



Ciência & Arte nas Férias

*Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas*

Transformações Geométricas:

Aplicação nos Movimentos de Braços Robóticos

Petronio Pulino

DMA – IMECC / UNICAMP

Claudina Izepe Rodrigues

DM – IMECC / UNICAMP

Monitores(as): *Luana Pinheiro Rodrigues de Aguiar e Jean Carlos Aparecido Medeiros*

Colaboradores(as): *Mariana Xavier Galhardi*





UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas

Pró-Reitoria de Pesquisa

CAF 2017

Transformações Geométricas: Aplicação nos Movimentos de Braços Robóticos

Petronio Pulino e Claudina Izepe Rodrigues

30 de Janeiro de 2017

Conteúdo

1	<i>Resumo</i>	3
2	<i>Objetivos</i>	3
3	<i>Descrição das atividades</i>	4
4	<i>O Plano Cartesiano</i>	5
5	<i>Transformações do Plano no Plano</i>	8
6	<i>Atividades com Transformações Geométricas</i>	15
7	<i>Representação Matricial</i>	17
8	<i>Rotação no Plano</i>	24
9	<i>Matriz de Rotação</i>	26
9.1	Cinemática Direta	26
9.2	Cinemática Inversa	27
10	<i>Atividades com Rotações no Plano</i>	38
11	<i>O Espaço Tridimensional</i>	52
11.1	Transformações no Espaço Tridimensional	53
11.2	Composição de Transformações	58
12	<i>Movimentos de Braços Robóticos</i>	61
	<i>Bibliografia</i>	62
	<i>QR code – Link do Texto no Dropbox</i>	62
	<i>Citação</i>	62



UNICAMP

A matemática nos auxilia na interpretação da realidade e na tomada de decisões . . .

Deixe-se levar por seus caminhos, estude!

Descubra como a matemática influencia suas ações e ela se tornará encantadora . . .

Sucesso !

Esmeralda Palumbo Proença Pulino

1 *Resumo*

O tema proposto para a oficina, procurando seguir a filosofia do *Ciência & Arte nas Férias*, tem por objetivo despertar no aluno o interesse pelo estudo da matemática de uma forma interdisciplinar, mostrando que os conteúdos apresentados na disciplina são encontrados em várias situações cotidianas. Assim, podemos explorar o tema robótica de diversas maneiras através de suas aplicações na automação industrial, na medicina, em especial em procedimentos de neurocirurgias, e no desenvolvimento tecnológico em geral. Como exemplo, podemos assistir o vídeo disponível no YouTube com a apresentação da modelo Amy Purdy com o robot kuka na olimpíada do Rio 2016: <https://www.youtube.com/watch?v=GaLyVtcpPz4>. Nosso propósito será apresentar uma formalização matemática dos movimentos de um braço robótico com dois graus de liberdade, isto é, uma base circular com um movimento de rotação em torno do seu centro e um braço com um movimento de rotação em relação a um eixo fixado perpendicularmente à base. Mostraremos então, diversas aplicações de conteúdos da matemática onde, costumeiramente, os alunos apresentam dificuldades de assimilação devido a sua aparente abstração e um certo distanciamento da realidade. Considerando o tema proposto, pretendemos mostrar aplicações dos conceitos de matrizes, de trigonometria, de rotações no plano e de rotações no espaço tridimensional, para descrever a posição da extremidade de um braço robótico no espaço. Desse modo, esperamos contribuir ampliando a compreensão da utilização dos conceitos de matrizes e transformações geométricas do plano, atuando de modo afirmativo na visão do aluno em relação ao estudo da matemática. Com essa proposta nosso objetivo é contextualizar a matemática, apresentando-a como uma ferramenta poderosa para observar com outros olhos as diversas situações a nossa volta e suas diversas aplicações nas várias áreas da ciência e da tecnologia. Assim, reforçamos para o aluno que a matemática é uma disciplina importante e necessária à sua formação e para o desenvolvimento de um país.

2 *Objetivos*

Nosso objetivo central é construir, simular os movimentos e descrever as transformações geométricas em um braço robótico. Para tanto, utilizaremos conceitos de matrizes e de trigonometria na descrição das transformações geométricas e o aplicativo GeoGebra na simulação dos movimentos. Também utilizaremos o mesmo aplicativo para resolver as atividades propostas a respeito das transformações geométricas. Iniciaremos conceituando as seguintes transformações geométricas definidas no plano cartesiano: expansão, contração e escala não-uniforme; reflexões em torno dos eixos coordenados; reflexão em torno da reta $y = x$ e rotações em torno de um ponto fixo no sentido horário e no sentido anti-horário. Em seguida usaremos matrizes para representar cada uma dessas transformações geométricas. Conceituaremos translação, uma transformação que não pode ser representada através de matrizes. Todos esses conceitos serão apresentados com vários exemplos, para que o aluno possa compreender suas aplicações dentro do tema proposto. E, finalmente, vamos conceituar as rotações no espaço tridimensional, em especial as rotações em torno dos eixos coordenados e suas representações por meio de matrizes. Apresentar as noções básicas sobre os braços robóticos e o conceito de grau de liberdade. É importante ressaltar que o GeoGebra é um aplicativo livre, e sua utilização no ensino médio vem sendo cada vez mais difundida. O aplicativo GeoGebra, para diferentes sistemas operacionais, pode ser obtido no link: <https://www.geogebra.org/download>.

3 *Descrição das atividades*

Aplicaremos conceitos e resultados sobre transformações geométricas, tanto no plano quanto no espaço tridimensional, na construção da animação de um braço robótico com dois graus de liberdade, utilizando o aplicativo GeoGebra. Esse é um aplicativo livre que tem como finalidade auxiliar o ensino de matemática uma vez que são abordados temas como geometria, álgebra e cálculo. Para a construção da animação, utilizaremos o recurso 3D do programa e também o *CAS – Computer Algebra System*, ou *Sistema de Computação Algébrico*, que permite realizar cálculos simbólicos. As atividades propostas na oficina terão como objetivo compreender os conceitos e as aplicações das transformações geométricas bem como facilitar a apresentação do programa GeoGebra e, ao mesmo tempo, auxiliar na construção da animação do braço robótico. Assim, mostraremos a sua utilidade como ferramenta complementar e eficiente para o desenvolvimento, estudo, aprendizado e melhor entendimento dos conceitos propostos na oficina. Para melhorar o entendimento e auxiliar na visualização dos conceitos geométricos aplicados na elaboração de um simulador, apresentaremos também a construção de um protótipo de um braço robótico com dois e três graus de liberdade, na forma de um projeto escolar, que é bastante explorado para facilitar o entendimento sobre o tema e também uma maneira de provocar a criatividade do aluno. Na Figura 1 temos o protótipo de um braço robótico com dois graus de liberdade, que utiliza duas seringas para realizar os movimentos. A realização de atividades simulando de um braço robótico com dois graus de liberdade com movimentos no plano, é uma forma de complementar os conceitos que utilizaremos nas simulações tridimensionais. Finalmente, podemos dizer que o conjunto das atividades propostas serão importantes para mostrar aos alunos que o desenvolvimento de uma nova tecnologia em robótica necessita também de um bom conhecimento de matemática, evidentemente também são necessárias as contribuições de outras áreas da ciência.

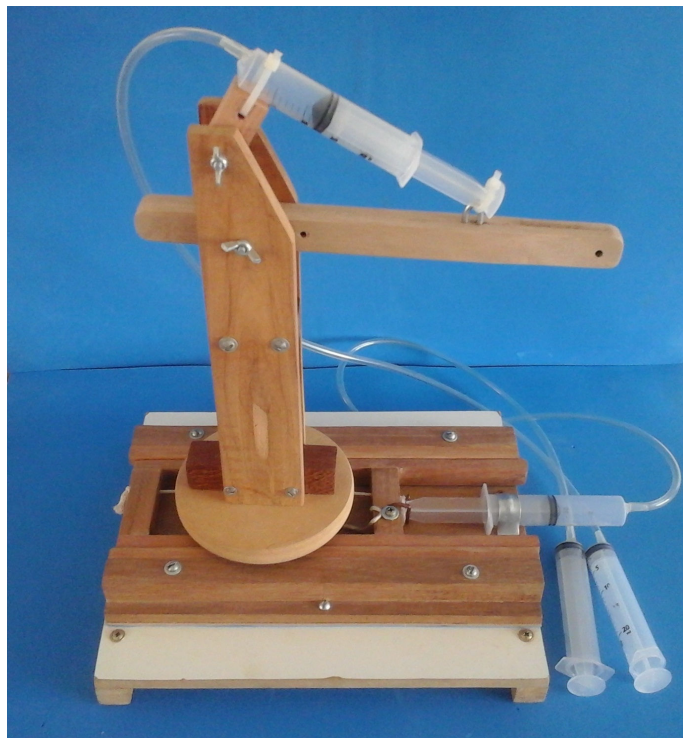


Figura 1: Protótipo de um braço robótico com dois graus de liberdade

No link abaixo, vídeo disponível no YouTube, mostramos os movimentos do braço robótico:

<https://www.youtube.com/watch?v=QTESD12IAxA>

4 O Plano Cartesiano

O plano cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é o exemplo mais importante de produto cartesiano. Os elementos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ são os pares ordenados de números reais. Os pares ordenados, de certa forma, podem representar as coordenadas cartesianas de um ponto P de um plano Π , onde x é a **abscissa** e y é a **ordenada**, quando fixamos nesse plano um par de eixos perpendiculares, que vamos indicar por OX e OY , denominados **eixo das abscissas** e **eixos das ordenadas**, respectivamente, que se interceptam no ponto $O = (0, 0)$, chamado **origem** do sistema de coordenadas.

Dado o ponto $P \in \Pi$, a abscissa de P é o número x , coordenada do pé da perpendicular baixada do P sobre o eixo OX , enquanto a ordenada de P é o número y , coordenada do pé da perpendicular baixada de P sobre o eixo OY . Assim, dizemos que (x, y) é o par de **coordenadas** do ponto P relativamente ao sistema de eixos perpendiculares, como ilustra a Figura 2.

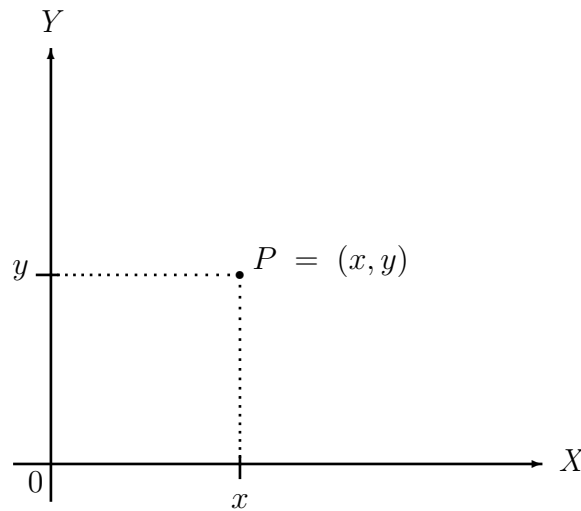


Figura 2: O Plano Numérico $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Podemos observar que os eixos OX e OY dividem o plano em quatro regiões, chamadas **quadrantes**, caracterizadas pelos sinais das coordenadas de seus pontos. Desse modo, no *primeiro quadrante*, tem-se $x \geq 0$ e $y \geq 0$. No *segundo quadrante*, tem-se $x \leq 0$ e $y \geq 0$. No *terceiro quadrante*, tem-se $x \leq 0$ e $y \leq 0$. No *quarto quadrante*, tem-se $x \geq 0$ e $y \leq 0$, como ilustra a Figura 3.

A aplicação $f : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que associa a cada ponto P do plano Π seu único par de coordenadas $f(P) = (x, y)$, relativamente ao sistema de eixos perpendiculares, é uma bijeção, isto é, uma correspondência biunívoca entre os elementos de \mathbb{R}^2 e de Π . Dessa maneira, temos que a aplicação $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \Pi$ associa a cada par de coordenadas (x, y) de \mathbb{R}^2 um único ponto $f^{-1}(x, y) = P$ do plano Π .

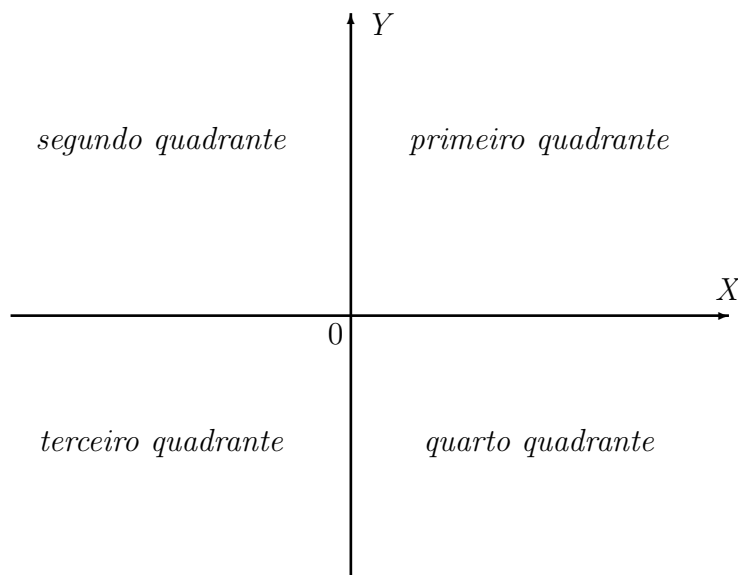


Figura 3: Enumeração dos Quadrantes do Plano Numérico \mathbb{R}^2 .

Portanto, a aplicação f permite traduzir conceitos e propriedades geométricas para uma linguagem algébrica e, reciprocamente, permite interpretar geometricamente relações entre números reais. Assim, podemos dizer que \mathbb{R}^2 é o modelo aritmético do plano Π , enquanto o plano Π é o modelo geométrico do plano numérico \mathbb{R}^2 . Assim, com a identificação entre \mathbb{R}^2 e um plano Π do espaço Euclidiano, realizada pela bijeção f , podemos olhar para o \mathbb{R}^2 como um plano, plano numérico, e chamaremos seus elementos $P = (x, y)$ de **pontos**. Utilizando essa nova linguagem, que relaciona conceitos algébricos com conceitos geométricos, temos que melhorar nosso entendimento sobre as propriedades das funções reais.

Exemplo 1 *É importante observar que o conjunto $S = \{A, B, C, D, E, F\}$, onde*

$$\begin{aligned} A &= \left(1, \frac{1}{2}\right) & , & & B &= \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) & , & & C &= \left(\frac{1}{2}, 3\right) \\ D &= \left(-\frac{1}{2}, 3\right) & , & & E &= \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) & , & & F &= \left(-1, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

é um subconjunto do produto cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e que quando marcamos esses pares ordenados no plano cartesiano, estamos fazendo a representação gráfica do subconjunto $S \subset \mathbb{R}^2$. Note que no Exemplo 2, temos uma situação dessa representação gráfica do conjunto S . Além disso, aproveitamos para representar a poligonal definida quando ligamos esses pontos, considerando que os pontos são apresentados em uma determinada ordem.

Exemplo 2 Considere os seguintes pares ordenados pertencentes a $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} A &= \left(1, \frac{1}{2}\right) & , & & B &= \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) & , & & C &= \left(\frac{1}{2}, 3\right) \\ D &= \left(-\frac{1}{2}, 3\right) & , & & E &= \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) & , & & F &= \left(-1, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

- (a) Represente os pares ordenados acima no plano cartesiano.
- (b) Ligue os pontos marcados no plano cartesiano, obtendo um polígono.
- (c) Sabendo que cada quadradinho do reticulado, da figura abaixo, tem $0,25\text{ m}^2$, determine a área da região limitada pelo polígono obtido no item (b).

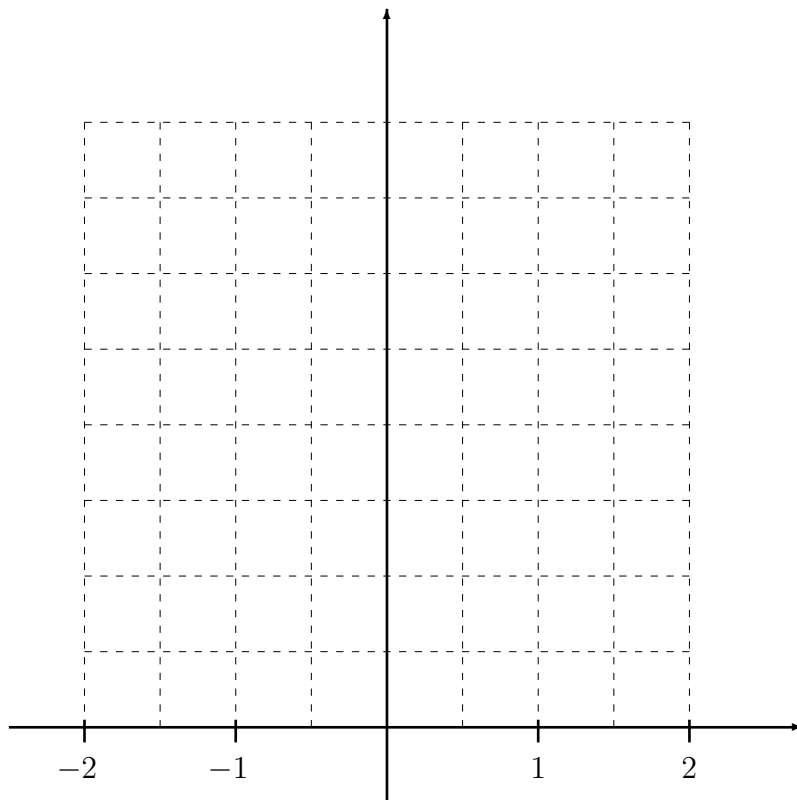


Figura 4: Representação gráfica do Exemplo 2.

5 Transformações do Plano no Plano

Definição 1 Considere o plano cartesiano \mathbb{R}^2 , e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ fixo. A transformação

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow T(x, y) = \lambda(x, y) \end{aligned}$$

é uma contração para $|\lambda| < 1$. Quando $|\lambda| > 1$, dizemos que T é uma expansão.

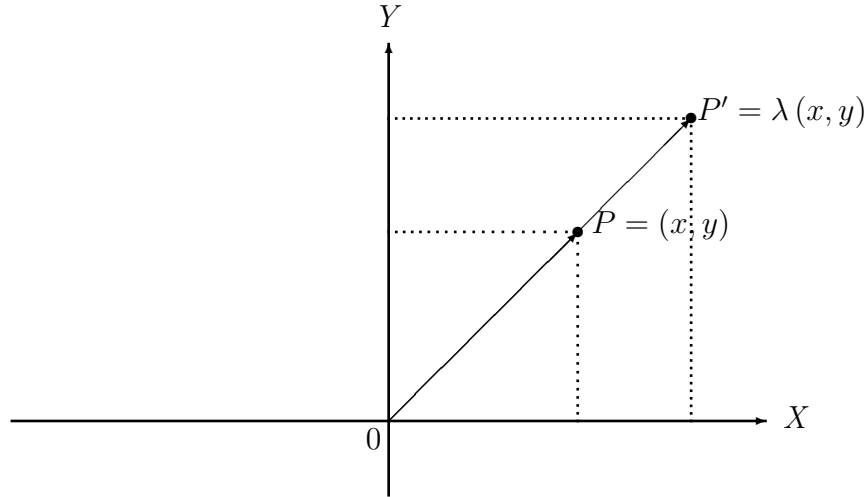


Figura 5: Expansão de parâmetro $\lambda > 1$.

Fica difícil imaginar como é que um ponto pode sofrer uma expansão ou uma contração. Entretanto, considerando o segmento de reta OP , fica fácil ver que foi o segmento de reta que sofreu uma expansão ou uma contração, como ilustra a Figura 5.

Definição 2 Considere o plano cartesiano \mathbb{R}^2 . A transformação

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow T(x, y) = (x, -y) \end{aligned}$$

é denominada uma **reflexão em torno do eixo- OX** .

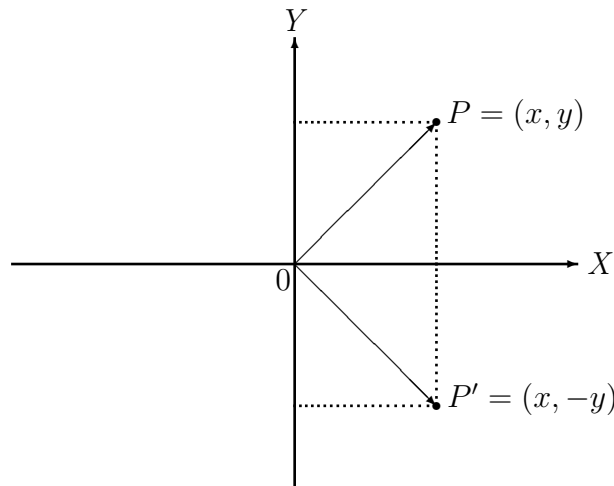


Figura 6: Reflexão em torno do eixo- OX .

Definição 3 Considere o plano cartesiano \mathbb{R}^2 . A transformação

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow T(x, y) = (-x, y) \end{aligned}$$

é denominada uma **reflexão em torno do eixo- OY** .

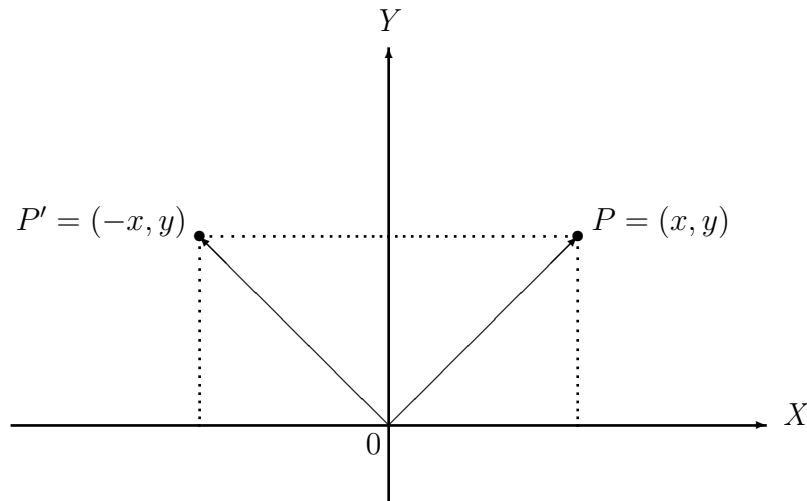


Figura 7: Reflexão em torno do eixo- OY .

Definição 4 Considere o plano cartesiano \mathbb{R}^2 . A transformação

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow T(x, y) = (-x, -y) \end{aligned}$$

é denominada uma **reflexão em torno da origem**.

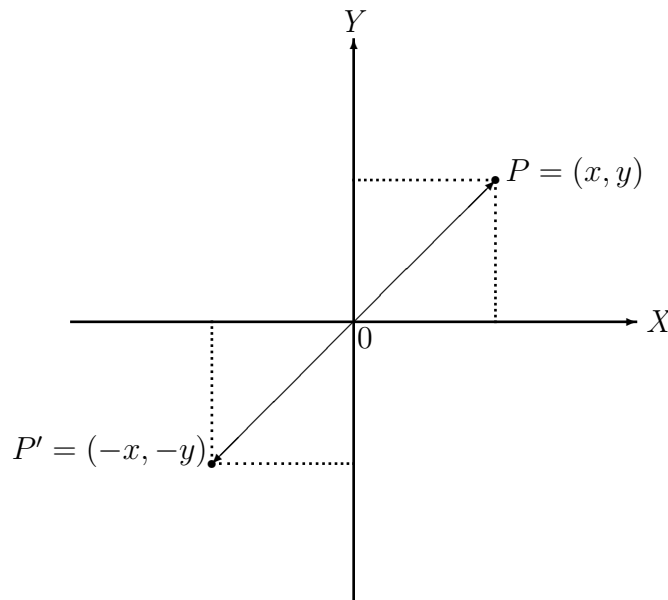


Figura 8: Reflexão em torno da origem do sistema de coordenadas.

