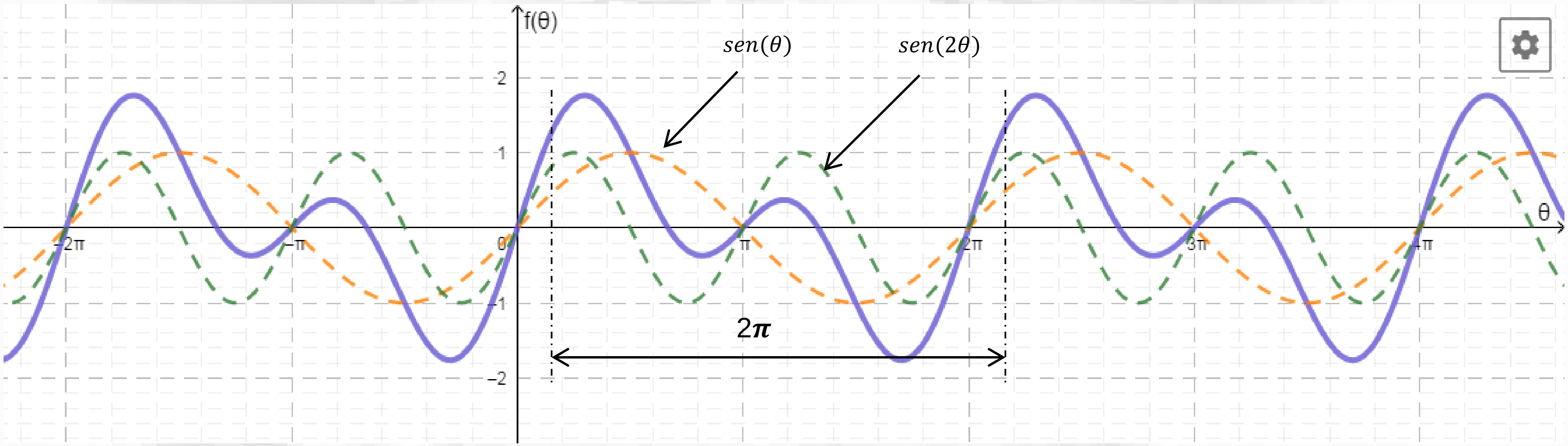
$f(t) = f(t + nT)$ [EQU. 1]

onde T é o valor deste intervalo (período [s]) e n indica um número inteiro.

Exemplo de uma função periódica

A seguinte função em θ :

$$f(\theta) = sen(\theta) + sen(2\theta) \qquad \text{[Equ. 2]}$$



Pode-se verificar que esta função é periódica, uma vez que seus valores se repetem a intervalos $\theta = 2\pi$, de modo que:

$$f(\theta) = f(\theta + 2k\pi), \text{ para } k \text{ inteiro} \qquad \text{[Equ. 3]}$$

Considerando o ângulo θ como uma função do tempo, tal que $\theta = \omega t,$ para um intervalo $\Delta\theta$ temos :

$$\Delta\theta = \omega \Delta t \text{ , onde } \Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} \quad ; \quad \text{[Equ. 4]} \qquad \text{onde} \begin{cases} t = \text{tempo [s]} \\ \theta = \text{ângulo [rad]} \\ \omega = \text{freq. angular [rad/s]} \end{cases}$$

Assim, para a função completar um ciclo (2π), o tempo associado é definido como período (T):

$$T = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega} \quad ; \quad \text{[Equ. 5]} \qquad \text{onde} \begin{cases} \text{T = período [s]} \end{cases}$$

O inverso do período, representando a quantidade de ciclos por unidade de tempo, é denominado frequência (f) :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad ; \quad \text{[Equ. 6]} \qquad \text{onde} \begin{cases} f \text{ = frequência [ciclos/s] ou [hertz]} \end{cases}$$

3. SÉRIES DE FOURIER

Ainda na seção 6.3.2 [Ref.2], verifica-se que a representação na <u>notação trigonométrica</u> da série de Fourier de um sinal periódico $f(t)$, é tal que:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \omega_n t + b_n \, sen \, \omega_n t) \qquad \text{[Equ. 7]}$$

sendo C_0, a_n e b_n, os chamados coeficientes de Fourier, obtidos pelas expressões abaixo:

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt \qquad \text{[Equ. 8]}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \omega_n t \, dt \qquad \text{[Equ. 9]}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \,\mathrm{sen}\, \omega_n t \, dt \qquad \text{[Equ. 10]}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots \infty$

para n=1, $\omega_n = \omega$
freq. fundamental

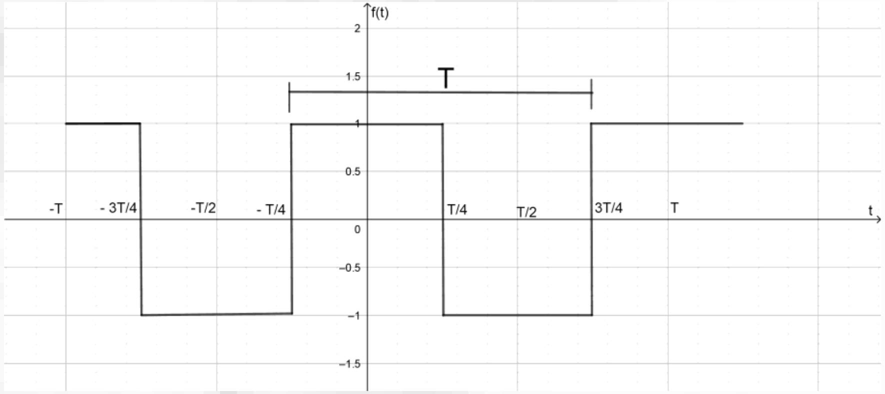
Desta maneira, um <u>sinal periódico $f(t)$</u> pode ser representado como uma série de <u>senos e cossenos</u> múltiplos da frequência fundamental ω, somados a um valor constante (C_0).

4. A ONDA QUADRADA

<u>ANÁLISE</u>: Onda quadrada com C_0 = 0 (simetria em relação ao eixo-x).
Propriedades desta função em relação à posição relativa do eixo-y:

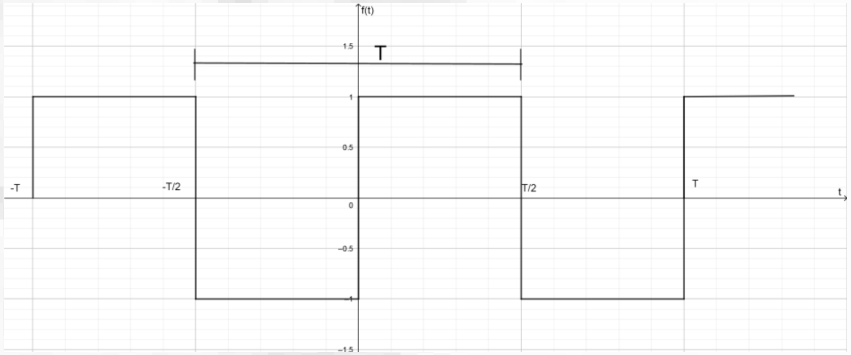
Caso A - onda quadrada
como função par:

$$f(t) = -f(t)$$



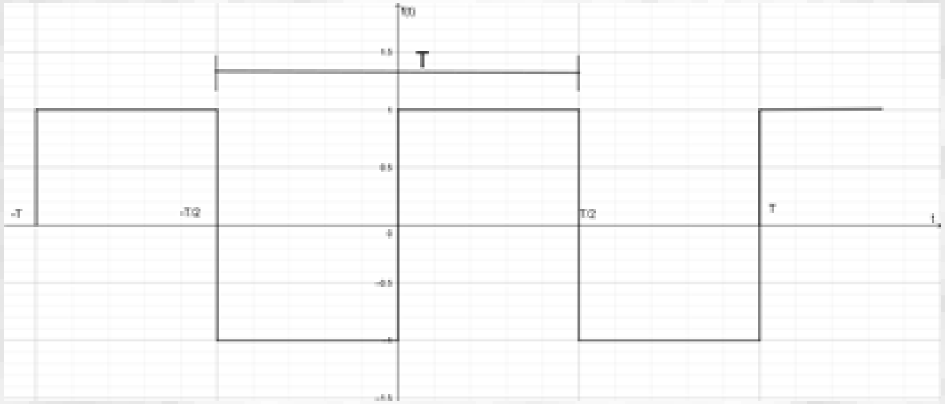
Caso B - onda quadrada
como função ímpar:

$$f(t) = -f(-t)$$



Pode-se demonstrar que, sendo uma função par, a onda quadrada do caso A apresentará <u>somente os termos em cosseno</u> (b_n= 0, na Equ.7), pois o cosseno é uma função par.
Da mesma forma, a onda quadrada do caso B apresentará <u>somente os termos em seno</u> (a_n = 0, na Equ.7), uma vez que o seno é uma função ímpar.