Definição 5 Considere o plano cartesiano \mathbb{R}^2 e um elemento fixo, porém arbitrário, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. A transformação

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow T(x, y) = (x, y) + (a, b) = (x + a, y + b) \end{aligned}$$

é denominada uma **translação**.

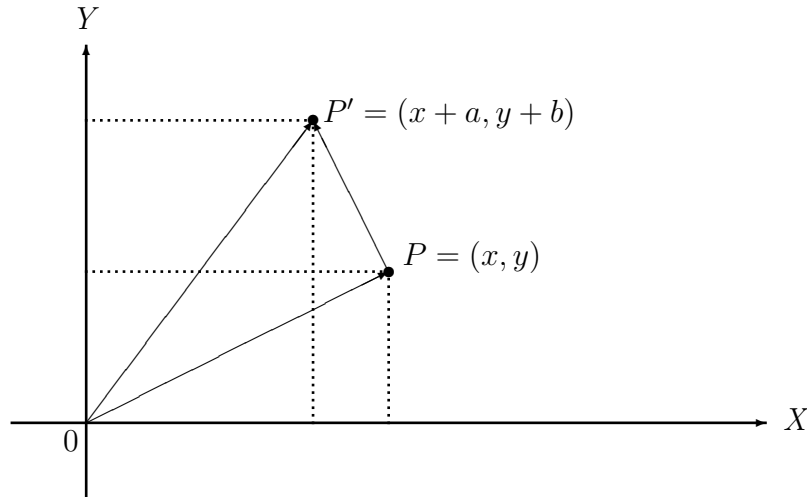


Figura 9: Translação.

Definição 6 Considere o plano cartesiano \mathbb{R}^2 . A transformação

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow T(x, y) = (y, x) \end{aligned}$$

é denominada uma **reflexão em torno da reta $y = x$** .

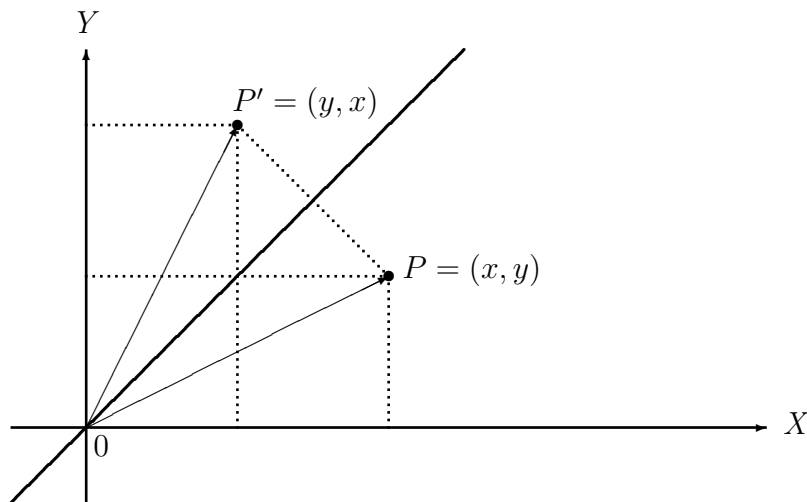


Figura 10: Reflexão em torno da reta $y = x$.

Exemplo 3 Considere o quadrilátero $ABCD$ cujos vértices são dados pelos pontos

$$A = (3, -1) \quad , \quad B = (6, -3) \quad , \quad C = (3, -5) \quad e \quad D = (0, -3) \quad .$$

- (a) Faça a representação gráfica no plano numérico do quadrilátero $ABCD$.
- (b) Determine a imagem do quadrilátero $ABCD$ pela transformação T_1 que representa a reflexão em torno da reta $y = x$.
- (c) Faça a representação gráfica no plano numérico da imagem do quadrilátero $ABCD$ pela transformação T_1 .
- (d) Determine a imagem do quadrilátero $ABCD$ pela transformação T_2 que representa a reflexão em torno da origem.
- (e) Faça a representação gráfica no plano numérico da imagem do quadrilátero $ABCD$ pela transformação T_2 .

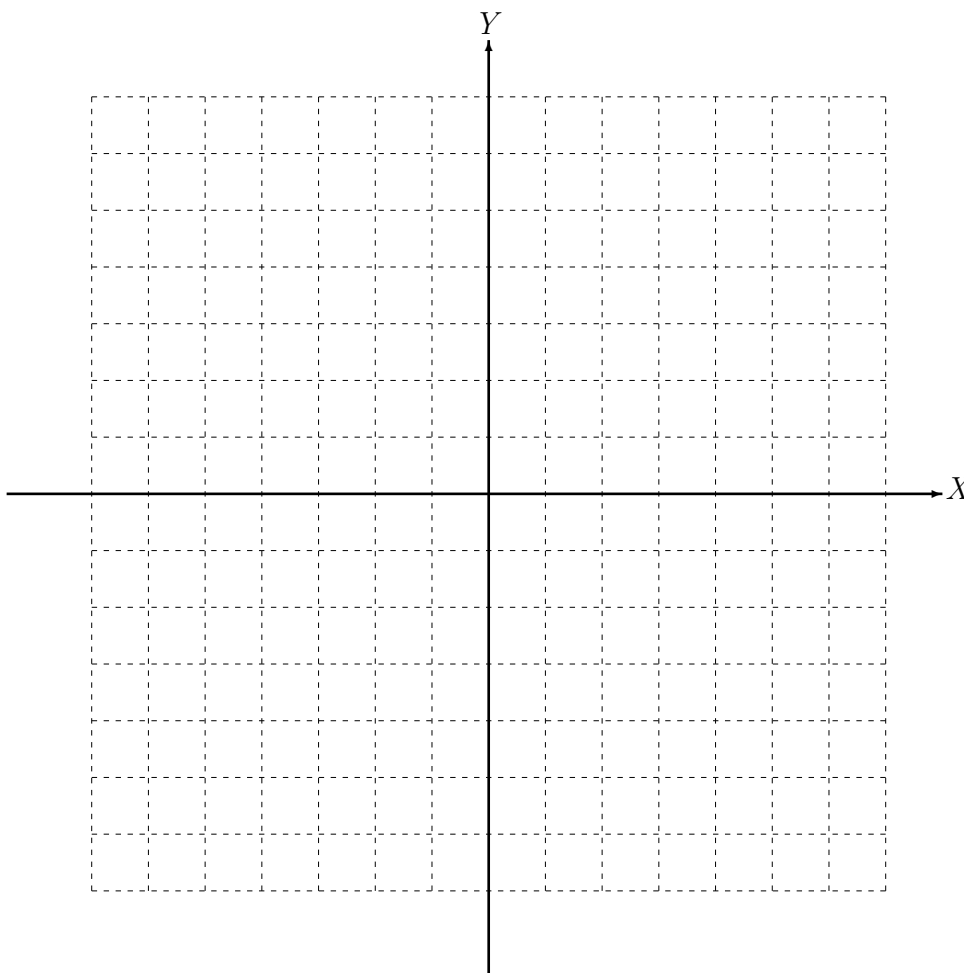


Figura 11: Representações gráficas do Exemplo 3.

Exercício 1 Considere o plano numérico \mathbb{R}^2 e as transformações geométricas T_1 e T_2 que representam, respectivamente, uma reflexão em torno da origem do sistema de coordenadas e uma reflexão em torno do eixo OY . Dado um ponto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, vamos denotar por P_1 a imagem do ponto P pela transformação T_1 e denotamos por P_2 a imagem do ponto P pela transformação T_2 , isto é,

$$T_1(P) = P_1 = (-x, -y) \quad e \quad T_2(P) = P_2 = (-x, y) .$$

- (a) Determine a imagem do ponto P pela transformação T_3 , que vamos denotar pelo ponto P_3 , obtida aplicando primeiramente a transformação T_2 e em seguida aplicando a transformação T_1 .
- (b) Determine a imagem do ponto P pela transformação T_4 , que vamos denotar pelo ponto P_4 , obtida aplicando primeiramente a transformação T_1 e em seguida aplicando a transformação T_2 .
- (c) O que podemos concluir com os resultados obtidos nos itens (a) e (b)?

Resolução

Exercício 2 Considere o plano numérico \mathbb{R}^2 e as transformações geométricas T_1 e T_2 que representam, respectivamente, uma reflexão em torno do eixo- OX e uma reflexão em torno do eixo- OY . Dado um ponto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, vamos denotar por P_1 a imagem do ponto P pela transformação T_1 e denotamos por P_2 a imagem do ponto P pela transformação T_2 , isto é,

$$T_1(P) = P_1 = (x, -y) \quad e \quad T_2(P) = P_2 = (-x, y) .$$

- (a) Determine a imagem do ponto P pela transformação T_3 , que vamos denotar pelo ponto P_3 , obtida aplicando primeiramente a transformação T_2 e em seguida aplicando a transformação T_1 .
- (b) Determine a imagem do ponto P pela transformação T_4 , que vamos denotar pelo ponto P_4 , obtida aplicando primeiramente a transformação T_1 e em seguida aplicando a transformação T_2 .
- (c) O que podemos concluir com os resultados obtidos nos itens (a) e (b)?

Resolução

Exercício 3 Considere a figura abaixo, que denotamos por F , e que os lados de cada um dos quadradinhos do reticulado mede 1 cm.

- (a) Identifique os vértices do polígono com as respectivas coordenadas.
- (b) Determine a imagem da figura F pela transformação T_1 que representa a reflexão em torno da origem, obtendo a figura F' .
- (c) Determine a imagem da figura F' pela transformação T_2 que representa a reflexão em torno do eixo OY , obtendo a figura F'' .
- (d) Mostre que a figura F'' é a reflexão da figura F em torno do eixo OX .

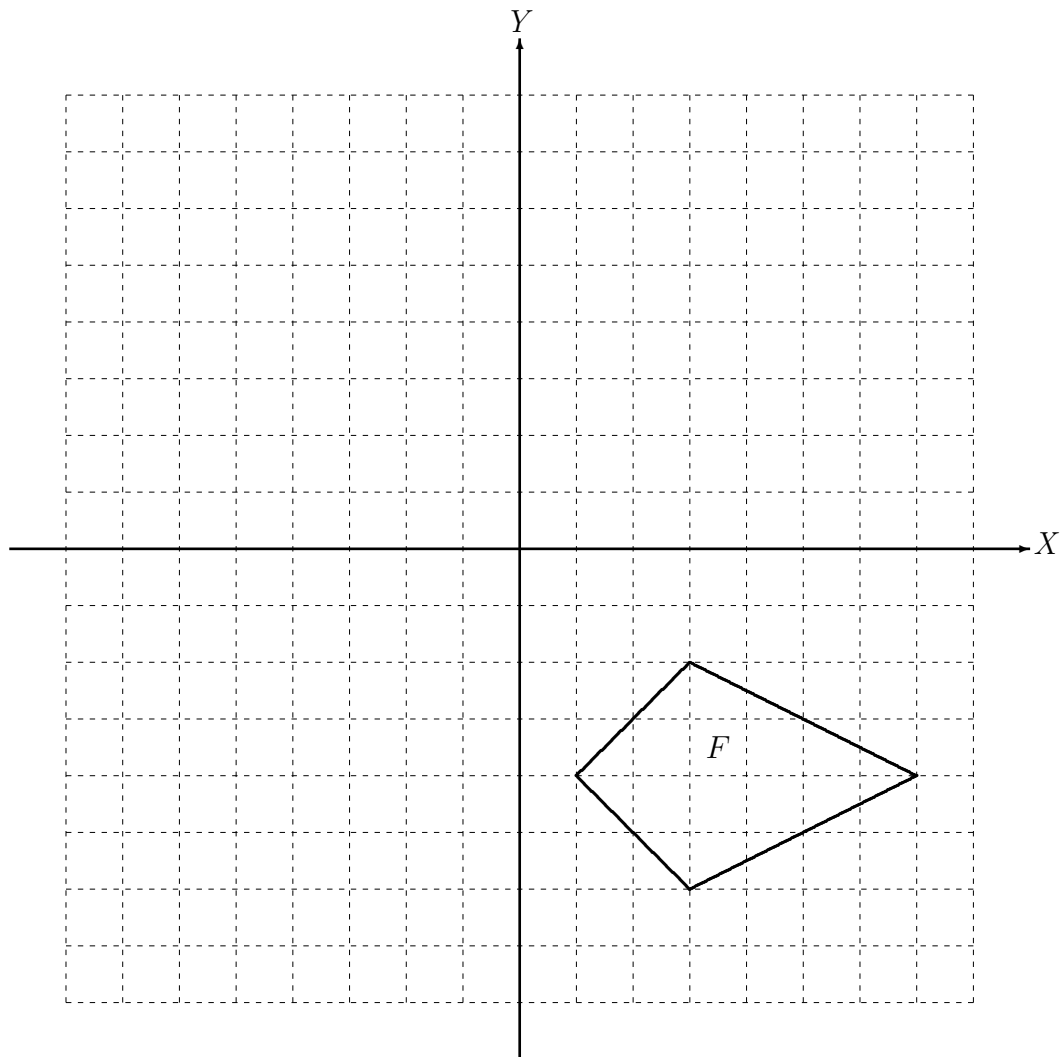


Figura 12: Composição de Transformações.

6 Atividades com Transformações Geométricas

Atividade 1 Considere a figura abaixo, que denotamos por F , e que os lados de cada um dos quadradinhos do reticulado mede 1 cm.

- (a) Identifique os vértices do polígono com as respectivas coordenadas.
- (b) Determine a reflexão da figura F em torno da reta $y = x$, obtendo a figura F' .
- (c) Determine a área da figura F .

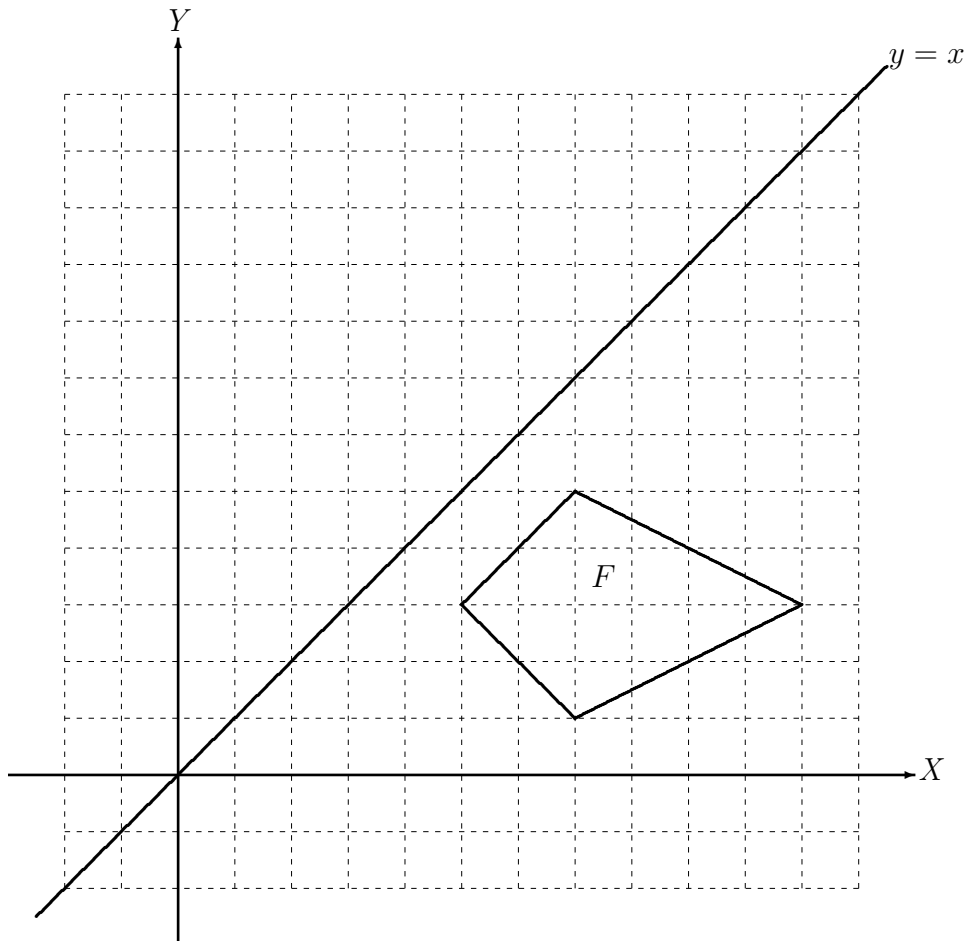


Figura 13: Reflexão em torno da reta $y = x$.

Atividade 2 Considere a figura abaixo, que denotamos por F , e que os lados de cada um dos quadradinhos do reticulado mede 1 cm.

- (a) Identifique os vértices do polígono com as respectivas coordenadas.
- (b) Determine a reflexão da figura F em torno do eixo OX , obtendo a figura F' .
- (c) Determine a reflexão da figura F' em torno da origem, obtendo a figura F'' .
- (d) Mostre que a figura F'' é a reflexão da figura F em torno do eixo OY .
- (e) Determine a área da figura F .

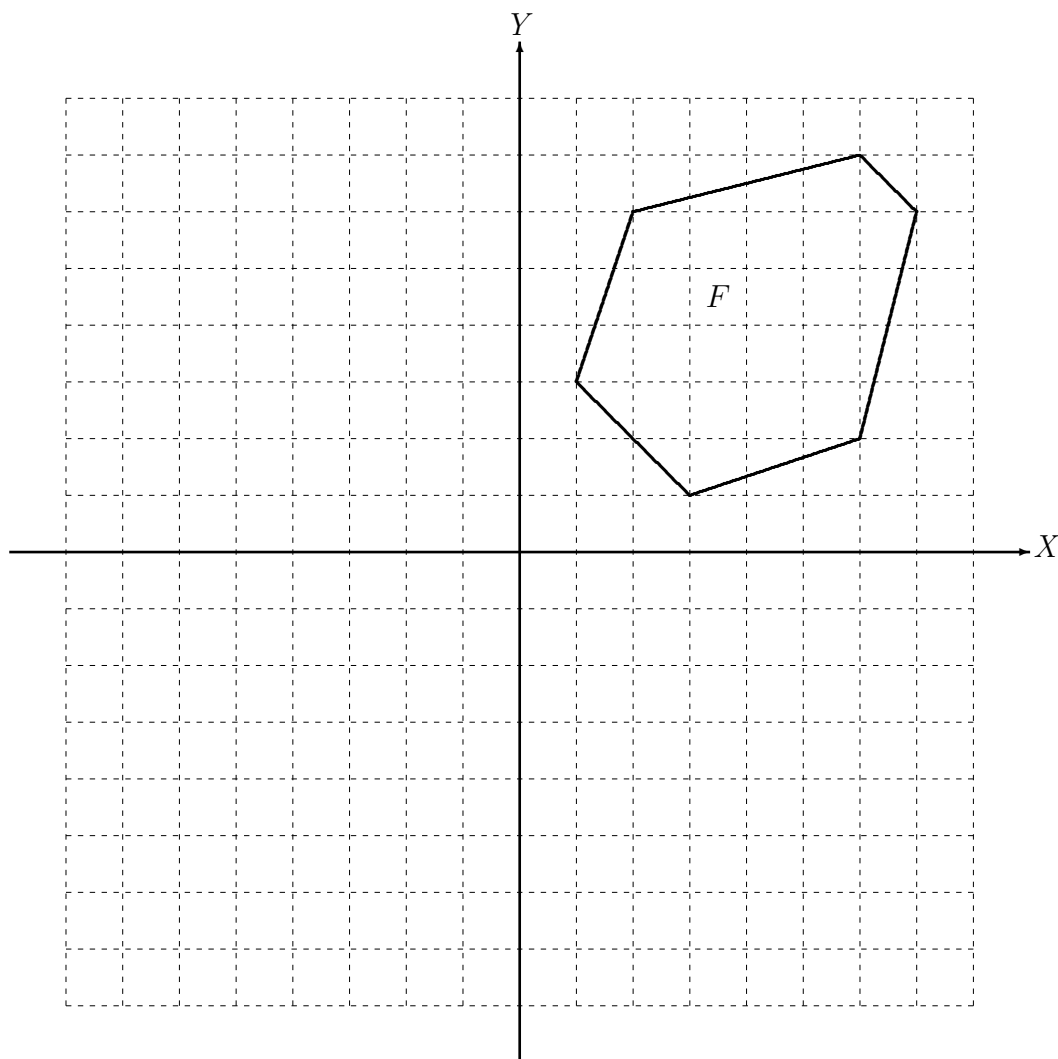


Figura 14: Composição de Transformações

7 Representação Matricial

Nosso objetivo nesse momento é mostrar de maneira intuitiva como podemos representar as transformações geométricas do plano no plano através de matrizes de ordem 2×2 . Vamos observar também que certas transformações não podem ser representadas por uma matriz. Para isso, consideramos os seguintes exemplos que passamos a descrever.

Exemplo 4 Considere a matriz A de ordem 2×2 dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

e a transformação do plano numérico, que denotamos por $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida pela matriz A , que leva o ponto $P = (a, b)$ no ponto $Q = (c, d)$ definida da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Assim, denotamos $T(P) = Q$, isto é, $T(a, b) = (c, d) \in \mathbb{R}^2$. De modo análogo, dizemos que o ponto Q é a imagem do ponto P pela transformação T .

Por exemplo, dado o ponto $P = (3, 2)$ a sua imagem pela transformação T , definida pela matriz A , é o ponto $Q = (c, d)$ obtido da forma:

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, o ponto $P = (3, 2)$ é levado pela transformação T no ponto $Q = (4, 1)$.

Para entender a aplicação da transformação T vamos resolver as seguintes questões.

- (a) Determine o ponto $P = (a, b)$ cuja imagem pela transformação T , definida pela matriz A , é o ponto $Q = (-2, 3)$.
- (b) Determine a imagem do triângulo ABC , pela transformação T , definida pela matriz A , cujos vértices são dados pelos pontos

$$A = (-1, 0) \quad , \quad B = (1, 0) \quad e \quad C = (0, 1).$$

- (c) Faça a representação no plano numérico do triângulo ABC e de sua imagem pela transformação T , definida pela matriz A .
- (d) Determine a imagem da reta r , dada pela equação $y = 3x - 2$, pela transformação T , definida pela matriz A .
- (e) Faça os gráficos no plano numérico da reta r e de sua imagem pela transformação T , definida pela matriz A .

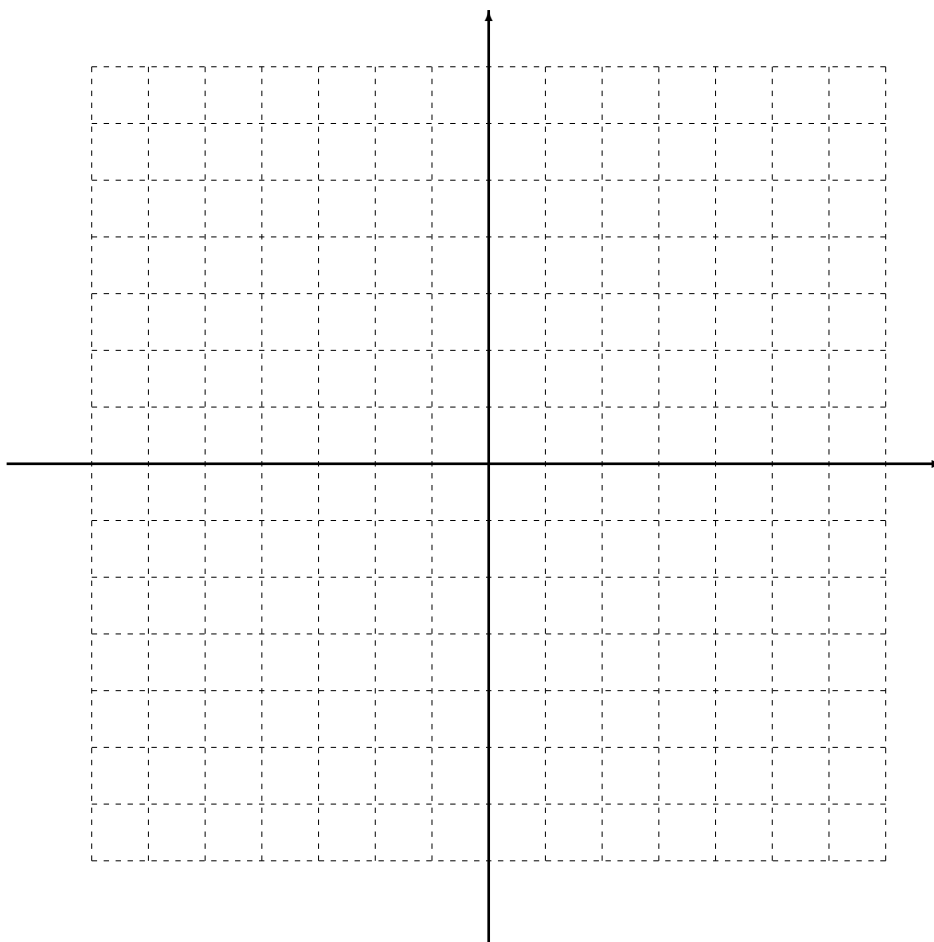


Figura 15: Representações gráficas do Exemplo 4.