Análise da onda quadrada do caso B (função ímpar)



Avaliação de C_0 e a_n, conforme apresentados nas Equ. 8 e 9:

1) $C_0 = 0,$ pois a integral de $f(t)$ de 0 a T é nula (área calculada de 0 a T/2 cancela a área calculada de T/2 a T);

2) a_n= 0, pois os termos em cosseno são nulos (propriedade da função ímpar).

No caso da onda quadrada com período T, existe ainda uma simetria de meia onda, de modo que: $f(t) = -f(t + T/2)$ [Equ. 11]

Pode-se demonstrar que esta simetria permite simplificar os cálculos dos coeficientes da série de Fourier, b_n, apresentados na Equ. 10, de modo que:

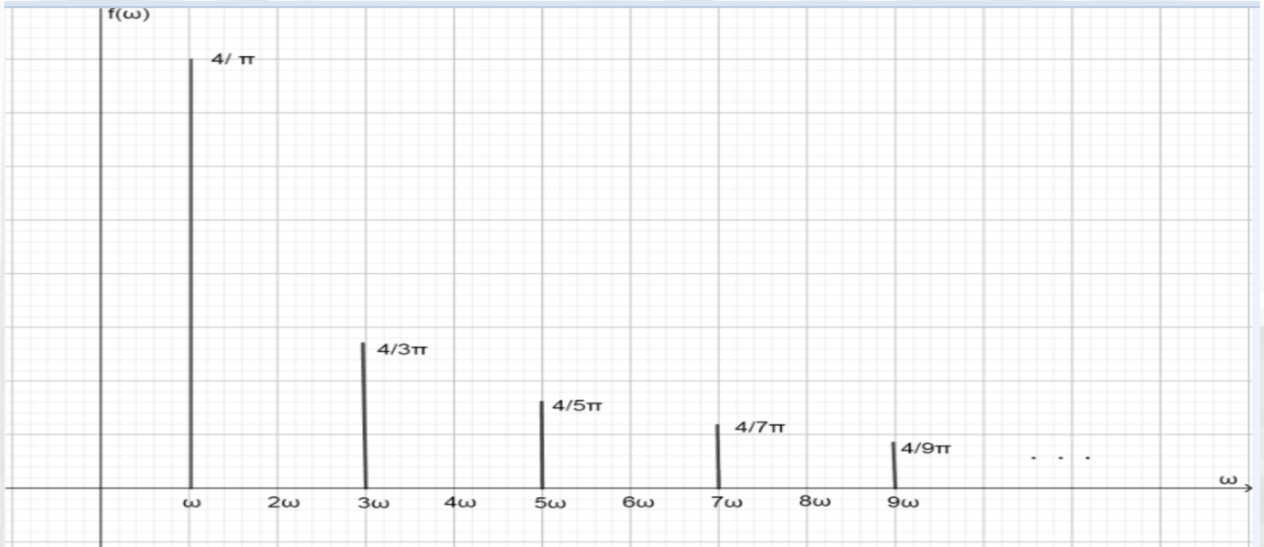
3) $$b_n = \begin{cases} 0 & , se\ n\ par \\ 4/n\pi & , se\ n\ ímpar \end{cases}$$

Assim, aplicando-se este resultado na Equ. 7, a expressão do sinal $f(t)$, representando uma onda quadrada, torna-se:

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(sen\ \omega t + \frac{1}{3} sen\ 3\omega \mathrm{t} + \frac{1}{5}\ sen\ 5\omega \mathrm{t} + \frac{1}{7} \mathrm{sen} 7\omega \mathrm{t} + \frac{1}{9} \mathrm{sen} 9\omega \mathrm{t} \ldots\right) \quad \text{[Equ. 12]}$$

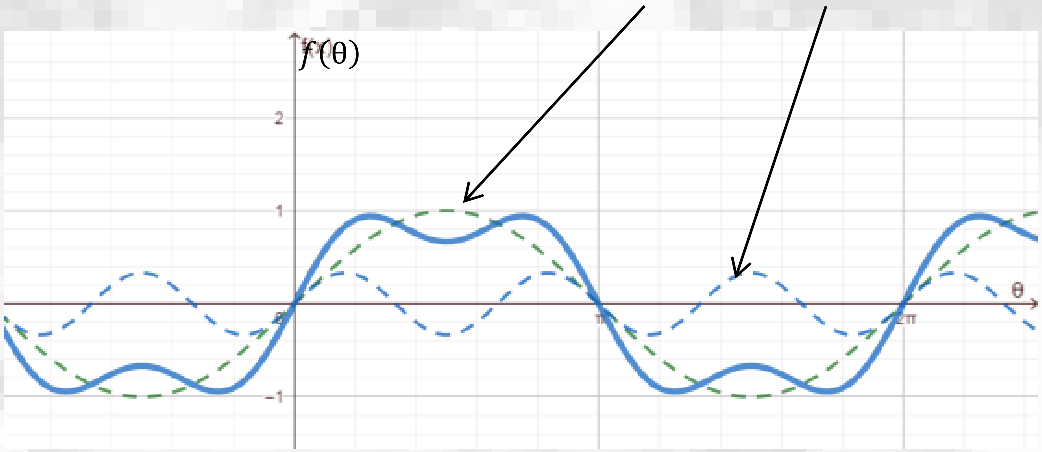
Observando os termos da Equ. 12, conclui-se que um sinal de onda quadrada é composto somente pelas harmônicas ímpares (n = 1, 3, 5, 7, 9 ...) da frequência fundamental (ω). Esta é uma série trigonométrica convergente.

A função representada agora como $f(\omega)$, em função da frequência, tem o seguinte aspecto:

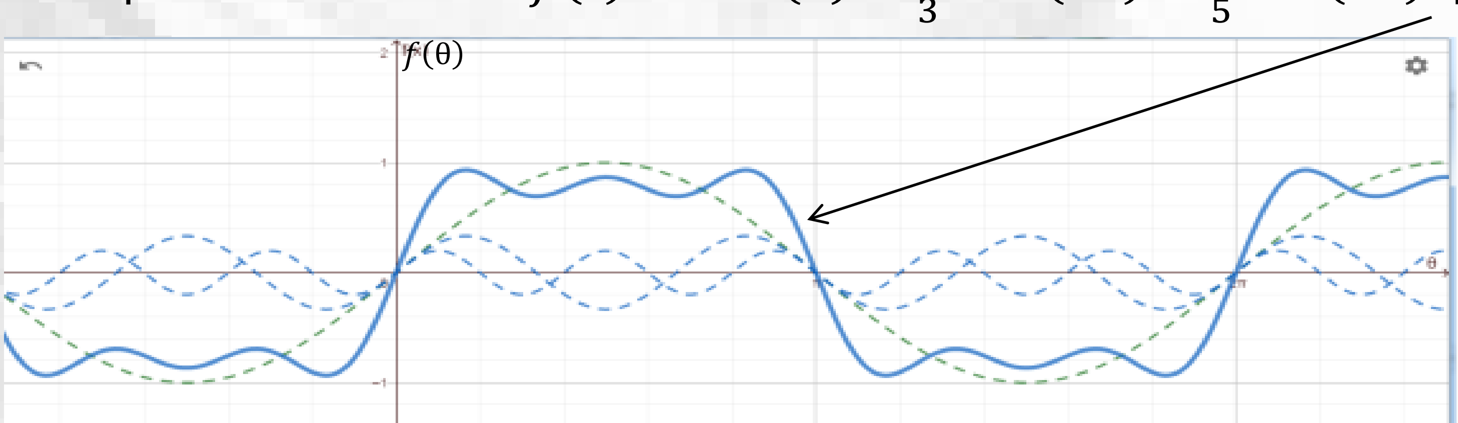


No processo inverso, pode-se fazer a síntese da onda quadrada, utilizando a ferramenta GeoGebra, a partir da expressão da Equ. 12. O fator $4/\boldsymbol{\pi}$, por ser apenas um fator de escala, não está representado nesta síntese.