As transformações do plano no plano definidas através de uma matriz de ordem 2×2 , como no exemplo acima, têm duas propriedades bem particulares que são dadas por:

- (a) $T(P_1 + P_2) = T(P_1) + T(P_2)$ para todo $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$.
- (b) $T(\lambda P) = \lambda T(P)$ para todo $P \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Transformações do plano no plano que possuem essas duas propriedades são denominadas de **transformações lineares**.

De uma maneira geral, podemos representar as transformações lineares da forma: Dado um ponto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ a sua imagem, denotada pelo ponto $P' = (x', y')$, pela transformação T é definida da forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Assim, a transformação T é representada pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Vamos representar cada uma das transformações do plano no plano dos exemplos acima através de uma matriz de ordem 2×2 .

Exemplo 5 Considere o plano cartesiano \mathbb{R}^2 , e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ fixo. A transformação

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow T(x, y) = \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \end{aligned}$$

é uma contração para $|\lambda| < 1$. Quando $|\lambda| > 1$, dizemos que T é uma expansão.

Dado um ponto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ a sua imagem, denotada pelo ponto $P' = (x', y')$, pela transformação T é definida da forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}.$$

Assim, denotamos $T(P) = P'$, isto é, $T(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \in \mathbb{R}^2$. Desse modo, dizemos que o ponto $P' = (\lambda x, \lambda y)$ é a imagem do ponto $P = (x, y)$ pela transformação T , que é representada pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Exemplo 6 Considere o plano cartesiano \mathbb{R}^2 . A transformação

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow T(x, y) = (x, -y) \end{aligned}$$

é denominada uma **reflexão em torno do eixo- OX** .

Dado um ponto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ a sua imagem, denotada pelo ponto $P' = (x', y')$, pela transformação T é definida da forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

Assim, denotamos $T(P) = P'$, isto é, $T(x, y) = (x, -y) \in \mathbb{R}^2$. Desse modo, dizemos que o ponto $P' = (x, -y)$ é a imagem do ponto $P = (x, y)$ pela transformação T , que é representada pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 7 Considere o plano cartesiano \mathbb{R}^2 . A transformação

$$\begin{aligned} T : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow T(x, y) = (-x, y) \end{aligned}$$

é denominada uma **reflexão em torno do eixo** OY .

Dado um ponto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ a sua imagem, denotada pelo ponto $P' = (x', y')$, pela transformação T é definida da forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}.$$

Assim, denotamos $T(P) = P'$, isto é, $T(x, y) = (-x, y) \in \mathbb{R}^2$. Desse modo, dizemos que o ponto $P' = (-x, y)$ é a imagem do ponto $P = (x, y)$ pela transformação T , que é representada pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 8 Considere o plano cartesiano \mathbb{R}^2 . A transformação

$$\begin{aligned} T : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow T(x, y) = (-x, -y) \end{aligned}$$

é denominada uma **reflexão em torno da origem**.

Dado um ponto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ a sua imagem, denotada pelo ponto $P' = (x', y')$, pela transformação T é definida da forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}.$$

Assim, denotamos $T(P) = P'$, isto é, $T(x, y) = (-x, -y) \in \mathbb{R}^2$. Desse modo, dizemos que o ponto $P' = (-x, -y)$ é a imagem do ponto $P = (x, y)$ pela transformação T , que é representada pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 9 Considere o plano cartesiano \mathbb{R}^2 e um elemento fixo, porém arbitrário, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. A transformação

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow T(x, y) = (x, y) + (a, b) = (x + a, y + b) \end{aligned}$$

é denominada uma **translação**.

Dado um ponto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ a sua imagem, denotada pelo ponto $P' = (x', y')$, pela transformação T é definida da forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \end{bmatrix}.$$

Podemos verificar facilmente que a translação não é uma transformação linear. Assim, não podemos representá-la através de uma matriz. A translação é denominada uma **transformação afim**.

Exemplo 10 Considere o plano cartesiano \mathbb{R}^2 . A transformação

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow T(x, y) = (y, x) \end{aligned}$$

é denominada uma **reflexão em torno da reta $y = x$** .

Dado um ponto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ a sua imagem, denotada pelo ponto $P' = (x', y')$, pela transformação T é definida da forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

Assim, denotamos $T(P) = P'$, isto é, $T(x, y) = (y, x) \in \mathbb{R}^2$. Desse modo, dizemos que o ponto $P' = (y, x)$ é a imagem do ponto $P = (x, y)$ pela transformação T , que é representada pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 11 Considere o plano cartesiano \mathbb{R}^2 , e escalares $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ fixos, porém arbitrários. A transformação

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow T(x, y) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y) \end{aligned}$$

é denominada **escala**. Dizemos que a transformação é uma escala não uniforme quando $\lambda_1 \neq \lambda_2$, e dizemos que é uma escala uniforme quando $\lambda_1 = \lambda_2$. Note que na escala uniforme podemos ter uma contração ou uma expansão.

Dado um ponto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ a sua imagem, denotada pelo ponto $P' = (x', y')$, pela transformação T é definida da forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_2 y \end{bmatrix}.$$

Assim, denotamos $T(P) = P'$, isto é, $T(x, y) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y) \in \mathbb{R}^2$. Desse modo, dizemos que o ponto $P' = (\lambda_1 x, \lambda_2 y)$ é a imagem do ponto $P = (x, y)$ pela transformação T , que é representada pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 12 Considere o quadrilátero $ABCD$ cujos vértices são dados pelos pontos

$$A = (2, -2) \quad , \quad B = (6, -4) \quad , \quad C = (2, -6) \quad e \quad D = (0, -4) \quad ,$$

a transformação T_1 que representa uma escala não uniforme com parâmetros $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ e a transformação T_2 que representa a reflexão em torno da reta $y = x$.

- Faça a representação gráfica no plano numérico do quadrilátero $ABCD$ e da reta $y = x$.
- Determine a imagem do quadrilátero $ABCD$ pela transformação T_1 .
- Faça a representação gráfica no plano numérico da imagem do quadrilátero $ABCD$ pela transformação T_1 .
- Determine a imagem do quadrilátero $ABCD$ aplicando primeiramente a transformação T_2 e em seguida aplicando a transformação T_1 . Faça a representação gráfica no plano numérico da imagem do quadrilátero $ABCD$.
- Determine a imagem do quadrilátero $ABCD$ aplicando primeiramente a transformação T_1 e em seguida aplicando a transformação T_2 . Faça a representação gráfica no plano numérico da imagem do quadrilátero $ABCD$.
- O que podemos observar com os resultados dos itens (d) e (e)?

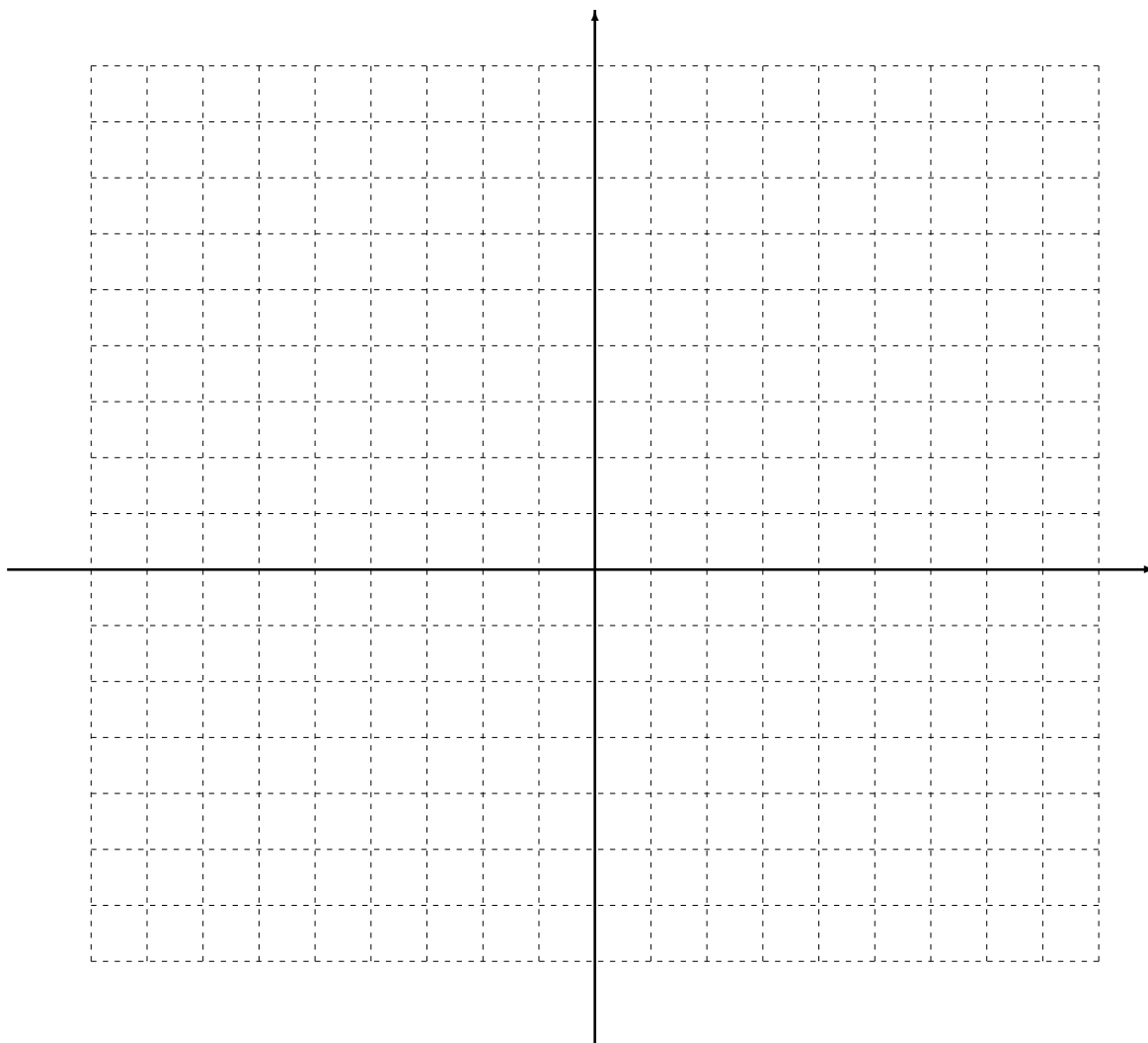


Figura 16: Representações gráficas do Exemplo 12.

É importante observar que as transformações do plano no plano que definimos até o momento são também denominadas de **transformações geométricas**.

Exemplo 13 Considere as transformações geométricas T_1 e T_2 definidas no Exemplo 12.

- (a) Determine a matriz que representa a transformação geométrica T_1 .
- (b) Determine a matriz que representa a transformação geométrica T_2 .
- (c) Determine a matriz que representa a transformação geométrica, que denotamos por T_3 , obtida aplicando primeiramente a transformação geométrica T_2 e em seguida aplicando a transformação geométrica T_1 .
- (d) Determine a matriz que representa a transformação geométrica, que denotamos por T_4 , obtida aplicando primeiramente a transformação geométrica T_1 e em seguida aplicando a transformação geométrica T_2 .
- (e) O que podemos observar com os resultados dos itens (c) e (d)?

8 Rotação no Plano

Definição 7 Considere no plano um ponto fixo O , um ângulo θ e um ponto genérico P . A rotação com centro no ponto O de um ângulo θ , tanto no sentido horário quanto no sentido anti-horário, leva o ponto P no ponto P' de modo que as medidas dos segmentos OP e OP' sejam iguais, isto é, $\overline{OP} = \overline{OP'}$, como ilustra a figura abaixo.

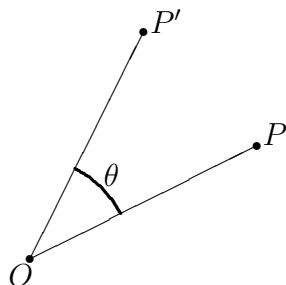


Figura 17: Rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário.

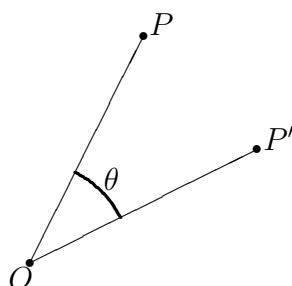


Figura 18: Rotação de um ângulo θ no sentido horário.

Exemplo 14 Considere o ponto A dado na figura abaixo. Apresente a imagem do ponto A , que vamos denotar por A' , obtida através de uma rotação de 45° no sentido anti-horário em torno do ponto O .

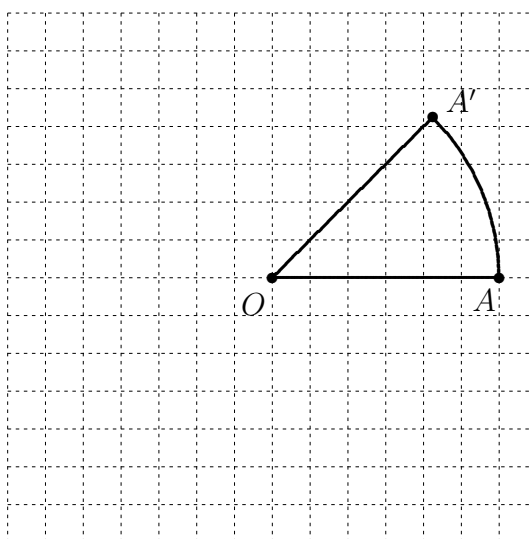


Figura 19: Rotação do ponto A de um ângulo de 45° no sentido anti-horário.

Exemplo 15 Exemplificamos abaixo uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno do ponto 0 , da figura que denotamos por F_1 , obtendo a figura denotada por F_2 .

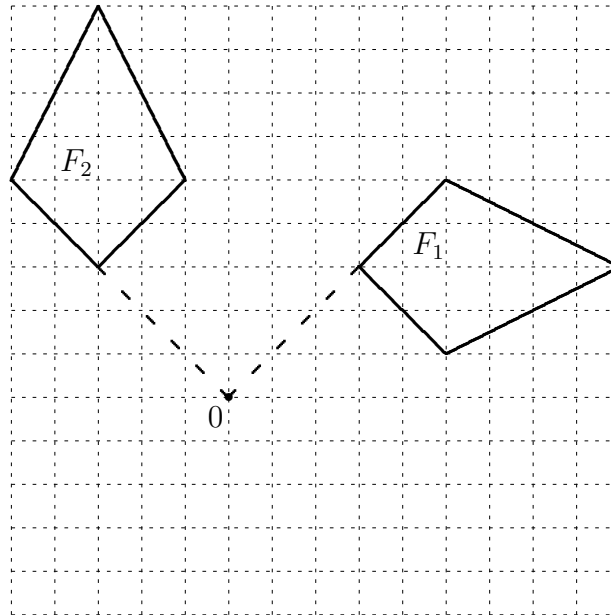


Figura 20: Exemplo de Rotação de 90° no sentido anti-horário.

Exercício 4 Apresente a imagem do quadrado $ABCD$, ilustrado na figura abaixo, obtida através de uma rotação de 45° no sentido horário em torno do seu centro.

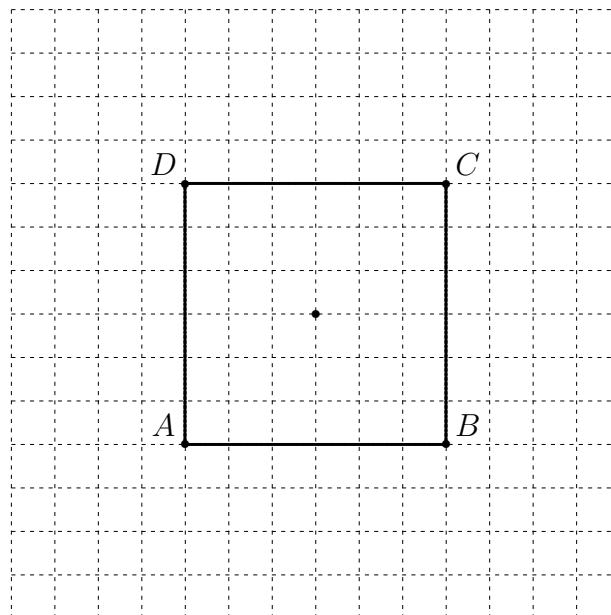


Figura 21: Rotação do quadrado de um ângulo de 45° no sentido horário.

9 Matriz de Rotação

Definição 8 Considere o plano cartesiano \mathbb{R}^2 . A transformação geométrica definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow T(x, y) = (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta)) \end{aligned}$$

é denominada uma **rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário** e de centro na origem do sistema de coordenadas.

Desse modo, dado um ponto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ a sua imagem, denotada por $P' = (x', y')$, pela transformação geométrica T é definida da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Assim, a transformação T é representada pela matriz

$$Q = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

denominada **matriz de rotação**.

9.1 Cinemática Direta

Conhecendo as coordenadas do ponto P e o ângulo θ , vamos determinar as coordenadas do ponto P' , isto é, vamos obter a matriz de rotação. Para auxiliar na dedução da matriz de rotação, denotamos por r o comprimento dos segmentos OP e OP' , isto é, $r = \overline{OP} = \overline{OP'}$. Utilizamos para a dedução da matriz de rotação, basicamente, as relações trigonométricas no triângulo retângulo, seno e cosseno da soma de dois ângulos.

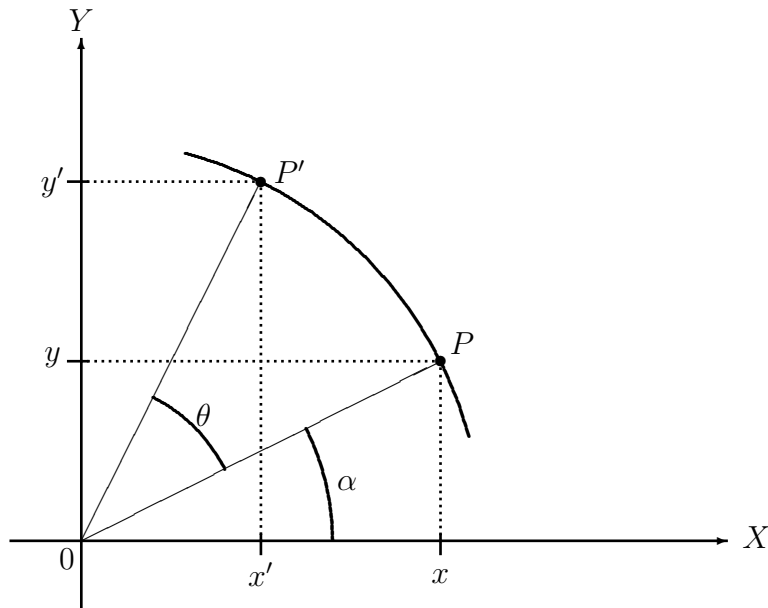


Figura 22: Rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário.

Na Figura 22, temos os pontos $P = (x, y)$, $P' = (x', y')$, $A = (x, 0)$ e $A' = (x', 0)$. Assim, utilizando relações trigonométricas nos triângulos retângulos OPA e $OP'A'$, obtemos

$$\begin{cases} x = r \cos(\alpha) \\ y = r \sin(\alpha) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x' = r \cos(\alpha + \theta) \\ y' = r \sin(\alpha + \theta) \end{cases} .$$

Utilizando agora, as relações para seno e cosseno da soma de dois ângulos, obtemos

$$x' = r \cos(\alpha) \cos(\theta) - r \sin(\alpha) \sin(\theta) = x \cos(\theta) - y \sin(\theta) .$$

$$y' = r \sin(\alpha) \cos(\theta) + r \cos(\alpha) \sin(\theta) = x \sin(\theta) + y \cos(\theta) .$$

Assim, a matriz que representa a rotação T é dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} .$$

Portanto, a imagem de $P = (x, y)$ pela rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário, que é o ponto $P' = (x', y')$, é obtida da forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} . \quad (3)$$

É importante observar, uma vez que estamos realizando uma rotação, que as coordenadas dos pontos $P = (x, y)$ e $P' = (x', y')$ satisfazem a seguinte equação:

$$x^2 + y^2 = (x')^2 + (y')^2 . \quad (4)$$

9.2 Cinemática Inversa

Considerando a equação matricial (3), temos duas equações algébricas dadas por:

$$x' = x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \quad \text{e} \quad y' = x \sin(\theta) + y \cos(\theta) . \quad (5)$$

Multiplicando a primeira equação acima por x e multiplicando a segunda equação acima por y , obtemos

$$xx' = x^2 \cos(\theta) - xy \sin(\theta) \quad \text{e} \quad yy' = xy \sin(\theta) + y^2 \cos(\theta) . \quad (6)$$

Somando membro a membro as duas equações acima, obtemos

$$xx' + yy' = (x^2 + y^2) \cos(\theta) \quad (7)$$

Finalmente da equação (7), obtemos

$$\cos(\theta) = \frac{xx' + yy'}{x^2 + y^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \theta = \pm \arccos\left(\frac{xx' + yy'}{x^2 + y^2}\right) . \quad (8)$$

Portanto, conhecendo os pontos $P = (x, y)$ e $P' = (x', y')$ que satisfazem a equação (4), obtemos o ângulo θ com o qual realizamos a rotação. Note que a escolha do sinal do ângulo θ depende se realizamos uma rotação no sentido horário ou no sentido anti-horário.

Exemplo 16 Considerando os pontos

$$P = (x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \quad e \quad P' = (x', y') = (0, 2) ,$$

que satisfazem a condição dada pela equação (4), como ilustra a Figura 23. Assim, vamos determinar o ângulo θ com o qual podemos realizar uma rotação entre os pontos.

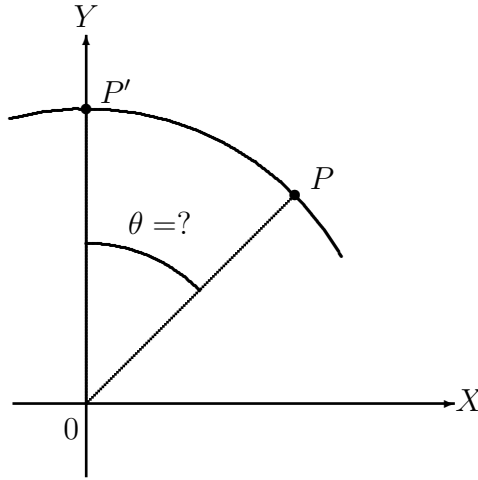


Figura 23: Cinemática Inversa.

Sabemos que o ângulo θ é obtido pela equação (8). Assim, temos

$$\theta = \pm \arccos \left(\frac{\sqrt{2} \times 0 + \sqrt{2} \times 2}{2 + 2} \right) = \pm \arccos \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \pm \frac{\pi}{4} .$$

Finalmente, o sinal do ângulo θ será determinado de acordo com o sentido da rotação. Desse modo, escolhemos o sinal positivo para uma rotação no sentido anti-horário, quando estamos levando o ponto P no ponto P' , e escolhemos o sinal negativo para uma rotação no sentido horário, quando estamos levando o ponto P' no ponto P .