1) Soma dos 2 primeiros termos: $f(\theta) = sen(\theta) + \frac{1}{3}\ sen(3\theta)$ [Equ. 13]

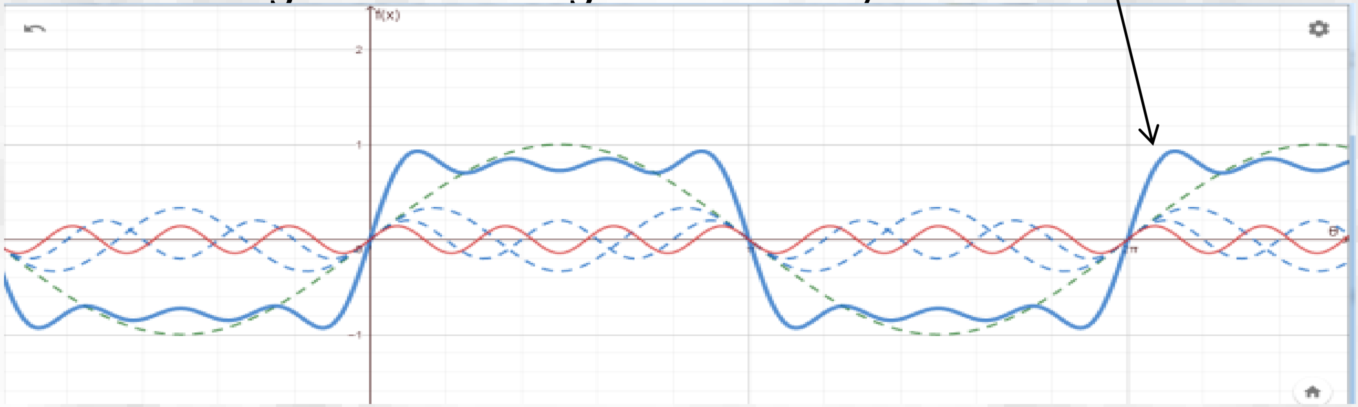


2) Soma dos 3 primeiros termos: $f(t) = sen(\theta) + \frac{1}{3}\ sen(3\theta) + \frac{1}{5} sen(5\theta)$ [Equ. 14]

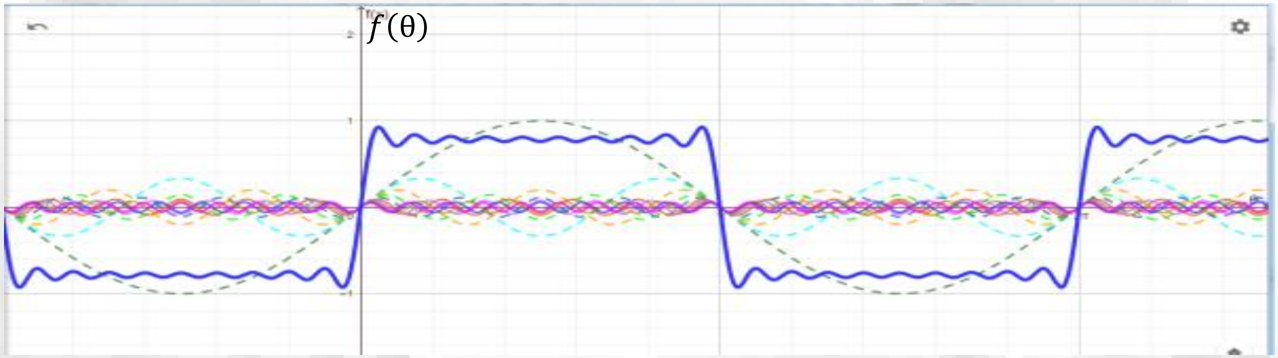


3) Soma dos 4 primeiros termos:

$$f(t) = sen(\theta) + \frac{1}{3}\,sen(3\theta) + \frac{1}{5}\,sen(5\theta) + \frac{1}{7}\,sen(7\theta)$$ [Equ. 15]



4) Soma dos 10 primeiros termos: $f(t) = sen(\theta) + \frac{1}{3}\,sen(3\theta) + \frac{1}{5}\,sen(5\theta) + \cdots + \frac{1}{19}\,sen(19\theta)$ [Equ. 16]