Exercício 5 Considerando os pontos $P = (x, y) = (\sqrt{3}, 1)$ e $P' = (x', y') = (1, \sqrt{3})$, que satisfazem a condição dada pela equação (4), como ilustra a Figura 24. Determine o ângulo θ com o qual podemos realizar uma rotação entre os pontos.

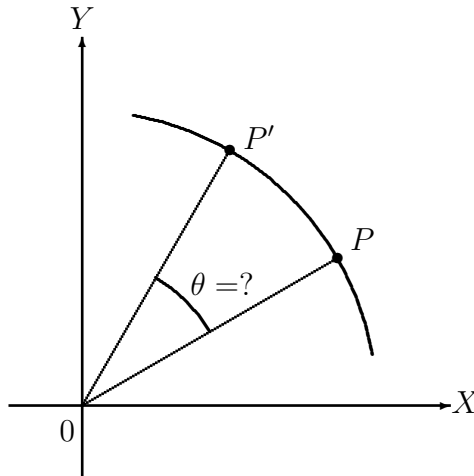


Figura 24: Cinemática Inversa.

Exemplo 17 Considere a transformação geométrica T_1 que representa uma rotação no sentido anti-horário de um ângulo $\theta = \frac{\pi}{4}$ e a transformação geométrica T_2 que representa uma expansão de $\lambda = \sqrt{2}$. Determine a matriz que representa a transformação geométrica, que vamos denotar por T_3 , obtida aplicando primeiramente a transformação geométrica T_1 e em seguida aplicando a transformação geométrica T_2 .

Resolução

As transformações geométricas T_1 e T_2 são representadas pelas matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix},$$

respectivamente.

Desse modo, dado um ponto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ a sua imagem, denotada por $P' = (x', y')$, pela transformação geométrica T_3 é definida da forma $P' = T_3(P) = T_2(T_1(P))$, isto é,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Portanto, a transformação geométrica T_3 é representada pela matriz

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 6 Considere a transformação T_1 representando uma rotação no sentido horário de um ângulo

$$\theta = -\frac{\pi}{4}$$

e a transformação T_2 representando uma contração para

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- Determine a matriz que representa a transformação geométrica, que vamos denotar por T_3 , obtida aplicando primeiramente a transformação geométrica T_1 e em seguida aplicando a transformação geométrica T_2 .
- Determine a matriz que representa a transformação geométrica, que vamos denotar por T_4 , obtida aplicando primeiramente a transformação geométrica T_2 e em seguida aplicando a transformação geométrica T_1 .

Exemplo 18 Considere o quadrilátero $ABCD$ cujos vértices são dados pelos pontos

$$A = (4, 2) \quad , \quad B = (8, 4) \quad , \quad C = (4, 6) \quad e \quad D = (2, 4) \quad .$$

Determine a imagem do quadrilátero $ABCD$ pela transformação geométrica T_3 definida no Exemplo 17, apresentando sua representação gráfica no plano numérico.

Resolução

Denotando $A' = T_3(A)$, $B' = T_3(B)$, $C' = T_3(C)$, $D' = T_3(D)$, e utilizando a matriz que representa a transformação geométrica T_3 , obtemos o quadrilátero $A'B'C'D'$ cujos vértices são os pontos

$$A' = (2, 6) \quad , \quad B' = (4, 12) \quad , \quad C' = (-2, 10) \quad e \quad D' = (-2, 6) \quad .$$

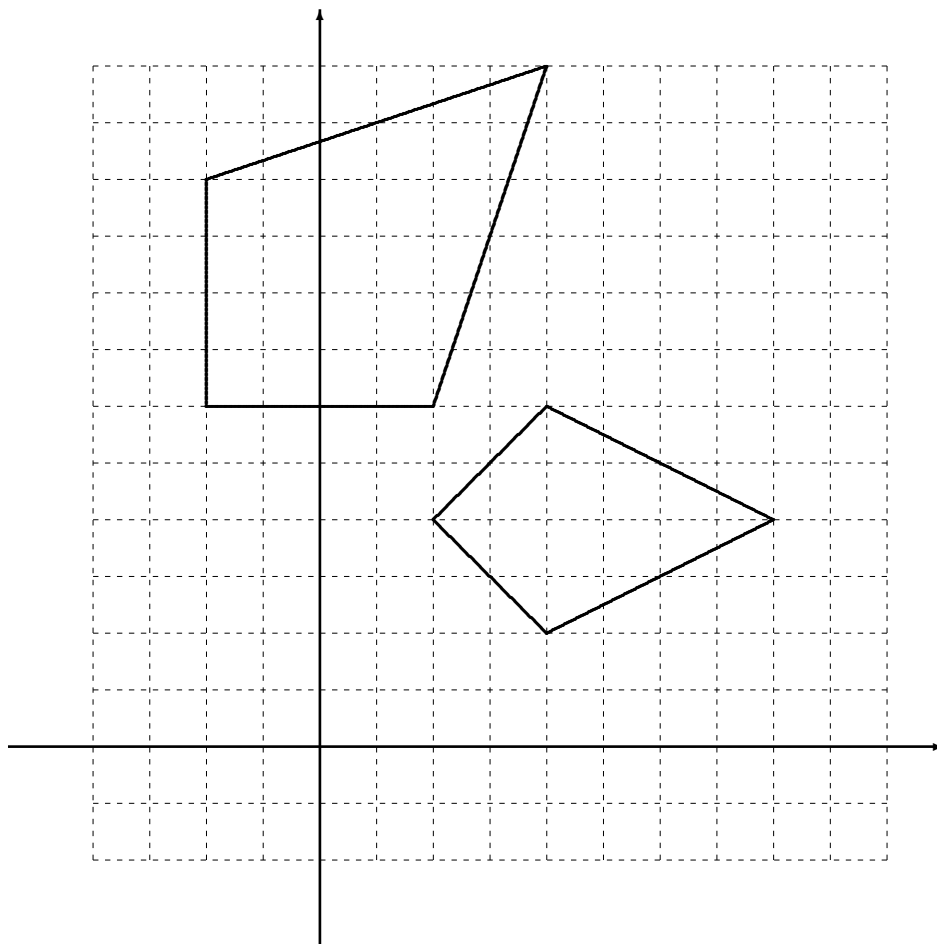


Figura 25: Representações gráficas do Exemplo 18.

Determine a relação entre a área do quadrilátero $ABCD$ e a área do quadrilátero $A'B'C'D'$.

O que podemos concluir? Justifique sua resposta.

Vamos apresentar algumas propriedades da matriz de rotação. Para isso, considere o seguinte exemplo.

Exemplo 19 *Seja $Q = [q_{ij}]$ uma matriz real quadrada de ordem n . Dizemos que Q é uma **matriz ortogonal** se $Q^t Q = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n .*

- (a) *Mostre que $Q^t = Q^{-1}$.*
- (b) *Mostre que $\det(Q) = \pm 1$.*
- (c) *Determine como podemos representar as matrizes ortogonais de ordem 2.*
- (d) *Exiba uma matriz ortogonal de ordem 2 e calcule o seu determinante.*

Resolução

- (a) Tomando a definição de matriz ortogonal, tem-se

$$Q^t Q = I_n \iff Q^t Q Q^t = I_n Q^t \iff Q^t (Q Q^t) = Q^t \iff Q Q^t = I_n .$$

Desse modo, obtemos $Q^t Q = Q Q^t = I_n$. Portanto, mostramos que $Q^t = Q^{-1}$.

- (b) Tomando a definição de matriz ortogonal e fazendo uso das propriedades de determinante, obtemos

$$\det(Q^t Q) = \det(Q^t) \det(Q) = \det(Q) \det(Q) = \det(Q)^2 = \det(I_n) = 1 .$$

Desse modo, temos que

$$\det(Q)^2 = 1 \iff \det(Q) = \pm 1 .$$

- (c) Considerando uma matriz genérica Q de ordem 2 dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} .$$

Considerando que $\det(Q) = 1$, de acordo com o item (b), sabemos que a inversa da matriz Q é da seguinte forma:

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} .$$

Fazendo $Q^t = Q^{-1}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \iff d = a \quad \text{e} \quad c = -b .$$

Portanto, para $\det(Q) = 1$, temos que

$$Q = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} .$$

Finalmente, considerando que $Q^t Q = I_2$, obtemos a condição $a^2 + b^2 = 1$.

Considerando que $\det(Q) = -1$, de acordo com o item (b), sabemos que a inversa da matriz Q é da seguinte forma:

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix}.$$

Fazendo $Q^t = Q^{-1}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix} \iff d = -a \quad \text{e} \quad c = b.$$

Portanto, para $\det(Q) = -1$, temos que

$$Q = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}.$$

Finalmente, considerando que $Q^t Q = I_2$, obtemos a condição $a^2 + b^2 = 1$.

Portanto, mostramos que uma matriz ortogonal de ordem 2 deve ser de uma das formas:

$$Q = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad Q = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

com a condição $a^2 + b^2 = 1$.

(d) Considerando, por exemplo,

$$a = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

que satisfazem a condição $a^2 + b^2 = 1$, temos as duas possibilidades para uma matriz ortogonal de ordem 2:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Observe que nesse exemplo a matriz Q dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

representa uma matriz de rotação de um ângulo $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

Portanto, a matriz de rotação é uma matriz ortogonal. De fato,

$$Q^t Q = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, dizemos que a rotação é uma **transformação ortogonal**.

Exemplo 20 Podemos observar facilmente que no Exemplo 10 a matriz que representa a reflexão em torno da reta $y = x$ é uma matriz ortogonal. De fato

$$A^t A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, podemos verificar, em todos os outros exemplos que tratam de reflexão, que a reflexão é uma **transformação ortogonal**, isto é, a matriz que representa a reflexão é uma **matriz ortogonal**.

Exemplo 21 Seja T_1 a transformação geométrica que representa uma escala não uniforme com parâmetros

$$\lambda_1 = \sqrt{2} \quad e \quad \lambda_2 = 2\sqrt{2}$$

e T_2 a transformação geométrica que representa uma rotação no sentido anti-horário de um ângulo $\theta = \frac{\pi}{4}$ com centro na origem do sistema de coordenadas.

- (a) Determine a matriz que representa a transformação geométrica T_1 .
- (b) Determine a matriz que representa a transformação geométrica T_2 .
- (c) Determine a matriz que representa a transformação geométrica, que denotamos por T_3 , obtida aplicando primeiramente a transformação geométrica T_2 e em seguida aplicando a transformação geométrica T_1 .
- (d) Determine a matriz que representa a transformação geométrica, que denotamos por T_4 , obtida aplicando primeiramente a transformação geométrica T_1 e em seguida aplicando a transformação geométrica T_2 .
- (e) O que podemos observar com os resultados dos itens (c) e (d)?

Exemplo 22 Considere o quadrado $ABCD$ cujos vértices são os pontos

$$A = (1, 1) \quad , \quad B = (-1, 1) \quad , \quad C = (-1, -1) \quad e \quad D = (1, -1).$$

- (a) Determine a imagem do quadrado $ABCD$ pela transformação geométrica T_3 definida no item (c) do Exemplo 21.
- (b) Determine a imagem do quadrado $ABCD$ pela transformação geométrica T_4 definida no item (d) do Exemplo 21.

Exemplo 23 Considere o quadrilátero $ABCD$ cujos vértices são dados pelos pontos

$$A = (7,1) \quad , \quad B = (11,3) \quad , \quad C = (7,5) \quad \text{e} \quad D = (5,3) \quad ,$$

e a transformação geométrica T que representa a reflexão em torno da reta $y = x$.

- (a) Faça a representação gráfica no plano numérico da reta $y = x$.
- (b) Faça a representação gráfica no plano numérico do quadrilátero $ABCD$.
- (c) Determine a imagem do quadrilátero $ABCD$ pela transformação geométrica T .
- (d) Faça a representação gráfica no plano numérico do quadrilátero $A'B'C'D'$, imagem do quadrilátero $ABCD$ pela transformação geométrica T .
- (e) Observando as propriedades geométricas dos quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$, o que podemos concluir?

Resolução

Denotando $A' = T(A)$, $B' = T(B)$, $C' = T(C)$, $D' = T(D)$, e utilizando a matriz que representa a transformação geométrica T , obtemos o quadrilátero $A'B'C'D'$ cujos vértices são os pontos

$$A' = (1,7) \quad , \quad B' = (11,3) \quad , \quad C' = (5,7) \quad \text{e} \quad D' = (3,5) \quad .$$

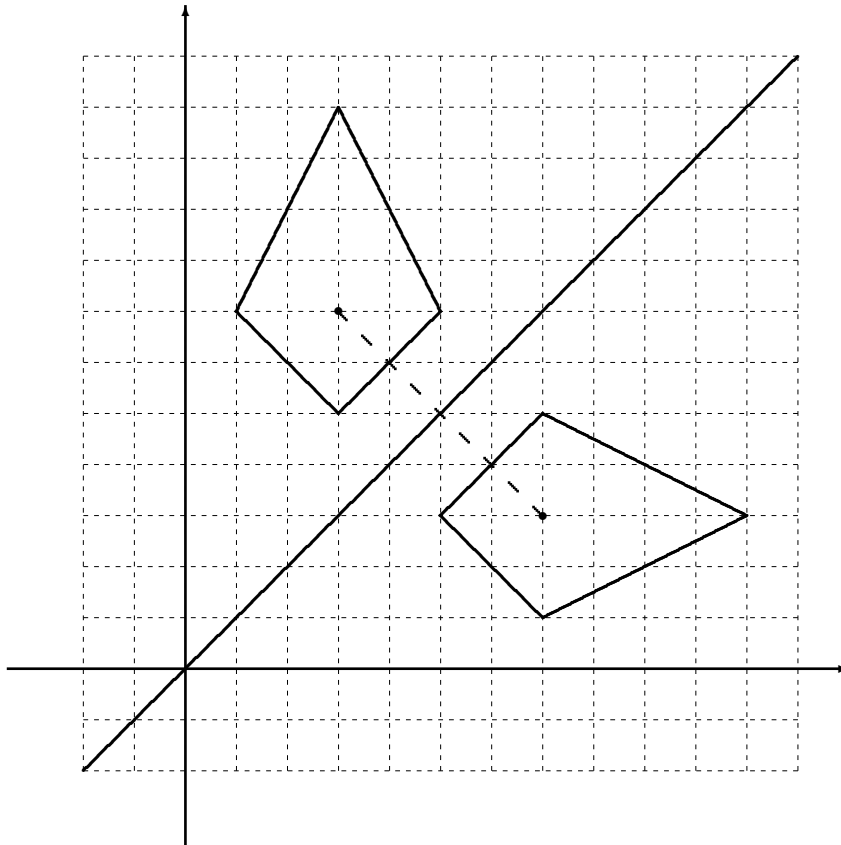


Figura 26: Representações gráficas do Exemplo 23.

As conclusões sobre as propriedades geométricas dos quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$ podem ficar a cargo do leitor.

Exemplo 24 Considere o quadrilátero $ABCD$ cujos vértices são dados pelos pontos

$$A = (5, 1) \quad , \quad B = (9, 3) \quad , \quad C = (5, 5) \quad e \quad D = (3, 3) \quad ,$$

e a transformação geométrica T que representa uma rotação no sentido anti-horário de um ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$.

- (a) Faça a representação gráfica no plano numérico do quadrilátero $ABCD$.
- (b) Determine a imagem do quadrilátero $ABCD$ pela transformação geométrica T .
- (c) Faça a representação gráfica no plano numérico do quadrilátero $A'B'C'D'$, imagem do quadrilátero $ABCD$ pela transformação geométrica T .
- (d) Observando as propriedades geométricas dos quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$, o que podemos concluir?

Resolução

Denotando $A' = T(A)$, $B' = T(B)$, $C' = T(C)$, $D' = T(D)$, e utilizando a matriz que representa a transformação geométrica T , obtemos o quadrilátero $A'B'C'D'$ cujos vértices são os pontos

$$A' = (-1, 5) \quad , \quad B' = (-3, 9) \quad , \quad C' = (-5, 5) \quad e \quad D' = (-3, 3) \quad .$$

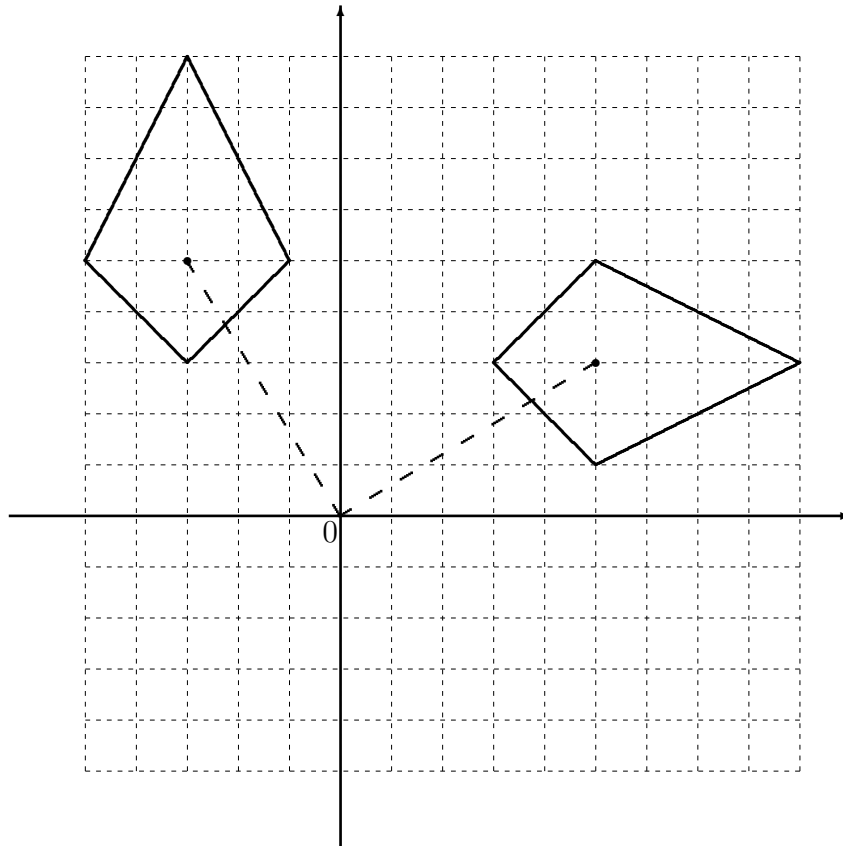


Figura 27: Representações gráficas do Exemplo 24.

As conclusões sobre as propriedades geométricas dos quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$ podem ficar a cargo do leitor.

Exercício 7 Considere a figura abaixo como sendo a representação de um braço robótico com dois graus de liberdade com movimentos no plano XY .

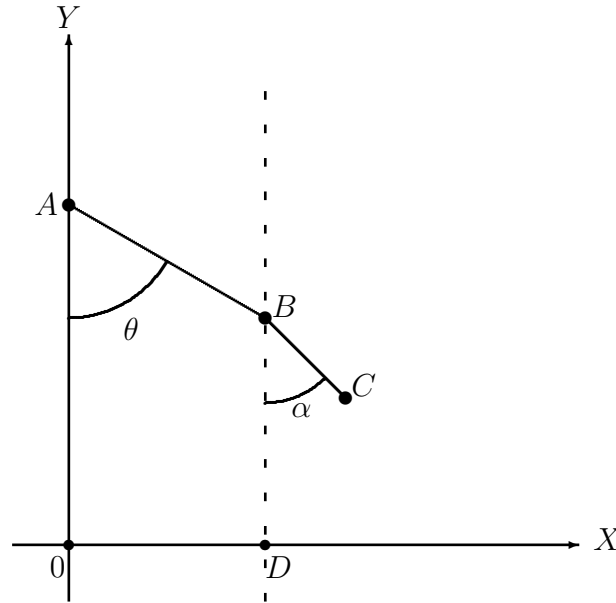


Figura 28: Ilustração de um braço robótico com dois graus de liberdade.

(a) Considerando na Figura 28

$$L_1 = \overline{OA} = 60 \text{ cm} \quad , \quad L_2 = \overline{AB} = 40 \text{ cm} \quad , \quad L_3 = \overline{BC} = 20 \text{ cm} \quad ,$$

$$\theta = 60^\circ \quad e \quad \alpha = 45^\circ \quad ,$$

determine as coordenadas do ponto $C = (a, b)$.

(b) Determine as coordenadas do ponto $C = (a, b)$ em função de L_1 , L_2 , L_3 , θ e α . Podemos interpretar o ponto C como sendo a posição no espaço da extremidade do braço robótico.

Resolução

Na figura abaixo a medida do segmento EB é dado por:

$$\overline{EB} = \overline{AB} \sin(60^\circ) = 20\sqrt{3} \text{ cm} .$$

Na figura abaixo a medida do segmento AE é dado por:

$$\overline{AE} = \overline{AB} \cos(60^\circ) = 20 \text{ cm} .$$

Desse modo, o ponto B é dado por:

$$B = (20\sqrt{3}, 40) .$$

Na figura abaixo a medida do segmento FC é dado por:

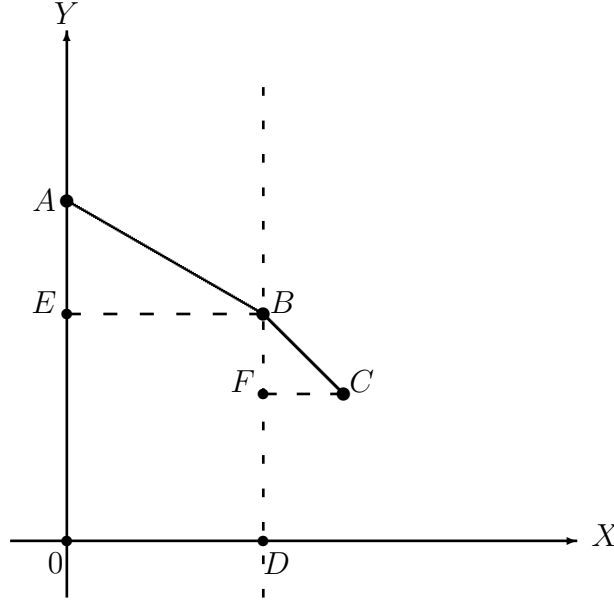
$$\overline{FC} = \overline{BC} \sin(45^\circ) = 10\sqrt{2} \text{ cm} .$$

Na figura abaixo a medida do segmento BF é dado por:

$$\overline{BF} = \overline{BC} \cos(45^\circ) = 10\sqrt{2} \text{ cm} .$$

Portanto, o ponto C é dado por:

$$C = (20\sqrt{3} + 10\sqrt{2}, 40 - 10\sqrt{2}) .$$



A partir dos cálculos realizados acima, as coordenadas do ponto $C = (a, b)$ em função dos parâmetros L_1, L_2, L_3, θ e α , são calculadas da seguinte forma:

Na figura acima a medida do segmento EB e do segmento AE são dadas por:

$$\overline{EB} = L_2 \sin(\theta) \quad \text{e} \quad \overline{AE} = L_2 \cos(\theta) .$$

Desse modo, o ponto B é dado por:

$$B = (L_2 \sin(\theta), L_1 - L_2 \cos(\theta)) .$$

Na figura acima a medida do segmento FC e do segmento BF são dadas por:

$$\overline{FC} = L_3 \sin(\alpha) \quad \text{e} \quad \overline{BF} = L_3 \cos(\alpha) .$$

Portanto, o ponto C é dado por:

$$C = (L_2 \sin(\theta) + L_3 \sin(\alpha), L_1 - L_2 \cos(\theta) - L_3 \cos(\alpha)) .$$

Note que podemos escrever o ponto $C = (a, b)$ da seguinte forma:

$$C = (L_2 \sin(\theta) + L_3 \sin(\alpha), -L_2 \cos(\theta) - L_3 \cos(\alpha)) + (0, L_1) ,$$

isto é, o ponto $C = (a, b)$ é representado por uma transformação linear mais uma translação da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta) & \sin(\alpha) \\ -\cos(\theta) & -\cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ L_1 \end{bmatrix} .$$

10 Atividades com Rotações no Plano

Atividade 3 Considere a figura abaixo como sendo a representação de um braço robótico com dois graus de liberdade com movimentos no plano XY .

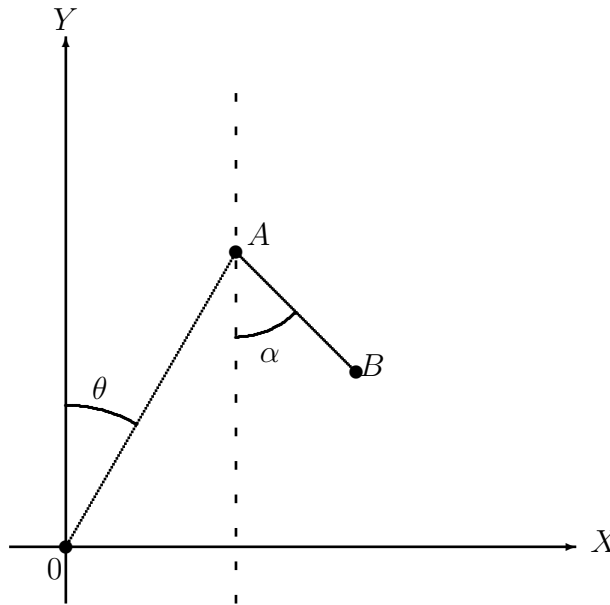


Figura 29: Ilustração de um braço robótico com dois graus de liberdade.

(a) Considerando na Figura 29

$$L_1 = \overline{OA} = 60 \text{ cm} \quad , \quad L_2 = \overline{AB} = 40 \text{ cm} \quad , \quad \theta = 30^\circ \quad e \quad \alpha = 45^\circ \quad ,$$

determine as coordenadas do ponto $B = (c, d)$.

(b) Determine as coordenadas do ponto $B = (c, d)$ em função de L_1 , L_2 , θ e α . Podemos interpretar o ponto B como sendo a posição no espaço da extremidade do braço robótico.

Atividade 4 Considere a figura abaixo como sendo a representação de um braço robótico com dois graus de liberdade com movimentos no plano XY .

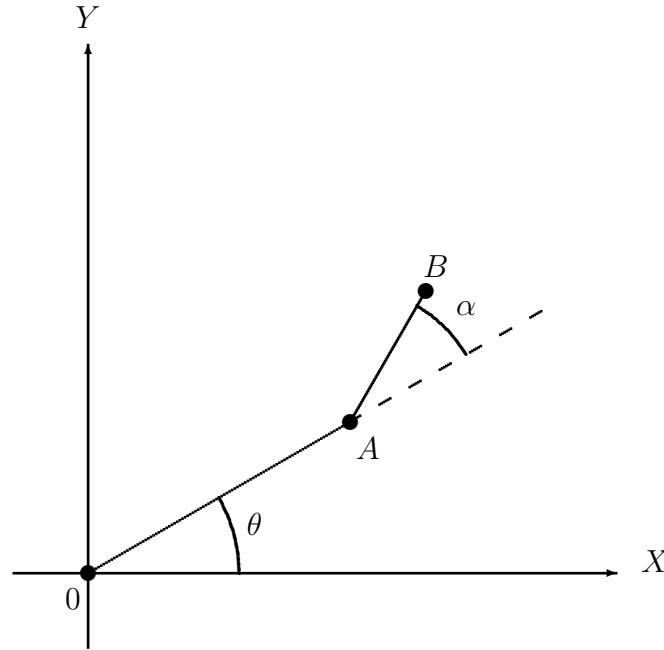


Figura 30: Ilustração de um braço robótico com dois graus de liberdade.

(a) Considerando na Figura 30

$$L_1 = \overline{OA} = 40 \text{ cm} \quad , \quad L_2 = \overline{AB} = 20 \text{ cm} \quad , \quad \theta = 30^\circ \quad \text{e} \quad \alpha = 30^\circ \quad ,$$

determine as coordenadas do ponto $B = (c, d)$.

(b) Determine as coordenadas do ponto $B = (c, d)$ em função de L_1 , L_2 , θ e α . Podemos interpretar o ponto B como sendo a posição no espaço da extremidade do braço robótico.

Resolução:

Na Figura 31 obtemos as coordenadas do ponto $A = (a, b)$, que é denominado de cotovelo do braço robótico, aplicando relações trigonométricas no triângulo retângulo OCA da forma:

$$a = L_1 \cos(\theta) \quad \text{e} \quad b = L_1 \sin(\theta) \quad . \quad (9)$$

Chamando o ângulo $\beta = \theta + \alpha$, obtemos as coordenadas do ponto $B = (c, d)$, que é a extremidade do braço robótico onde se encontra uma ferramenta de trabalho, aplicando relações trigonométricas no triângulo retângulo BAD da forma:

$$c = L_1 \cos(\theta) + L_2 \cos(\beta) \quad \text{e} \quad d = L_1 \sin(\theta) + L_2 \sin(\beta) \quad . \quad (10)$$

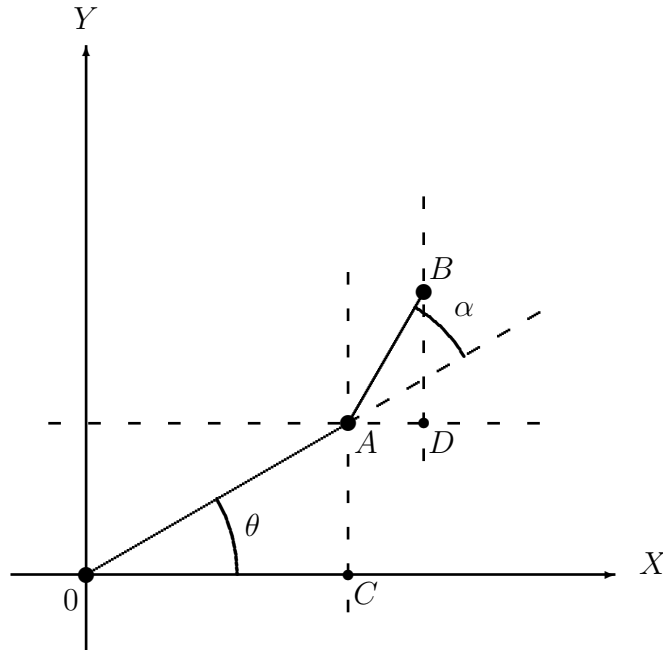


Figura 31: Cinemática direta do movimento do braço robótico.

Assim, podemos representar o movimento do ponto $B = (c, d)$ por uma transformação linear da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\beta) \\ \sin(\theta) & \sin(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, descrevemos acima a cinemática direta do braço robótico, isto é, conhecendo os ângulos θ e α determinamos de modo único a posição do cotovelo que é o ponto A e a posição da extremidade do braço robótico que é o ponto B . Na situação apresentada na Figura 30, dizemos que o ângulo α é positivo, representando o cotovelo voltado para baixo. Essa configuração é obtida quando o ponto B faz uma rotação de um ângulo α no sentido anti-horário com centro no ponto A .

Finalmente, considerando os dados fornecidos no item (a), obtemos as coordenadas do ponto $B = (c, d)$ da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(30^\circ) & \cos(60^\circ) \\ \sin(30^\circ) & \sin(60^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 20 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20\sqrt{3} + 10 \\ 20 + 10\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Portanto, o ponto B tem as seguintes coordenadas:

$$B = (20\sqrt{3} + 10, 20 + 10\sqrt{3}).$$

Atividade 5 A Figura 32 representa duas posições de um braço robótico, uma posição com o cotovelo voltado para baixo ($O - A - B$) e uma outra posição com o cotovelo voltado para cima ($O - A' - B$), com dois graus de liberdade cada uma com movimentos no plano XY . Apresentar a cinemática inversa, isto é, conhecendo somente as coordenadas do ponto $B = (c, d)$, determinar os ângulos θ e $\alpha > 0$, o que representa o cotovelo voltado para baixo, e determinar os ângulos θ' e $\alpha' < 0$, o que representa o cotovelo voltado para cima, como ilustra a Figura 32. Por simplicidade, denotamos

$$L_1 = \overline{OA} = \overline{OA'} \quad e \quad L_2 = \overline{AB} = \overline{A'B} ,$$

que são os comprimentos das articulações do braço robótico.

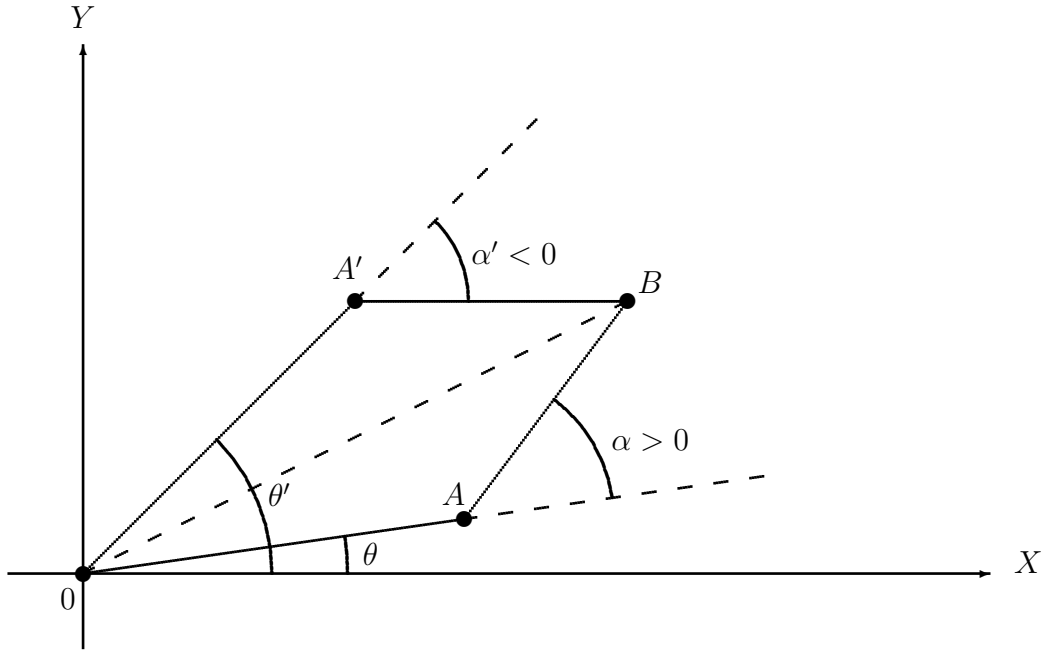


Figura 32: Braço robótico com dois graus de liberdade – Cinemática Inversa.

Resolução:

Vamos apresentar a cinemática inversa para o braço robótico, isto é, desejamos encontrar os ângulos θ e α , conhecendo as coordenadas do ponto $B = (c, d)$ e os valores de L_1 e L_2 . Assim, determinamos as coordenadas do ponto $A = (a, b)$. Inicialmente, analisamos em qual região do plano deve estar o ponto B para que o problema tenha solução, considerando a movimentação do ponto B nas situações $0 < \alpha < \pi$ e $-\pi < \alpha' < 0$, com $L_2 < L_1$, como ilustra a Figura 32.

Na Figura 33 temos a ilustração da região do plano na qual o ponto $B = (c, d)$ pode estar localizado, isto é, sua localização está no anel circular definido pela circunferência menor de centro na origem e de raio $r = L_1 - L_2$ e pela circunferência maior de centro na origem e de raio $R = L_1 + L_2$. Assim, as coordenadas do ponto B devem satisfazer simultaneamente as seguintes desigualdades

$$(L_1 - L_2)^2 < c^2 + d^2 < (L_1 + L_2)^2 . \quad (11)$$

Note que o ponto B pertence a circunferência de raio $R = L_1 + L_2$ para $\alpha = 0$ e pertence a circunferência de raio $r = L_1 - L_2$ para $\alpha = \pi$, situações nas quais os pontos A e B estão sobre uma mesma reta suporte, como ilustra a Figura 34.

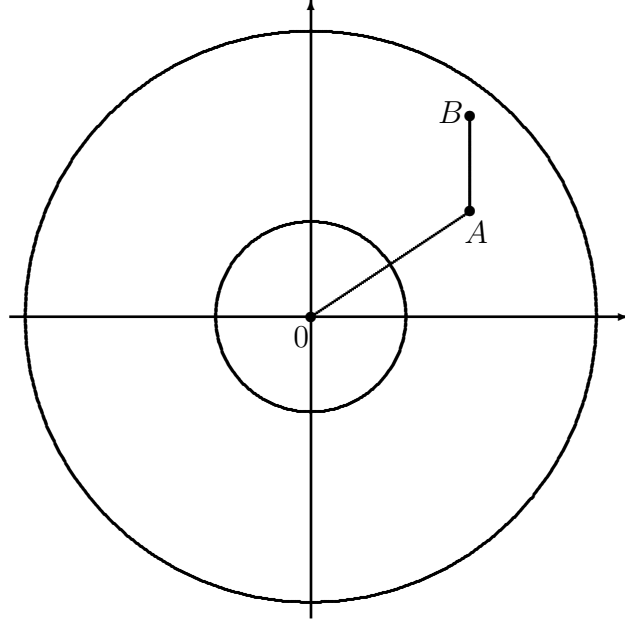


Figura 33: Restrição sobre a localização do ponto B .

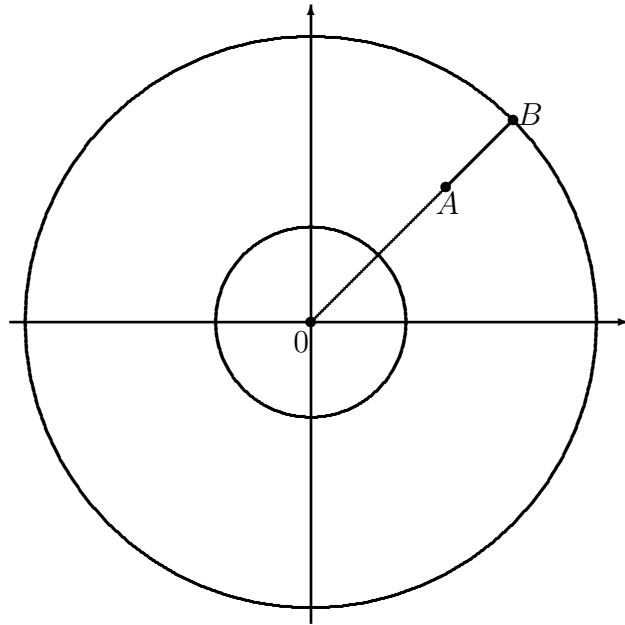


Figura 34: Restrição sobre a localização do ponto B .

Considerando as equações (10), obtidas da cinemática direta, dadas por:

$$c = L_1 \cos(\theta) + L_2 \cos(\theta + \alpha) \quad \text{e} \quad d = L_1 \sin(\theta) + L_2 \sin(\theta + \alpha) , \quad (12)$$

determinamos as equações da cinemática inversa, que neste caso, desejamos encontrar os ângulos θ e α conhecendo somente as coordenadas do ponto $B = (c, d)$.

Das equações (12), obtemos

$$c^2 = (L_1 \cos(\theta))^2 + 2L_1L_2 \cos(\theta) \cos(\theta + \alpha) + (L_2 \cos(\theta + \alpha))^2 , \quad (13)$$

$$d^2 = (L_1 \sin(\theta))^2 + 2L_1L_2 \sin(\theta) \sin(\theta + \alpha) + (L_2 \sin(\theta + \alpha))^2 . \quad (14)$$

Somando membro a membro as equações (13) e (14), obtemos

$$c^2 + d^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2(\cos(\theta) \cos(\theta + \alpha) + \sin(\theta) \sin(\theta + \alpha)) . \quad (15)$$

Recordando as identidades trigonométricas do cosseno da soma e do seno da soma:

$$\cos(\theta + \alpha) = \cos(\theta) \cos(\alpha) - \sin(\theta) \sin(\alpha) , \quad (16)$$

$$\sin(\theta + \alpha) = \sin(\theta) \cos(\alpha) + \cos(\theta) \sin(\alpha) . \quad (17)$$

Substituindo as equações (16) e (17) na equação (15), obtemos

$$c^2 + d^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2 \cos(\alpha) . \quad (18)$$

Da equação (18), obtemos

$$\cos(\alpha) = \frac{c^2 + d^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2} . \quad (19)$$

Tomando a função inversa da função cosseno na equação (19), obtemos duas opções para o ângulo α :

$$\alpha = \pm \arccos \left(\frac{c^2 + d^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2} \right) , \quad (20)$$

conforme ilustra a Figura 35. Escolhemos o sinal do ângulo α dependendo como desejamos a posição do cotovelo do braço robótico, representado pelo ponto $A = (a, b)$. Na situação do cotovelo voltado para baixo, dizemos que o ângulo α é positivo. Essa configuração é obtida quando o ponto B faz uma rotação no sentido anti-horário com centro no ponto A . Na situação do cotovelo voltado para cima, dizemos que o ângulo α' é negativo. Essa configuração é obtida quando o ponto B faz uma rotação no sentido horário com centro no ponto A' .

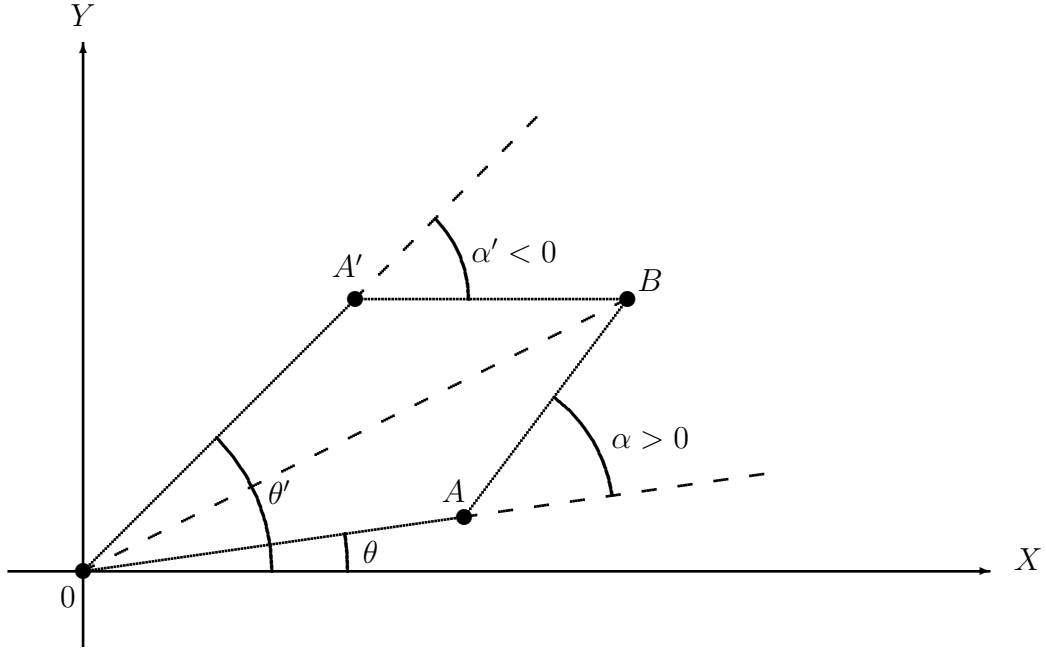


Figura 35: Cinemática inversa do movimento do braço robótico com dois graus de liberdade.

Podemos também obter a relação dada na equação (19) pela aplicação da *Lei dos Cossenos* no triângulo OAB , ilustrado na Figura 35. Sabemos que $\overline{OA} = L_1$, $\overline{AB} = L_2$, além disso, o ângulo $\widehat{OAB} = \pi - \alpha$. Assim, aplicando a Lei dos Cossenos, obtemos

$$(\overline{OB})^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2 L_1 L_2 \cos(\pi - \alpha) . \quad (21)$$

Considerando o ponto $B = (c, d)$, sabemos que $(\overline{OB})^2 = c^2 + d^2$, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ODB , Figura 36, lembrando que $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$, e substituindo essas relações na equação (21), obtemos

$$c^2 + d^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2 L_1 L_2 \cos(\alpha) \quad \Longleftrightarrow \quad \cos \alpha = \frac{c^2 + d^2 - L_1^2 - L_2^2}{2 L_1 L_2} , \quad (22)$$

obtendo a relação apresentada pela equação (19).

Considerando a situação na qual o ângulo $\alpha > 0$, cotovelo voltado para baixo, como ilustra Figura 36. No triângulo retângulo ODB temos

$$\tan(\beta) = \frac{d}{c} \quad \text{para} \quad c \neq 0 . \quad (23)$$

Note que o ângulo $\beta = \theta + \gamma$. Assim, o ângulo $\theta = \beta - \gamma$.

No triângulo retângulo OCB , e utilizando o triângulo retângulo ACB , temos

$$\tan(\gamma) = \frac{L_2 \sin(\alpha)}{L_1 + L_2 \cos(\alpha)} \quad \text{para} \quad \cos(\alpha) \neq -\frac{L_1}{L_2} . \quad (24)$$

É importante observar que a restrição sobre $\cos(\alpha)$ apresentada em (24) é automaticamente satisfeita quando o ponto $B = (c, d)$ satisfaz a restrição apresentada em (11).

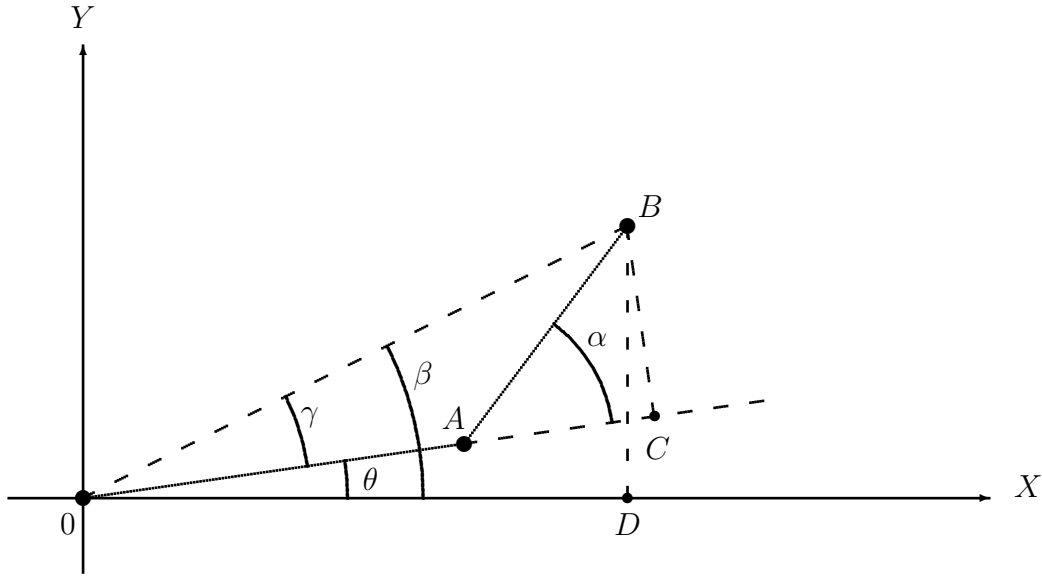


Figura 36: Cinemática inversa do movimento do braço robótico com dois graus de liberdade.