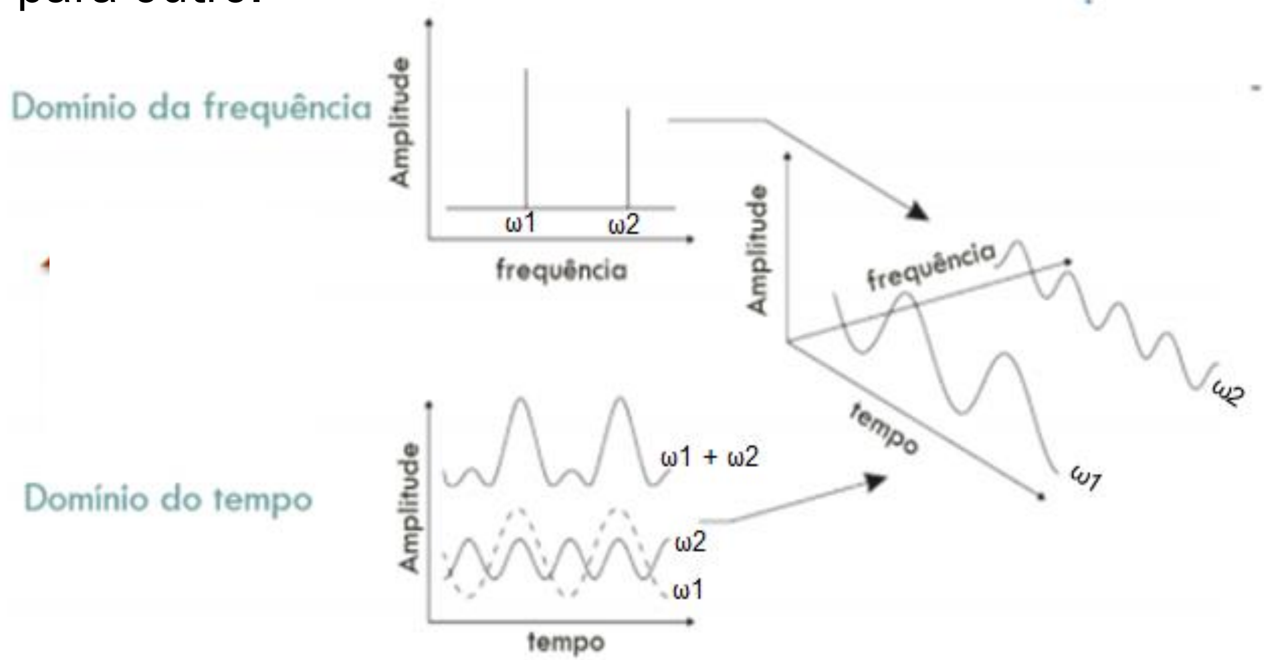


Conclusão: a figura resultante vai se aproximando da onda quadrada, à medida que mais termos vão sendo considerados na soma.

5. DOMÍNIO DO TEMPO E DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Uma interessante representação pictórica da soma de duas frequências (ω1 e ω2), é apresentada em DOMÍNIO DO TEMPO VS DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA [Ref. 3], mostrada em 3 dimensões: amplitude, tempo e frequência.
Dado um sinal complexo, a sua amplitude (eixo ordenadas) pode ser representada graficamente tendo como abscissa tanto o eixo dos tempos (domínio do tempo) quanto o eixo das frequências (domínio da frequência):

Ainda de acordo com a [Ref. 3], “Domínio do tempo e domínio da frequência são duas maneiras de olhar para o mesmo sistema dinâmico.” “Eles são permutáveis entre si, isto é, nenhuma informação é perdida na mudança de um domínio para outro.”