Como o ângulo $\theta = \beta - \gamma$, temos $\tan(\theta) = \tan(\beta - \gamma)$. Recordando agora a identidade trigonométrica da tangente da diferença:

$$\tan(\theta) = \tan(\beta - \gamma) = \frac{\tan(\beta) - \tan(\gamma)}{1 + \tan(\beta) \tan(\gamma)} . \quad (25)$$

Substituindo as equações (23) e (24) na equação (25), obtemos

$$\tan(\theta) = \frac{\frac{d}{c} - \frac{L_2 \sin(\alpha)}{L_1 + L_2 \cos(\alpha)}}{1 + \frac{d}{c} \frac{L_2 \sin(\alpha)}{L_1 + L_2 \cos(\alpha)}} = \frac{\frac{d(L_1 + L_2 \cos(\alpha)) - cL_2 \sin(\alpha)}{c(L_1 + L_2 \cos(\alpha))}}{\frac{c(L_1 + L_2 \cos(\alpha)) + dL_2 \sin(\alpha)}{c(L_1 + L_2 \cos(\alpha))}} . \quad (26)$$

Depois de realizar algumas manipulações algébricas na equação (26), obtemos

$$\tan(\theta) = \frac{d(L_1 + L_2 \cos(\alpha)) - cL_2 \sin(\alpha)}{c(L_1 + L_2 \cos(\alpha)) + dL_2 \sin(\alpha)} . \quad (27)$$

Considerando a situação na qual o ângulo $\alpha' < 0$, cotovelo voltado para cima, como ilustra Figura 37. No triângulo retângulo BOD temos

$$\tan(\beta) = \frac{d}{c} \quad \text{para} \quad c \neq 0. \quad (28)$$

Note que o ângulo $\beta = \theta' - \gamma'$. Assim, o ângulo $\theta' = \beta + \gamma'$.

Considerando o raciocínio do caso anterior, e os triângulos retângulo BOC' e BAC' , temos

$$\tan(\gamma') = \frac{L_2 \sin(\alpha')}{L_1 + L_2 \cos(\alpha')} \quad \text{para} \quad \cos(\alpha') \neq -\frac{L_1}{L_2}. \quad (29)$$

É importante observar que a restrição sobre $\cos(\alpha')$ apresentada em (29) é automaticamente satisfeita quando o ponto $B = (c, d)$ satisfaz a restrição apresentada em (11).

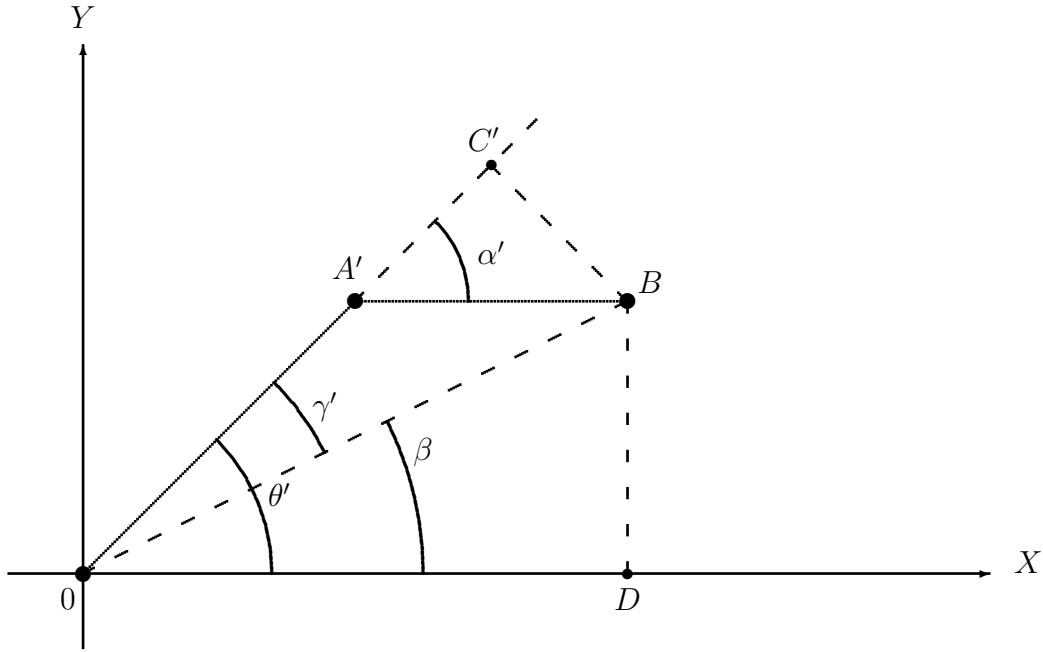


Figura 37: Cinemática inversa do movimento do braço robótico com dois graus de liberdade.

Recordando agora a identidade trigonométrica da tangente da soma:

$$\tan(\theta') = \tan(\beta + \gamma') = \frac{\tan(\beta) + \tan(\gamma')}{1 - \tan(\beta)\tan(\gamma')}. \quad (30)$$

Substituindo as equações (28) e (29) na equação (30), e realizando algumas manipulações algébricas de modo análogo ao caso anterior, obtemos

$$\tan(\theta') = \frac{d(L_1 + L_2 \cos(\alpha')) + cL_2 \sin(\alpha')}{c(L_1 + L_2 \cos(\alpha')) - dL_2 \sin(\alpha')}. \quad (31)$$

É importante observar que o sinal do ângulo α tem por objetivo indicar a orientação do movimento realizado pela extremidade do braço robótico, isto é, do ponto B , mostrando um movimento no sentido horário ou no sentido anti-horário, com relação a reta suporte do segmento OA . Além disso, devemos ressaltar que as equações (27) e (31) foram obtidas através de relações trigonométricas em triângulos retângulos nas quais não utilizamos o sinal do ângulo α . Note que de certa forma o sinal do ângulo α pode ser interpretado quando na obtenção da equação (27) fazemos uso da tangente da diferença e na obtenção da equação (31) fazemos uso da tangente da soma. Assim, podemos analisar o sinal do ângulo α de vários aspectos.

Observe na equação (27) que o cálculo do ângulo θ depende do cosseno do ângulo α , previamente calculado na equação (19), e do seno do ângulo α . Tomando a identidade trigonométrica

$$(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = 1 ,$$

temos duas possibilidades para o seno do ângulo α , dadas por:

$$\sin(\alpha) = \pm \sqrt{1 - (\cos(\alpha))^2} . \quad (32)$$

Assim, escolhemos

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - (\cos(\alpha))^2} , \quad (33)$$

uma vez que estamos considerando a situação do ângulo α positivo.

Exemplo 25 *Para exemplificar o processo da cinemática inversa, consideramos um braço robótico com dois graus de Liberdade com movimentos no plano XY , com os comprimentos de suas articulações dados por:*

$$L_1 = \overline{OA} = 100 \text{ cm} \quad e \quad L_2 = \overline{AB} = 50 \text{ cm} ,$$

no qual conhecemos a posição da extremidade dada pelo ponto $B = (110, 100)$.

Com as informações acima e com as equações da cinemática inversa, vamos encontrar os ângulos θ e α , e consequentemente determinamos a posição do ponto A que representa o cotovelo do braço robótico. Lembrando que temos duas possibilidades.

Tomando a equação (19), temos

$$\cos(\alpha) = \frac{c^2 + d^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2} = \frac{110^2 + 100^2 - 100^2 - 50^2}{2 \times 100 \times 50} = \frac{9600}{10000} = 0,96 . \quad (34)$$

Logo, $\sin(\alpha) = \pm \sqrt{1 - 0,96^2} = \pm 0,28$.

Assim, o ângulo $\alpha = \pm \arccos(0,96) \approx \pm 0,2838$ radianos, ou $\alpha \approx \pm 16,26^\circ$, que são as duas soluções do problema de cinemática inversa, como ilustra a Figura 38.

Tomando o ângulo α positivo, da equação (27), obtemos

$$\begin{aligned} \tan(\theta) &= \frac{d(L_1 + L_2 \cos(\alpha)) - cL_2 \sin(\alpha)}{c(L_1 + L_2 \cos(\alpha)) + dL_2 \sin(\alpha)} \\ &= \frac{100 \times (100 + 50 \times 0,96) - 110 \times 50 \times 0,28}{110 \times (100 + 50 \times 0,96) + 100 \times 50 \times 0,28} \\ &= \frac{13260}{17680} = 0,75 . \end{aligned} \quad (35)$$

Assim, o ângulo $\theta = \arctan(\theta) \approx 0,6435$ radianos, ou $\theta \approx 36,87^\circ$.

Finalmente, podemos calcular as coordenadas do ponto $A = (a, b)$ que são dadas por:

$$a = L_1 \cos(\theta) = 80 \quad \text{e} \quad b = L_1 \sin(\theta) = 60 \quad , \quad (36)$$

uma vez que no triângulo retângulo OCA , temos $|a| = \overline{OC}$, $|b| = \overline{CA}$ e $L_1 = \overline{OA}$, como ilustra a Figura 39 e a Figura 40, para o ângulo θ positivo e negativo, respectivamente.

De modo análogo, tomando o ângulo α negativo, da equação (27), obtemos

$$\begin{aligned} \tan(\theta) &= \frac{d(L_1 + L_2 \cos(\alpha)) - cL_2 \sin(\alpha)}{c(L_1 + L_2 \cos(\alpha)) + dL_2 \sin(\alpha)} \\ &= \frac{100 \times (100 + 50 \times 0,96) + 110 \times 50 \times 0,28}{110 \times (100 + 50 \times 0,96) - 100 \times 50 \times 0,28} \\ &= \frac{16340}{14880} \approx 1,098 \quad . \end{aligned} \quad (37)$$

Assim, o ângulo $\theta = \arctan(\theta) \approx 0,8321$ radianos, ou $\theta \approx 47,68^\circ$.

Finalmente, podemos calcular as coordenadas do ponto $A' = (a', b')$ que são dadas por:

$$a' = L_1 \cos(\theta) \approx 67.33 \quad \text{e} \quad b' = L_1 \sin(\theta) \approx 73.94 \quad . \quad (38)$$

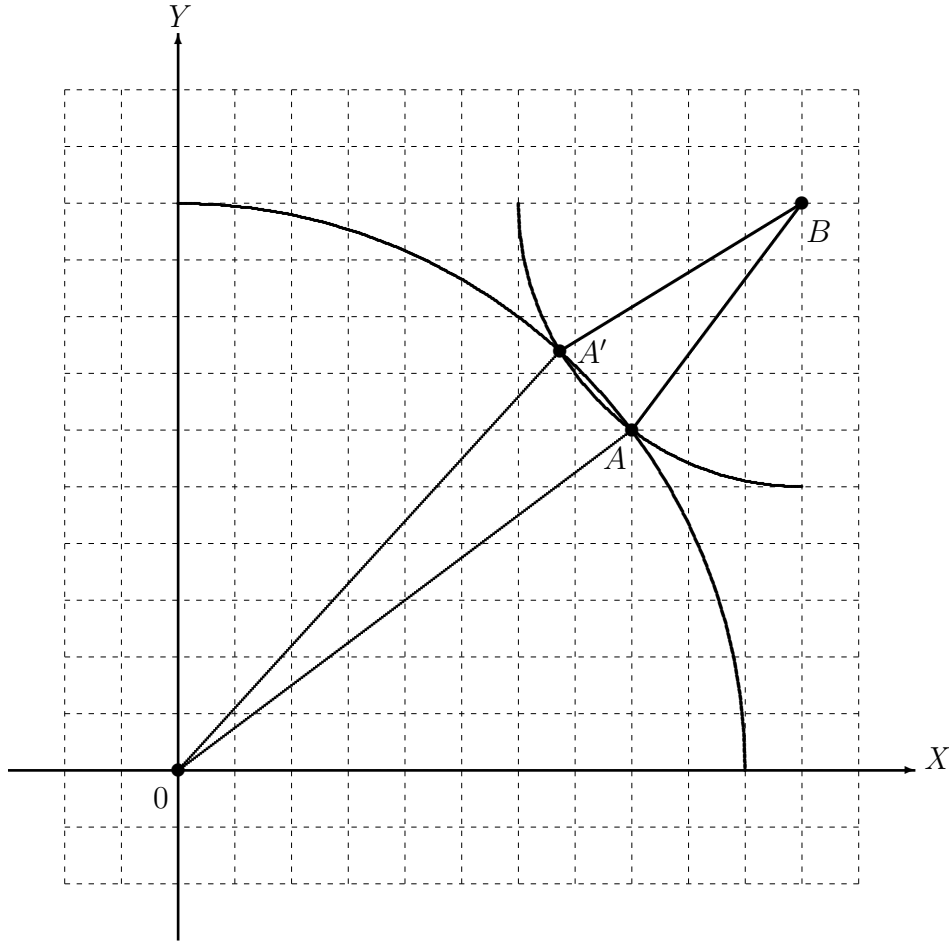


Figura 38: Solução Geométrica – Cinemática Inversa.

Conhecendo a tangente do ângulo θ , podemos também calcular as coordenadas do ponto $A = (a, b)$ considerando as seguinte equações:

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a} \quad \text{para} \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad b = a \tan(\theta) \quad (39)$$

$$a^2 + b^2 = L_1^2, \quad (40)$$

uma vez que no triângulo retângulo OCA , temos $|a| = \overline{OC}$, $|b| = \overline{CA}$ e $L_1 = \overline{OA}$, como ilustra a Figura 39 e a Figura 40, para o ângulo θ positivo e negativo, respectivamente.

Substituindo a relação encontrada para b , dada na equação (39), na equação (40), temos

$$a^2 + a^2(\tan(\theta))^2 = L_1^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2(1 + (\tan(\theta))^2) = L_1^2, \quad (41)$$

uma vez que a é positivo, considerando a restrição do ângulo θ dada por:

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad (42)$$

encontramos

$$a = \frac{L_1}{\sqrt{1 + (\tan(\theta))^2}} \quad \text{e} \quad b = a \tan(\theta), \quad (43)$$

como ilustra a Figura 39 e a Figura 40, para o ângulo θ positivo e negativo, respectivamente.

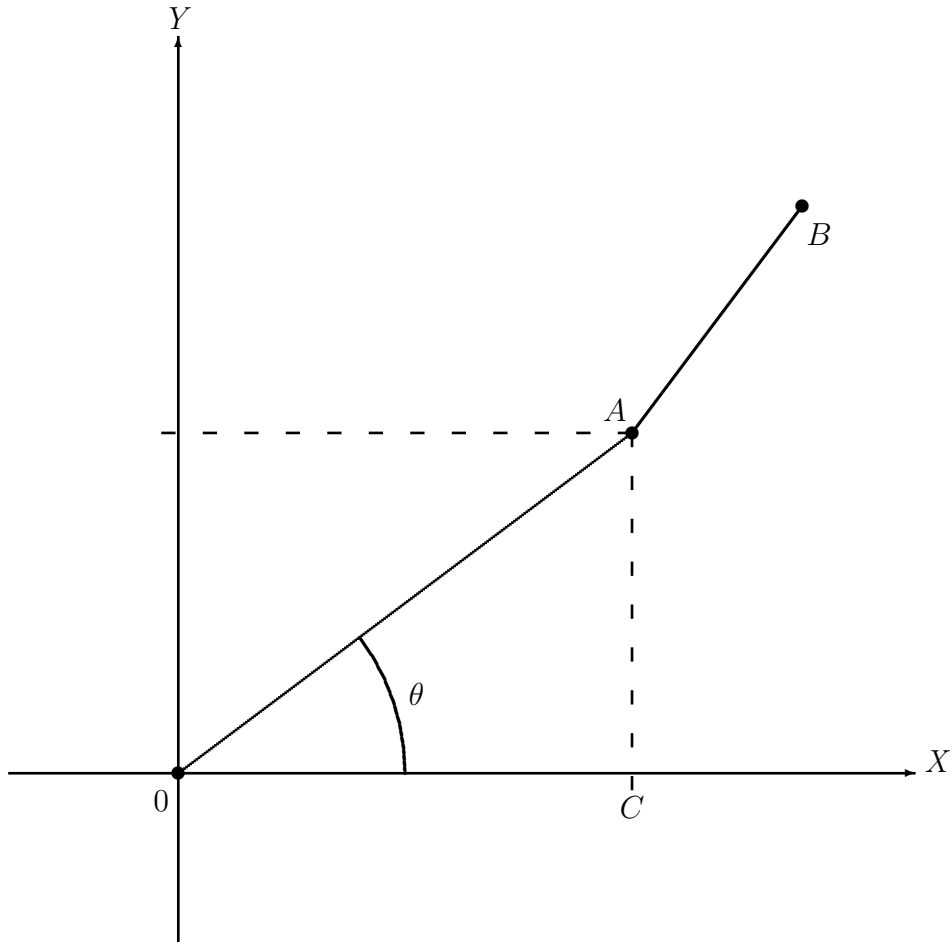


Figura 39: Solução Geométrica – Cinemática Inversa.

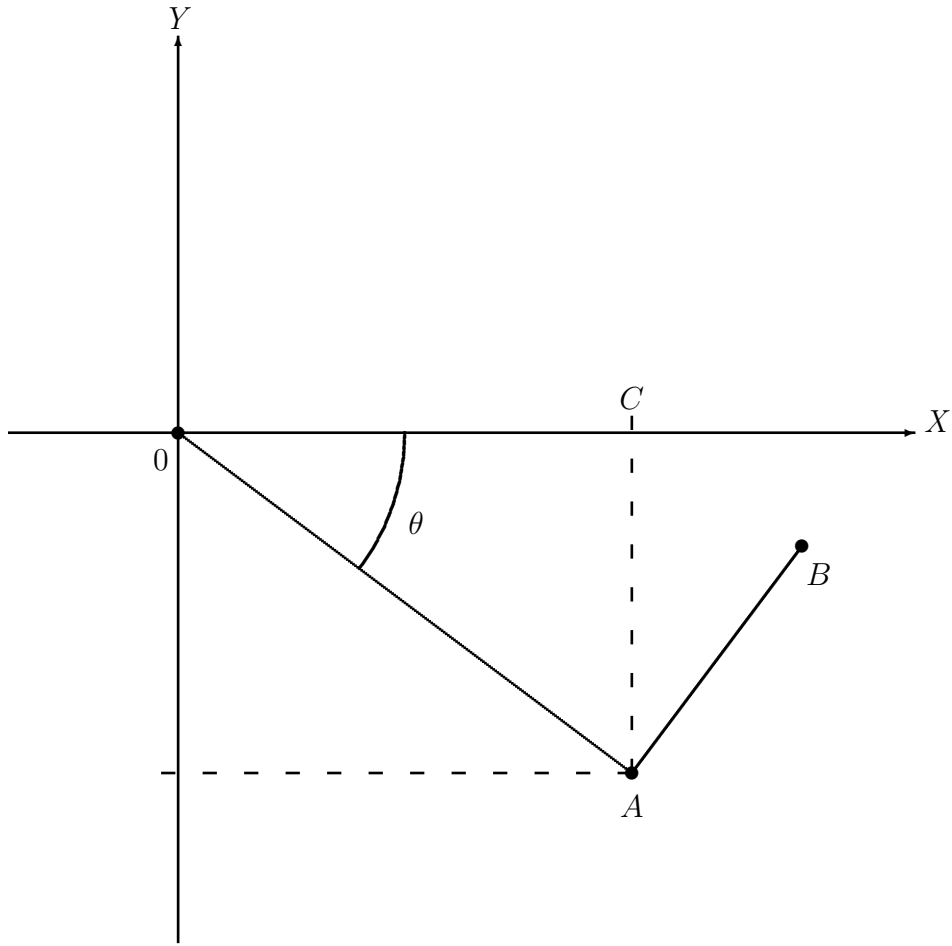


Figura 40: Solução Geométrica – Cinemática Inversa.

Finalmente, temos que analisar as situações nas quais o ângulo θ se encontra no intervalo

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} , \quad (44)$$

isto é, quanto o ponto A , ou o ponto A' , está situado no segundo quadrante ou no terceiro quadrante do plano cartesiano. Essa análise é necessária pois a função inversa da função tangente pode ser definida somente quando o ângulo θ está no intervalo

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} , \quad (45)$$

isto é, quanto o ponto A , ou o ponto A' , está situado no primeiro quadrante ou no quarto quadrante do plano cartesiano, situações analisadas anteriormente, nas quais encontramos sem ambiguidade as coordenadas do cotovelo nas duas soluções possíveis.

De uma maneira geral, conhecendo o valor $\tan(\theta)$, para encontrar as coordenadas do ponto $A = (a, b)$, consideramos a equação (41), obtendo

$$a^2(1 + (\tan(\theta))^2) = L_1^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a = \pm \frac{L_1}{\sqrt{1 + (\tan(\theta))^2}} , \quad (46)$$

entretanto, somente um dos valores de a é a solução do problema. Desse modo, escolhemos adequadamente o sinal de a , e consequentemente o sinal de b , que é dado por $b = a \tan(\theta)$, verificando a condição geométrica $\overline{AB} = L_2$ escrita da forma:

$$\sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2} = L_2 , \quad (47)$$

garantindo que o ponto A escolhido é uma das possíveis solução para o cotovelo, como ilustra a Figura 41. De modo análogo, conhecendo o valor $\tan(\theta')$, encontramos as coordenadas do ponto $A' = (a', b')$ com o procedimento descrito acima, e escolhemos adequadamente o sinal de a' , e consequentemente o sinal de b' , que é dado por $b' = a' \tan(\theta')$, verificando a condição geométrica $\overline{A'B} = L_2$ escrita da forma:

$$\sqrt{(c - a')^2 + (d - b')^2} = L_2 . \quad (48)$$

Na Figura 41, mostramos de forma geométrica as duas possibilidades para a solução do braço robótico com dois graus de liberdade com movimentos no plano XY . Traçando a circunferência de centro no ponto 0 e com raio L_1 juntamente com a circunferência de centro no ponto B e com raio L_2 , a interseção dessas circunferências são as duas soluções possíveis para a posição do cotovelo, conhecendo a posição do ponto B .

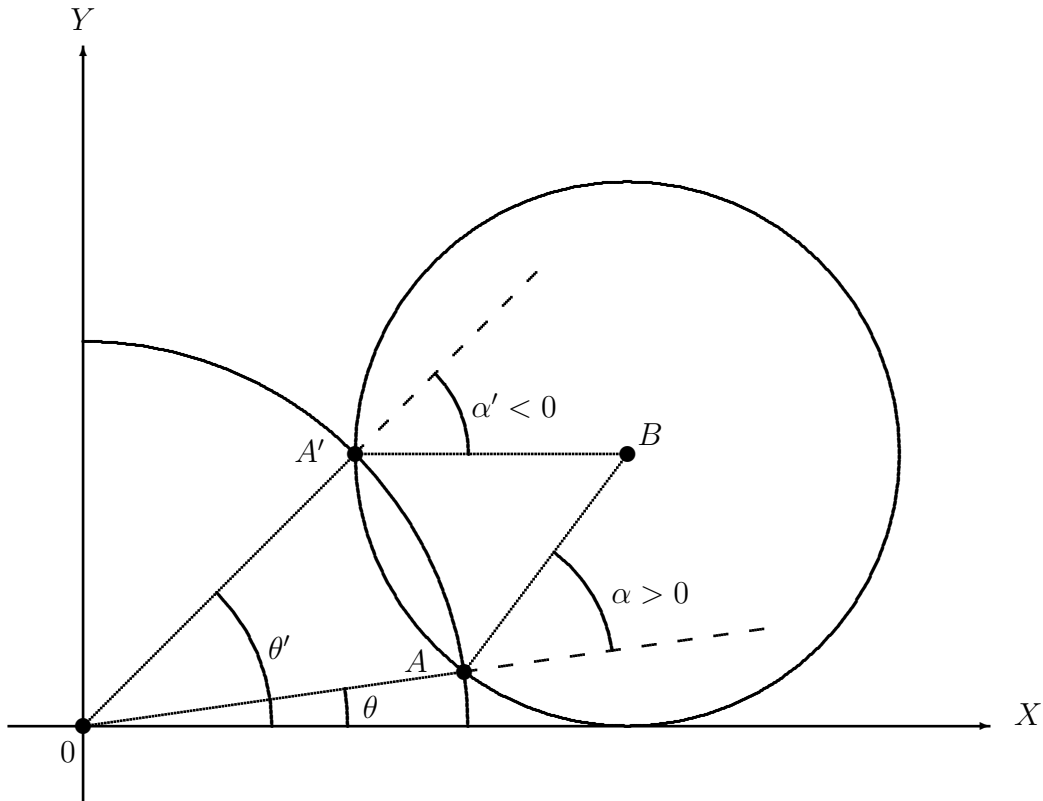


Figura 41: Cinemática inversa do movimento do braço robótico – Solução Geométrica.