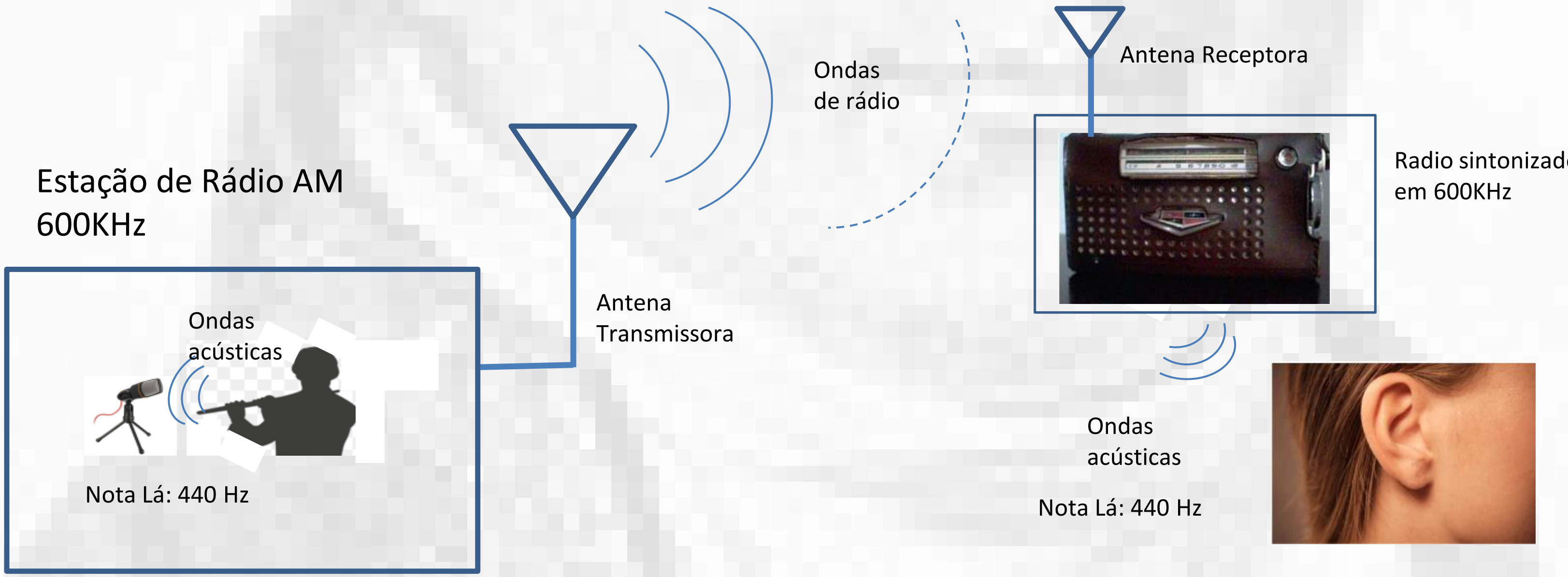


6. EXEMPLO DE ANÁLISE: RÁDIO AM

O tipo de sinal transmitido pelas estações de rádio AM (faixa de 500 a 1600 KHz) é denominado AM-DSB, sigla que significa *Amplitude Modulation Double-Sideband.* O seu significado pode ser entendido como “um sinal de áudio que modula a amplitude da portadora (domínio do tempo), gerando duas faixas laterais em torno desta portadora, no domínio da frequência”.