11 O Espaço Tridimensional

De modo análogo, ao estudo do espaço cartesiano \mathbb{R}^2 , o espaço numérico tridimensional, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, é um outro exemplo importante de produto cartesiano. Os elementos $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ são as ternas ordenadas de números reais. As ternas ordenadas surgem como as coordenadas cartesianas de um ponto P do espaço tridimensional \mathbb{E}^3 , quando fixamos nesse espaço tridimensional um sistema de três eixos perpendiculares, que vamos indicar por OX , OY e OZ , que se interceptam no ponto $O = (0, 0, 0)$, chamado **origem** do sistema de coordenadas, como ilustra a Figura 42.

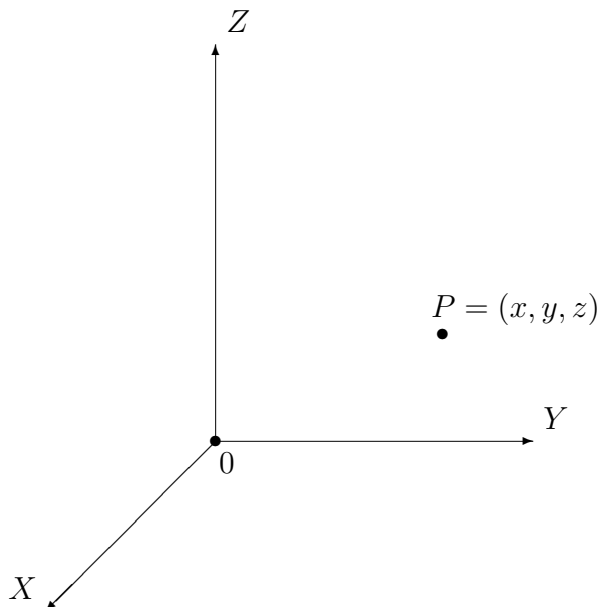


Figura 42: Espaço Tridimensional \mathbb{E}^3 .

A aplicação $f : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que associa a cada ponto P do espaço tridimensional \mathbb{E}^3 sua única terna de coordenadas $f(P) = (x, y, z)$, relativas a um sistema coordenado de três eixos perpendiculares, é uma bijeção, isto é, uma correspondência biunívoca entre os elementos de \mathbb{R}^3 e de \mathbb{E}^3 . Desse modo, temos que a aplicação $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ associa a cada terna ordenada (x, y, z) de \mathbb{R}^3 um único ponto $f^{-1}(x, y, z) = P$ do espaço tridimensional \mathbb{E}^3 .

Assim, podemos dizer que o \mathbb{R}^3 é o modelo aritmético do espaço tridimensional \mathbb{E}^3 , enquanto que o espaço tridimensional \mathbb{E}^3 é o modelo geométrico do espaço numérico \mathbb{R}^3 . Desse modo, com a identificação entre o \mathbb{R}^3 e o espaço tridimensional \mathbb{E}^3 , da Geometria Euclidiana, realizada pela bijeção f , podemos olhar para o \mathbb{R}^3 como sendo o espaço numérico tridimensional, e chamaremos seus elementos $P = (x, y, z)$ de **pontos**.

11.1 Transformações no Espaço Tridimensional

Exemplo 26 Uma rotação em torno do eixo- OZ de um ângulo θ no sentido anti-horário, e de centro na origem do sistema de coordenadas, é representada por uma matriz ortogonal de ordem 3×3 , que denotamos por $R_{z,\theta}$, que de acordo com as relações (1) e (2) e observando que todos os pontos sobre o eixo- OZ ficam fixos, é dada por:

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que essa rotação pode ser pensada como sendo uma rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário, e de centro na origem do sistema de coordenadas, no plano XY , como ilustra a Figura 43. Note que o eixo- OZ é perpendicular a qualquer plano paralelo ao plano XY . Dizemos que essa rotação em torno do eixo- OZ é realizada no sentido positivo, isto é, considerando um observador ao longo da parte positiva desse eixo e olhando para a origem do sistema de coordenadas efetuamos a rotação em torno do eixo no sentido anti-horário.

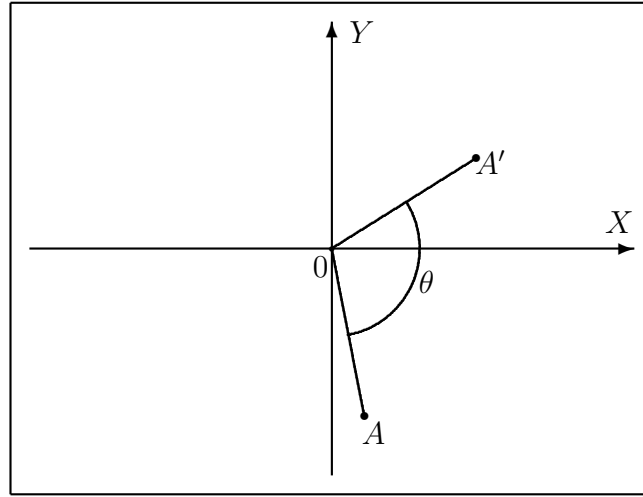


Figura 43: Rotação em Torno do eixo- OZ .

Observe que, dado um ponto $A = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ a sua imagem, denotada pelo ponto $A' = (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$, por uma rotação em torno do eixo- OZ de um ângulo θ no sentido anti-horário, e de centro na origem do sistema de coordenadas, é dada por:

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos(\theta) - b \sin(\theta) \\ a \sin(\theta) + b \cos(\theta) \\ c \end{bmatrix}$$

Considere o espaço tridimensional \mathbb{R}^3 . A transformação geométrica definida da forma

$$\begin{aligned} T_{z,\theta} : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longrightarrow T_{z,\theta}(x, y, z) = (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta), z) \end{aligned}$$

é denominada uma rotação em torno do eixo- OZ de um ângulo θ no sentido anti-horário, de centro na origem do sistema de coordenadas.

Exemplo 27 Uma rotação em torno do eixo- OX de um ângulo α no sentido anti-horário, e de centro na origem do sistema de coordenadas, é representada por uma matriz ortogonal de ordem 3×3 , que denotamos por $R_{x,\alpha}$, que de acordo com as relações (1) e (2) e observando que todos os pontos sobre o eixo- OX ficam fixos, é dada por:

$$R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Note que essa rotação pode ser pensada como sendo uma rotação de um ângulo α no sentido anti-horário, e de centro na origem do sistema de coordenadas, no plano YZ , como ilustra a Figura 44. Note que o eixo- OX é perpendicular a qualquer plano paralelo ao plano YZ . Dizemos que essa rotação em torno do eixo- OX é realizada no sentido positivo, isto é, considerando um observador ao longo da parte positiva desse eixo e olhando para a origem do sistema de coordenadas efetuamos a rotação em torno do eixo no sentido anti-horário.

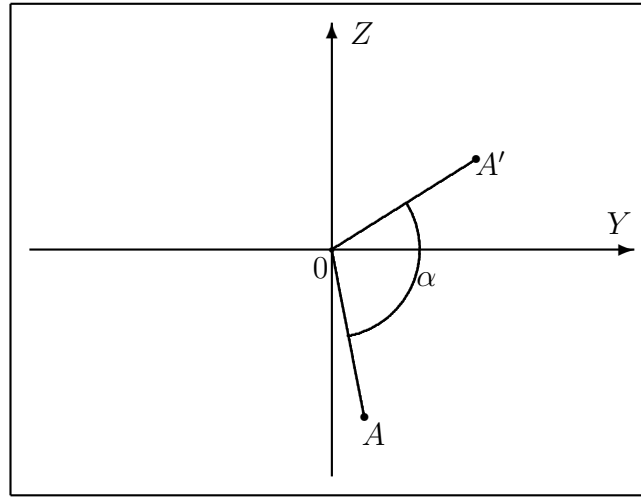


Figura 44: Rotação em Torno do eixo- OX .

Observe que, dado um ponto $A = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ a sua imagem, denotada pelo ponto $A' = (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$, por uma rotação em torno do eixo- OX de um ângulo α no sentido anti-horário, e de centro na origem do sistema de coordenadas, é dada por:

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \cos(\alpha) - c \sin(\alpha) \\ b \sin(\alpha) + c \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Considere o espaço tridimensional \mathbb{R}^3 . A transformação geométrica definida da forma

$$\begin{aligned} T_{x,\alpha} : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longrightarrow T_{x,\alpha}(x, y, z) = (x, y \cos(\alpha) - z \sin(\alpha), y \sin(\alpha) + z \cos(\alpha)) \end{aligned}$$

é denominada uma rotação em torno do eixo- OX de um ângulo α no sentido anti-horário, de centro na origem do sistema de coordenadas.

Exemplo 28 Uma rotação em torno do eixo- OY de um ângulo β no sentido anti-horário, e de centro na origem do sistema de coordenadas, é representada por uma matriz ortogonal de ordem 3×3 , que denotamos por $R_{y,\beta}$, que de acordo com as relações (1) e (2) e observando que todos os pontos sobre o eixo- OY ficam fixos, é dada por:

$$R_{y,\beta} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

Note que essa rotação pode ser pensada como sendo uma rotação de um ângulo β no sentido anti-horário, e de centro na origem do sistema de coordenadas, no plano ZX , como ilustra a Figura 45. Note que o eixo- OY é perpendicular a qualquer plano paralelo ao plano ZX . Dizemos que essa rotação em torno do eixo- OY é realizada no sentido positivo, isto é, considerando um observador ao longo da parte positiva desse eixo e olhando para a origem do sistema de coordenadas efetuamos a rotação em torno do eixo no sentido anti-horário.

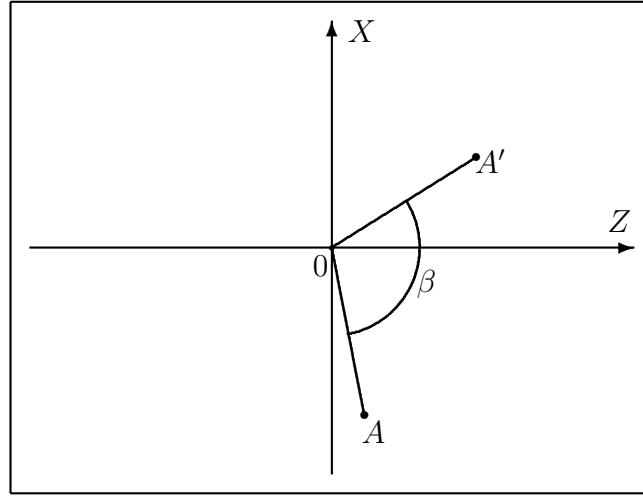


Figura 45: Rotação em Torno do eixo- OY .

Considerando que a rotação em torno do eixo- OY pode ser pensada como sendo uma rotação de um ângulo β no sentido anti-horário, e de centro na origem do sistema de coordenadas, no plano ZX , como ilustra a Figura 45, e utilizando a relação (1) e observando que todos os pontos sobre o eixo- OY ficam fixos, tem-se:

$$\begin{bmatrix} z' \\ y' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \cos(\beta) - x \sin(\beta) \\ y \\ z \sin(\beta) + x \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (49)$$

Desse modo, a imagem do ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é o ponto $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ dado por:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos(\beta) + z \sin(\beta) \\ y \\ -x \sin(\beta) + z \cos(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (50)$$

Assim, a matriz que representa a rotação em torno do eixo- OY é dada por:

$$R_{y,\beta} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

de acordo com a relação (50).

Portanto, dado um ponto $A = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ a sua imagem, que vamos denotar pelo ponto $A' = (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$, por uma rotação em torno do eixo- OY de um ângulo β no sentido anti-horário, e de centro na origem do sistema de coordenadas, é dada por:

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos(\beta) + c \sin(\beta) \\ b \\ -a \sin(\beta) + c \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

Considere o espaço tridimensional \mathbb{R}^3 . A transformação geométrica definida da forma

$$\begin{aligned} T_{y,\beta} : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longrightarrow T_{y,\beta}(x, y, z) = (x \cos(\beta) + z \sin(\beta), y, -x \sin(\beta) + z \cos(\beta)) \end{aligned}$$

é denominada uma rotação em torno do eixo- OY de um ângulo β no sentido anti-horário, de centro na origem do sistema de coordenadas.

Exemplo 29 Considere o ponto $A = (20, 20, 30) \in \mathbb{R}^3$. Vamos determinar sua imagem por uma rotação em torno do eixo- OZ de um ângulo $\theta = \frac{\pi}{4}$ no sentido anti-horário, e de centro na origem do sistema de coordenadas. Denotamos pelo ponto $A' = (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$ a imagem do ponto A , isto é, $A' = T_{z,\theta}(A)$, que é calculada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20\sqrt{2} \\ 30 \end{bmatrix}$$

Portanto, temos o ponto $A' = T_{z,\theta}(A)$ dado por:

$$A' = (0, 20\sqrt{2}, 30) \quad .$$

Exemplo 30 Considere o espaço tridimensional \mathbb{R}^3 e um elemento fixo, porém arbitrário, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. A transformação

$$\begin{aligned} T : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longrightarrow T(x, y, z) = (x, y, z) + (a, b, c) = (x + a, y + b, z + c) \end{aligned}$$

é denominada uma **translação**.

Dado um ponto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ a sua imagem, denotada pelo ponto $P' = (x', y', z')$, pela transformação T é definida da forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \\ z + c \end{bmatrix}.$$

Podemos verificar facilmente que a translação é uma transformação afim. Assim, a translação não pode ser representada por uma matriz.

Exemplo 31 Considere o espaço tridimensional \mathbb{R}^3 , e escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ fixos, porém arbitrários. A transformação

$$\begin{aligned} T : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longrightarrow T(x, y, z) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y, \lambda_3 z) \end{aligned}$$

é denominada **escala**.

Dizemos que a transformação é uma escala não uniforme quando $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são distintos, e dizemos que é uma escala uniforme quando $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Note que na escala uniforme podemos ter uma contração ou uma expansão. A interpretação geométrica neste caso é a mesma ilustrada na Figura 5, isto é, considerando o segmento de reta OP , fica fácil ver que foi o segmento de reta que sofreu uma expansão ou uma contração.

Dado um ponto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ a sua imagem, denotada pelo ponto $P' = (x', y', z')$, pela transformação T é definida da forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_2 y \\ \lambda_3 z \end{bmatrix}.$$

Assim, denotamos $T(P) = P'$, isto é, $T(x, y, z) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y, \lambda_3 z) \in \mathbb{R}^3$.

Desse modo, dizemos que o ponto $P' = (\lambda_1 x, \lambda_2 y, \lambda_3 z)$ é a imagem do ponto $P = (x, y, z)$ pela transformação T , que é representada pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

11.2 Composição de Transformações

Definição 9 Considere $P : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ duas transformações geométricas. Definimos a composição das transformações P e T , que denotamos por $P \circ T$, da forma:

$$\begin{aligned} P \circ T : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longrightarrow (P \circ T)(x, y, z) = P(T(x, y, z)) \end{aligned}$$

Exemplo 32 Podemos verificar facilmente que se P e T são transformações lineares, então a composta $P \circ T$ é uma transformação linear.

De fato, considere os pontos $A, B \in \mathbb{R}^3$ e o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} (P \circ T)(A + \lambda B) &= P(T(A + \lambda B)) = P(T(A) + T(\lambda B)) \\ &= P(T(A) + \lambda T(B)) = P(T(A)) + P(\lambda T(B)) \\ &= P(T(A)) + \lambda P(T(B)) \\ &= (P \circ T)(A) + \lambda (P \circ T)(B) \end{aligned}$$

Exemplo 33 Por simplicidade vamos considerar uma rotação em torno do eixo- OZ de um ângulo θ no sentido anti-horário, de centro na origem do sistema de coordenadas, que vamos representar da forma:

$$\begin{aligned} T_{z,\theta} : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longrightarrow T_{z,\theta}(x, y, z) = (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta), z) \end{aligned}$$

e uma rotação em torno do eixo- OY de um ângulo β no sentido anti-horário, de centro na origem do sistema de coordenadas, que vamos representar da forma:

$$\begin{aligned} T_{y,\beta} : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longrightarrow T_{y,\beta}(x, y, z) = (x \cos(\beta) + z \sin(\beta), y, -x \sin(\beta) + z \cos(\beta)) \end{aligned}$$

Dado um ponto $A = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, vamos determinar a sua imagem, denotada pelo ponto $A' = (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$, primeiro por uma rotação em torno do eixo- OZ de um ângulo θ no sentido anti-horário, em seguida por uma rotação em torno do eixo- OY de um ângulo β no sentido anti-horário, todas de centro na origem do sistema de coordenadas.

Desse modo, o ponto $A' = (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$ é obtido pela **composição** de duas rotações que vamos representar da seguinte forma:

$$A' = (T_{y,\beta} \circ T_{z,\theta})(A) = T_{y,\beta}(T_{z,\theta}(A)) .$$

Portanto, de forma matricial a composição $T_{y,\beta} \circ T_{z,\theta}$ é representada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} .$$

Exemplo 34 Considere o ponto $A = (20, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$, vamos determinar a sua imagem, denotada pelo ponto $A' = (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$, primeiro por uma rotação em torno do eixo-OZ de um ângulo $\theta = \frac{\pi}{4}$, em seguida por uma rotação em torno do eixo-OY de um ângulo $\beta = \frac{\pi}{4}$, todas no sentido anti-horário e de centro na origem do sistema de coordenadas.

Portanto, o cálculo do ponto A' pela representação matricial da composição $T_{y,\beta} \circ T_{z,\theta}$ é obtido da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10\sqrt{2} \\ -10 \end{bmatrix} .$$

Portanto,

$$A' = (T_{y,\beta} \circ T_{z,\theta})(A) = T_{y,\beta}(T_{z,\theta}(A)) = (10, 10\sqrt{2}, -10) .$$

Exemplo 35 Considere o ponto $A = (20, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$, vamos determinar a sua imagem, denotada pelo ponto $A' = (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$, primeiro por uma rotação em torno do eixo-OZ de um ângulo $\theta = \frac{\pi}{4}$, em seguida por uma rotação em torno do eixo-OX de um ângulo $\alpha = \frac{\pi}{4}$, todas no sentido anti-horário e de centro na origem do sistema de coordenadas.

Resposta:

$$A' = (T_{x,\alpha} \circ T_{z,\theta})(A) = T_{x,\alpha}(T_{z,\theta}(A)) = (10\sqrt{2}, 10, 10) .$$

Exemplo 36 Considere o ponto $A = (20, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$, vamos determinar a sua imagem, denotada pelo ponto $A' = (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$, primeiro por uma rotação em torno do eixo-OY de um ângulo $\beta = \frac{\pi}{4}$, em seguida por uma rotação em torno do eixo-OZ de um ângulo $\theta = \frac{\pi}{4}$, todas no sentido anti-horário e de centro na origem do sistema de coordenadas.

Resposta:

$$A' = (T_{z,\theta} \circ T_{y,\beta})(A) = T_{z,\theta}(T_{y,\beta}(A)) = (10, 10, -10\sqrt{2}) .$$

Exemplo 37 Considere o ponto $A = (20, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$, vamos determinar a sua imagem, denotada pelo ponto $A' = (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$, primeiro por uma rotação em torno do eixo-OY de um ângulo $\beta = \frac{\pi}{6}$, em seguida por uma rotação em torno do eixo-OX de um ângulo $\alpha = \frac{\pi}{6}$, todas no sentido anti-horário e de centro na origem do sistema de coordenadas.

Resposta:

$$A' = (T_{x,\alpha} \circ T_{y,\beta})(A) = T_{x,\alpha}(T_{y,\beta}(A)) = (10\sqrt{3}, 5, -5\sqrt{3}) .$$

Exemplo 38 Considere o ponto $A = (20, 0, 10) \in \mathbb{R}^3$, vamos determinar a sua imagem, denotada pelo ponto $A' = (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$, primeiro por uma escala não uniforme dada pelos escalares $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 2$, em seguida por uma translação definida pelo elemento $(10, 5, 15) \in \mathbb{R}^3$.

Denotamos pela transformação $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a escala não uniforme e pela transformação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a translação. Assim, a transformação geométrica que estamos procurando é representada pela composição $T \circ P$, dada por:

$$\begin{aligned}(T \circ P)(A) &= T(P(A)) \\ &= T(P(20, 0, 10)) \\ &= T(20, 0, 20) \\ &= (30, 5, 35)\end{aligned}$$

Portanto,

$$A' = (T \circ P)(A) = (30, 5, 35) .$$

Exemplo 39 Considere o ponto $A = (20, 0, 10) \in \mathbb{R}^3$, vamos encontrar sua imagem, que denotamos pelo ponto $A' = (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$, primeiro por uma translação definida pelo elemento $(10, 5, 15) \in \mathbb{R}^3$, em seguida por uma escala não uniforme dada pelos escalares $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 2$.

Denotamos pela transformação $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a escala não uniforme e pela transformação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a translação. Assim, a transformação geométrica que estamos procurando é representada pela composição $T \circ P$, dada por:

$$\begin{aligned}(P \circ T)(A) &= P(T(A)) \\ &= P(T(20, 0, 10)) \\ &= P(30, 5, 25) \\ &= (30, 15, 50)\end{aligned}$$

Portanto,

$$A' = (P \circ T)(A) = (30, 15, 50) .$$

Nos Exemplos (38) e (39), sabemos que as composições $T \circ P$ e $P \circ T$ não são transformações lineares, pois a translação não é uma transformação linear. Além disso, podemos observar que, de um modo geral, a composição de transformações geométricas não é uma operação comutativa, uma vez que a ordem de aplicação das transformações geométricas modifica o resultado. Como foi descrito em vários exemplos, uma transformação linear é representada por uma matriz. Assim, a composição de duas transformações lineares é representada pelo produto das matrizes que representam essas transformações lineares, e sabemos que produto de matrizes é uma operação não comutativa.

12 *Movimentos de Braços Robóticos*

Inicialmente é importante observar que o objetivo principal desse texto é a apresentação das transformações geométrica no plano e no espaço tridimensional, como uma aplicação e motivação para o estudo dos tópicos apresentados no ensino médio sobre matrizes. Assim, apresentamos de uma forma muito simples os conceitos básicos de robótica, em particular sobre braços mecânico, no qual faremos as aplicações das transformações geométricas que foram estudadas nesse texto.

Podemos definir **robótica** como sendo o controle de mecanismos eletro–eletrônicos através de um programa de computador, transformando–o em um dispositivo possuindo algumas funcionalidades possibilitando interações com várias atividades de uma linha de produção, de um determinado produto, executando diversas tarefas estabelecidas que estão informadas nesse programa de computador. Gostaria de ressaltar que não somente as transformações geométricas são importantes para o entendimento do funcionamento dos braços robóticos, mas também precisamos ter uma habilidade para programação de computadores, para a elaboração de algoritmos, e do conhecimento de pelo menos uma linguagem de programação, para a implementação desses procedimentos fazendo com que o dispositivo realize as tarefas propostas.

Um conceito importante é o de grau de liberdade do braço mecânico. Os graus de liberdade de um braço robótico determinam os movimentos no espaço bidimensional ou tridimensional. Cada junta define um ou dois graus de liberdade, assim, o número de graus de liberdade do braço é igual a soma dos graus de liberdade de suas juntas. Desse modo, o número de graus de liberdade de um braço robótico está associado ao número de variáveis posicionais independentes que permitem definir a posição de todas as partes do braço robótico de forma unívoca.

Na Figura 46 temos o protótipo de um braço robótico com três graus de liberdade, que será utilizado para auxiliar nas apresentações das atividades. Para a orientação espacial consideramos um sistema de coordenadas cartesianas onde o eixo $0Z$ é perpendicular a base que está localizada num plano paralelo ao plano XY . Essa base tem somente um movimento de rotação em torno do eixo $0Z$.