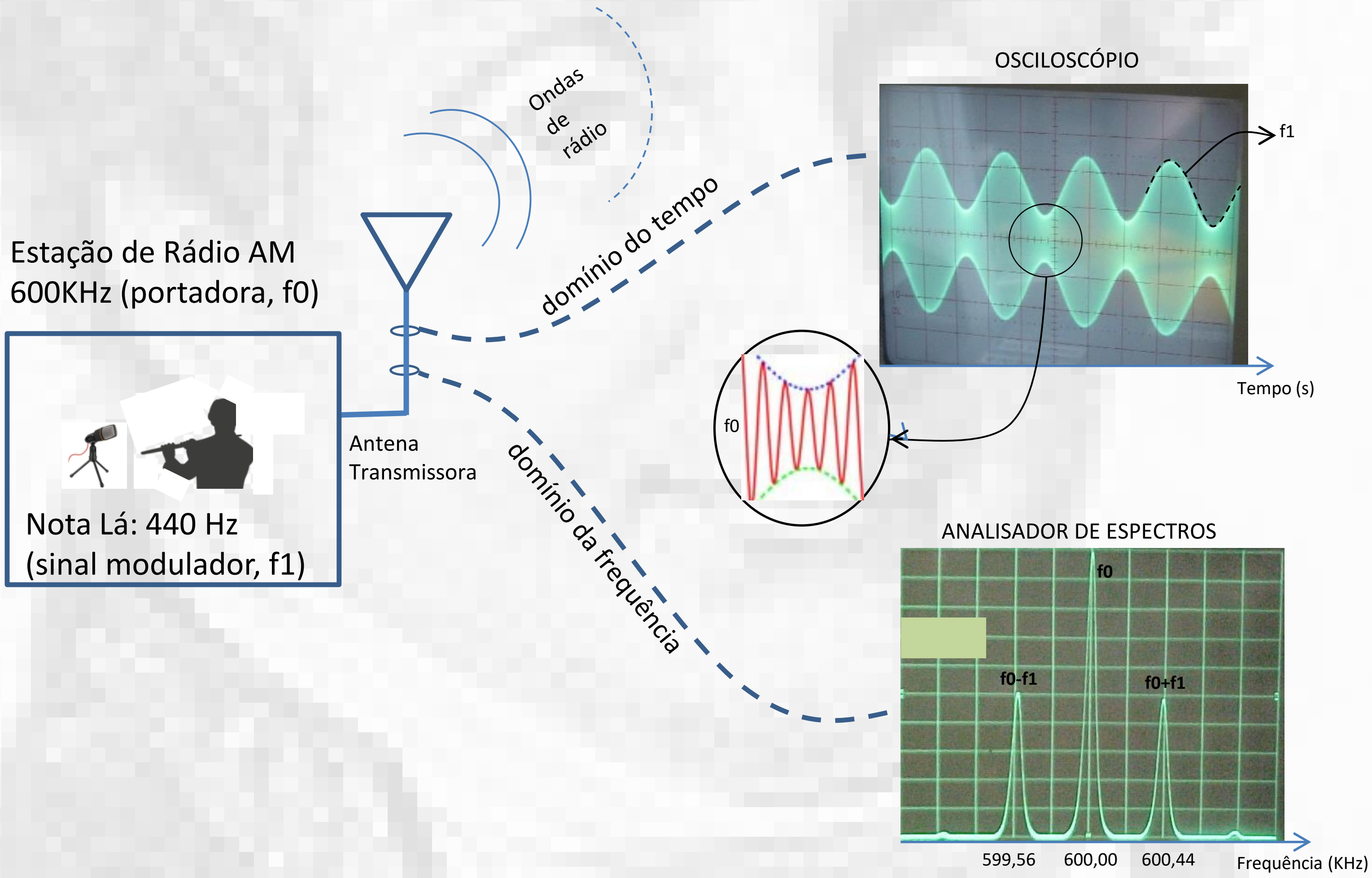
Neste exemplo temos uma estação de rádio AM, transmitindo na frequência de 600 KHz (f0). Como sinal modulador temos um flautista emitindo a nota Lá, em 440 Hz (f1).

O ouvinte, quando sintonizar o seu radinho de pilha em 600 KHz, irá escutar o tom (nota Lá) emitida pelo flautista.



Análise do sinal transmitido.

O sinal transmitido pela estação de rádio pode ser analisado no domínio do tempo, com o auxílio de um osciloscópio, ou no domínio da frequência, com auxílio de um analisador de espectros.



7. CONCLUSÃO

As *séries de Fourier* são uma ferramenta que permite representar um sinal periódico como uma soma infinita de componentes senoidais (senos e cossenos).

As *séries de Fourier* são utilizadas para transformar para o domínio da frequência um sinal representado originalmente no domínio do tempo.
Essa mudança de domínio pode trazer grande vantagem para análise, principalmente quando certas características do sinal não forem observáveis no domínio original.

Muitas áreas da Engenharia, por exemplo Telecomunicações, têm nas *séries de Fourier* uma poderosa ferramenta de trabalho. O principal equipamento utilizado para este fim é o analisador de espectros

8. REFERÊNCIAS

1. A teoria analítica do calor de Joseph Fourier: uma análise das bases conceituais e epistemológicas
Anderson Pifer , Katya Margareth Aurani
Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 37, n. 1, 1603 (2015) www.sbfisica.org.br
http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11173711681

2. Telecomunicações – Sistemas Analógico-Digitais
Marcelo P. Ribeiro e O. Barradas
Embratel
Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.
1980

3. ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Depto de Engenharia Mecatrônica
Sistemas Dinâmicos II para Mecatrônica
Profa. Larissa Driemeier
https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/2247566/mod_resource/content/1/Material_Aulas01e02.pdf