Figura 46: Protótipo de um braço robótico com três graus de liberdade

No link abaixo, vídeo disponível no YouTube, mostramos os movimentos do braço robótico com três graus de liberdade:

<https://www.youtube.com/watch?v=Zq6WFYpKBA8>

Referências

- [1] V. Carrara, *Introdução à Robótica Industrial*, INPE, São José dos Campos (2015).
URL do documento original: <http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3K5JPL8>
- [2] M. J. Bezerra, *Matemática para o Ensino Médio*, Editora Scipione (2004).
- [3] G. Iezzi, O. Dolce, D. Degenszajn e R. Périgo, *Matemática*, Atual Editora (2002).

QR code – Link do Texto no Dropbox

O arquivo no formato pdf com o texto da oficina está disponível no dropbox

<https://www.dropbox.com/s/54x7dp3p8ggar22/RotacoesTDRobotica.pdf?dl=0>

QR code com o link do texto no Dropbox



Citação

Petronio Pulino e Claudina Izepe Rodrigues, Transformações Geométricas: Aplicação nos Movimentos de Braços Robóticos, Ciência & Arte nas Férias, de 04 janeiro a 03 de fevereiro de 2017, Universidade Estadual de Campinas, Campinas – SP.

Transformações Geométricas

Aplicação nos Movimentos de Braços Robóticos

Resolução das Atividades no GeoGebra

Jean Carlos Aparecidos Medeiros
Luana Pinheiro Rodrigues de Aguiar
(Monitores – CAF 2017)

30 de janeiro de 2017

Introdução

Apresentaremos aqui algumas maneiras de resolver os exemplos apresentados na no texto *Transformações Geométricas: Aplicação nos Movimentos de Braços Robóticos* utilizando o aplicativo GeoGebra. A ideia é introduzir algumas das principais ferramentas do GeoGebra para que o leitor possa aos poucos estar familiarizado com os recursos do aplicativo.

É importante ressaltar que estamos apresentando algumas sugestões de como resolver os exemplos, porém o leitor pode, e deve, utilizar outras formas para efetuar a resolução. No link abaixo:

<https://www.geogebra.org/m/MtgWYN6q>

temos uma pasta do GeoGebra com as folhas dinâmicas com as resoluções passo a passo de alguns dos exemplos e atividades propostas para a oficina.

Exemplos

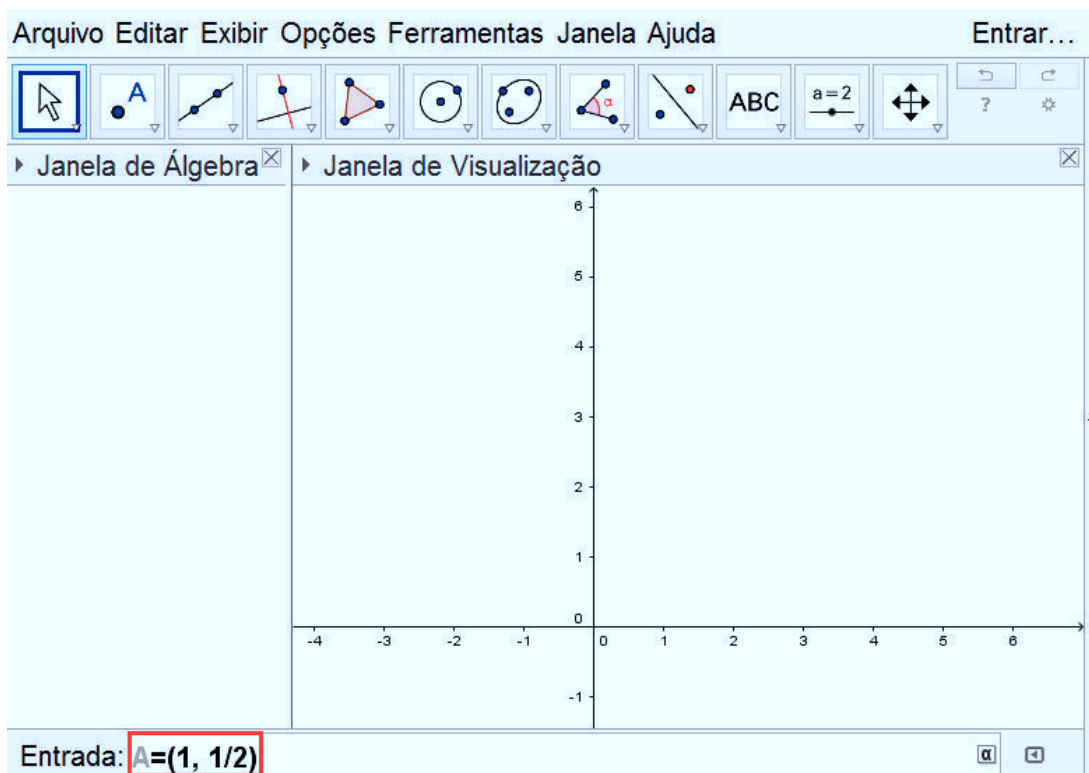
Exemplo 1. Verifique abaixo o **Exemplo 2**.

Exemplo 2.

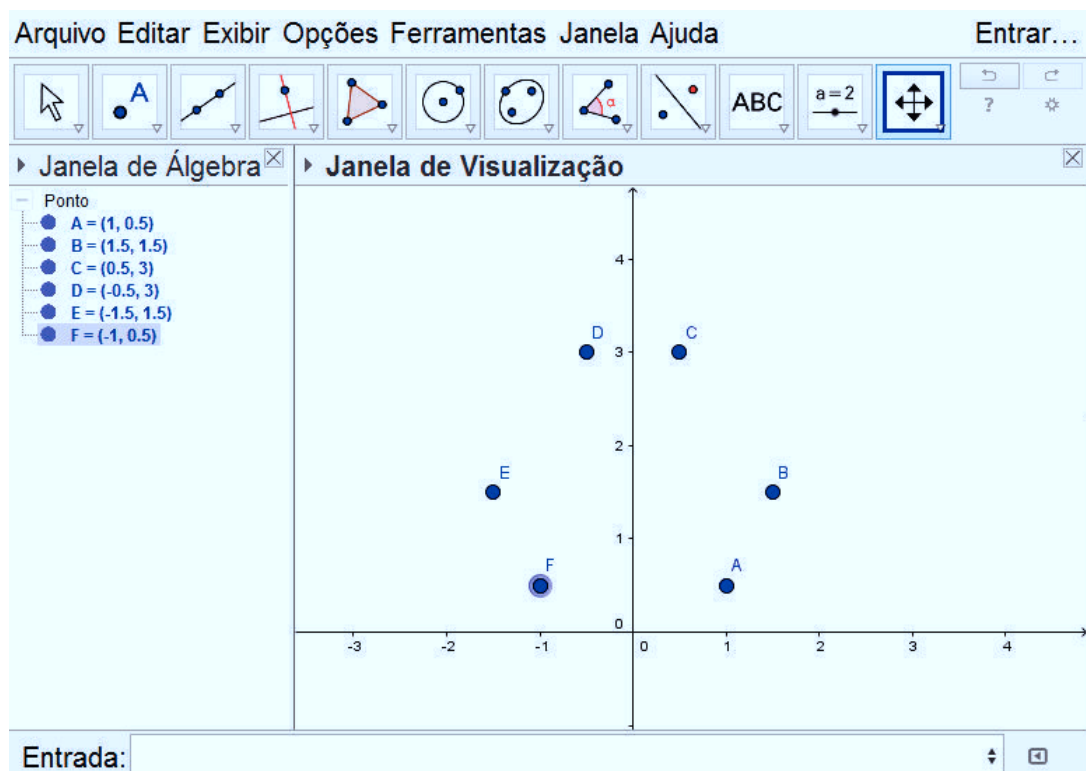
- (a) Tendo as coordenadas de cada um dos pontos, pode-se utilizar o campo “*Entrada*”, localizado na parte inferior da “*Janela de Álgebra*”, para inserir cada um dos pontos utilizando as ferramentas do GeoGebra:

$$P = (x, y)$$

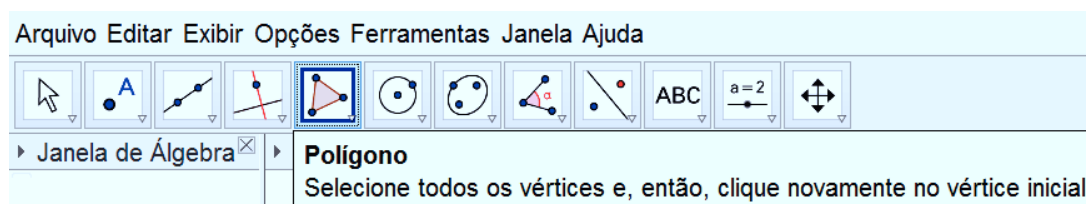
Onde P , é o nome do ponto; x é o valor da coordenada do ponto P no eixo OX e y é o valor da coordenada do ponto P no eixo OY



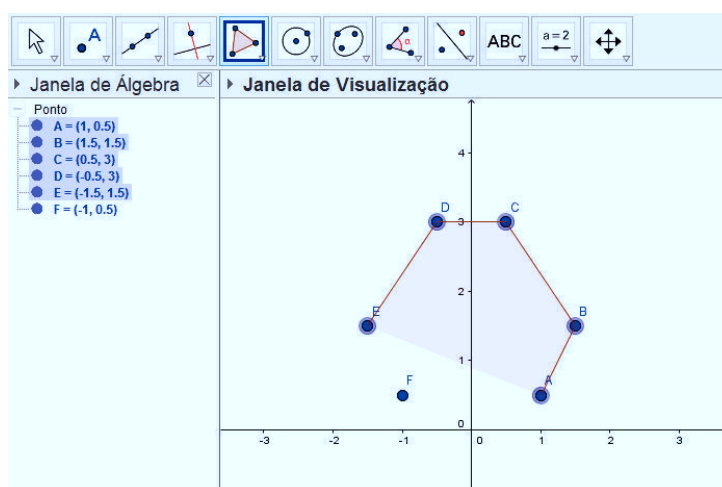
Dessa forma iremos inserir cada um dos 6 pontos:



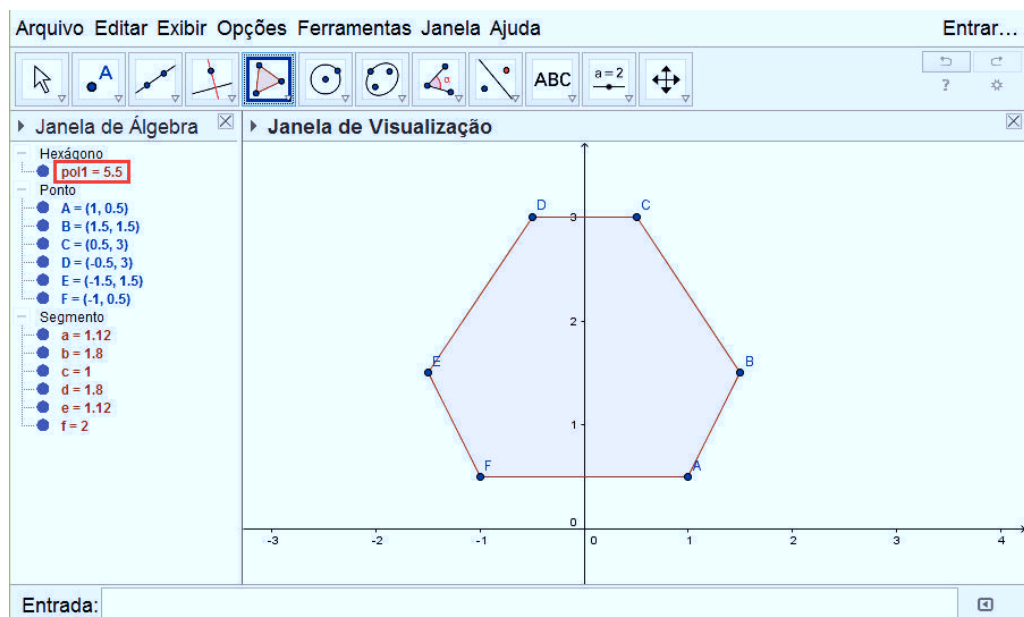
- (b) Neste item estamos interessados em formar um polígono com os 6 pontos, para isso vamos utilizar a ferramenta “Polígono”, localizada na 5ª caixa de ferramentas:



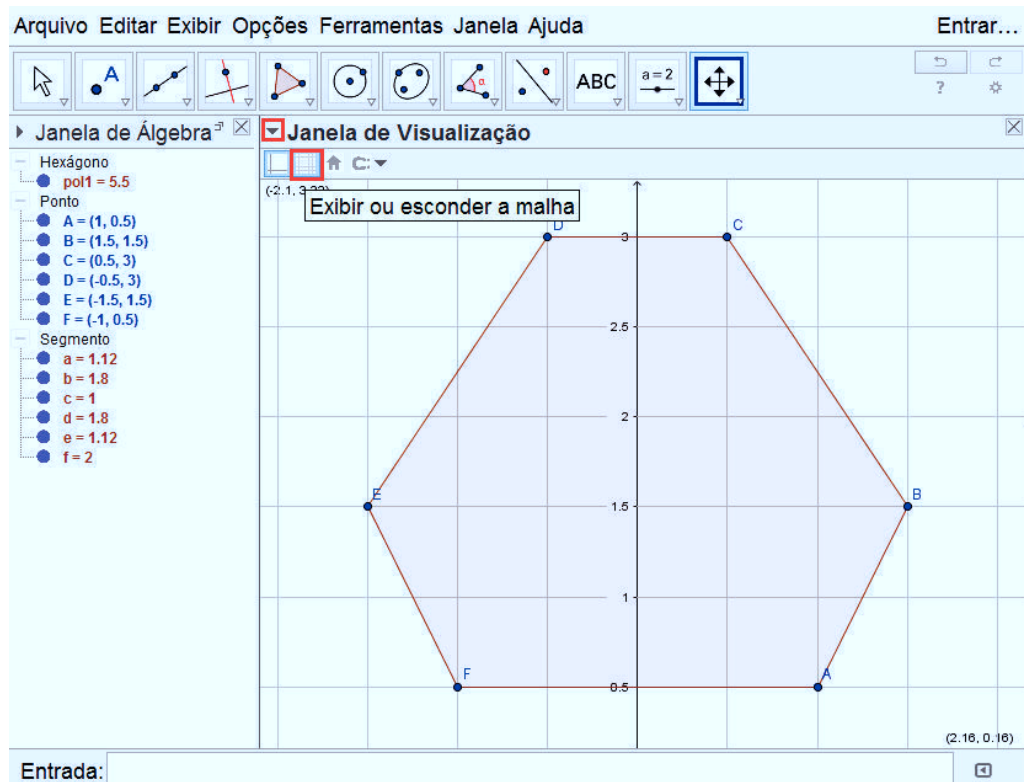
Com a ferramenta Polígono selecionada, vamos clicar no ponto A, em seguida no ponto B, depois C e assim em cada um dos pontos até o ponto A novamente.



- (c) O GeoGebra já nos dá a área de polígonos e também o comprimento de segmentos. Na janela álgebra, podemos notar que foi criado um hexágono: $pol1 = 5.5$, $pol1$ é nome do polígono, e o valor após o igual é a área desse polígono.



Se quisermos uma malha quadriculada, para uma melhor visualização, vamos selecionar a 12ª caixa de ferramentas “Mover Janela de Visualização”, habilitar as opções na janela de visualização e clicar em “Exibir ou esconder malha”:

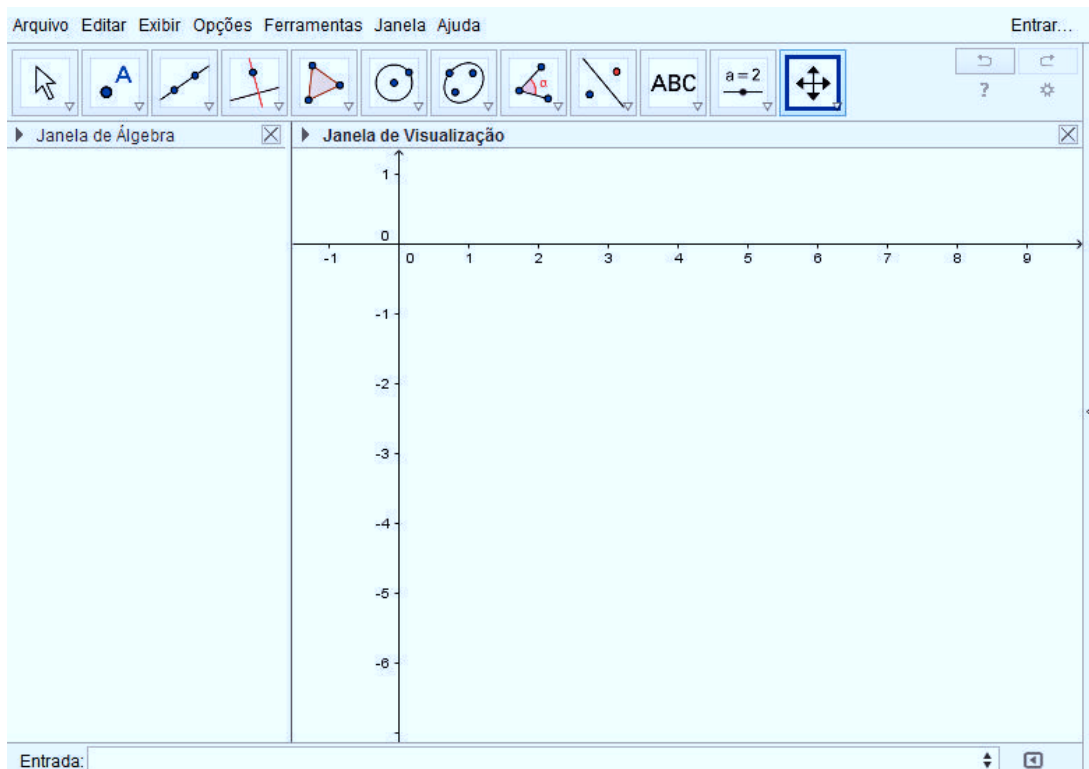


Acesse o exemplo resolvido na página:

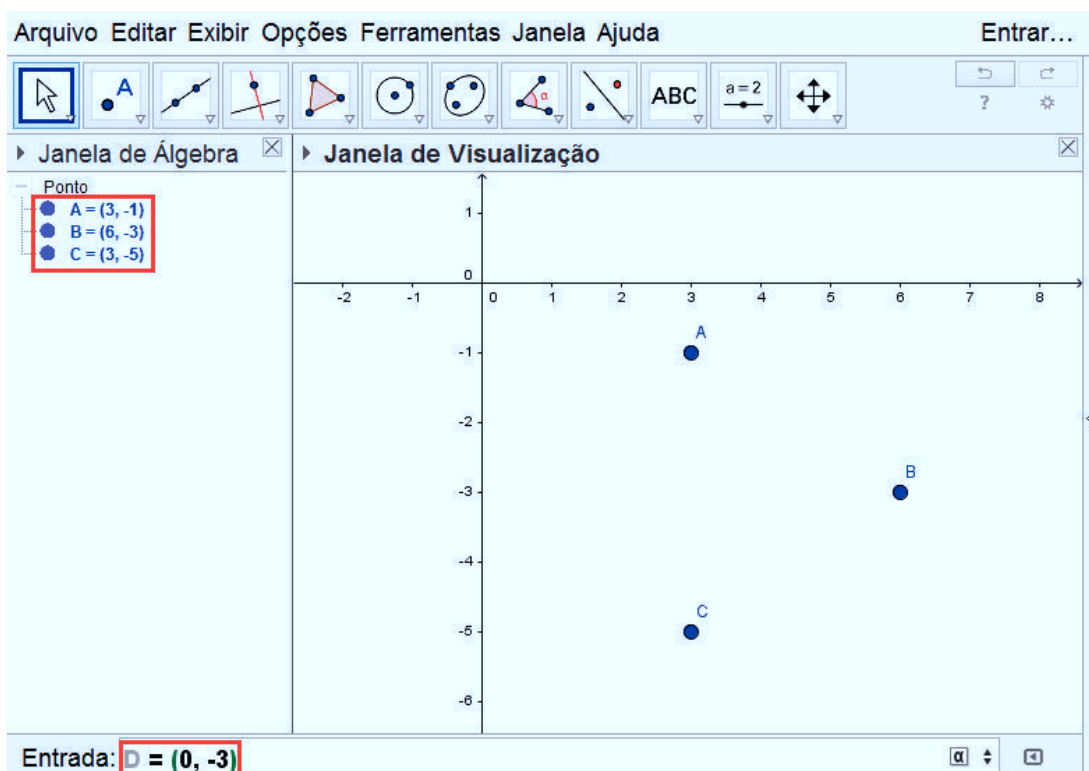
<https://www.geogebra.org/m/MtgWYN6q/t5eWtGB9#material/t5eWtGB9>

Exemplo 3.

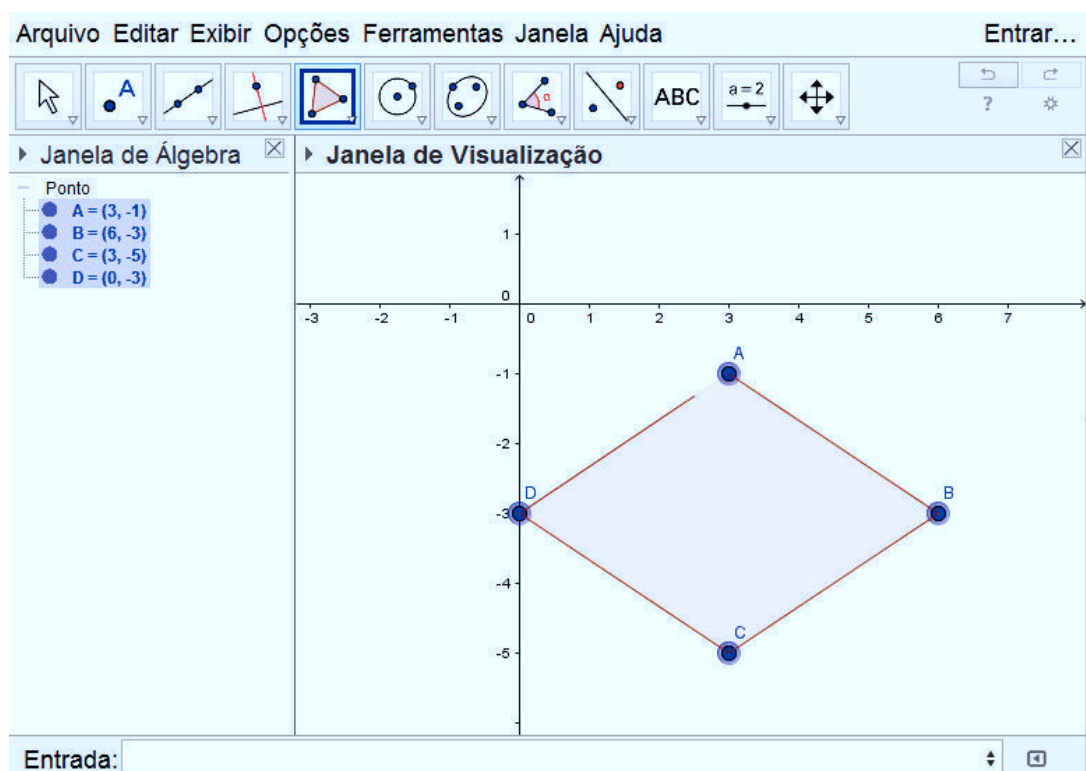
- (a) Podemos notar que esses pontos estarão localizados no 4º quadrante, então precisamos melhorar a posição do plano cartesiano para visualizarmos melhor os pontos que inserimos. Para isso vamos utilizar a ferramenta “*Mover Janela de Visualização*”, na 12ª caixa de ferramentas, pressionando o botão do mouse, podemos posicionar da forma mais conveniente para a visualização da figura.



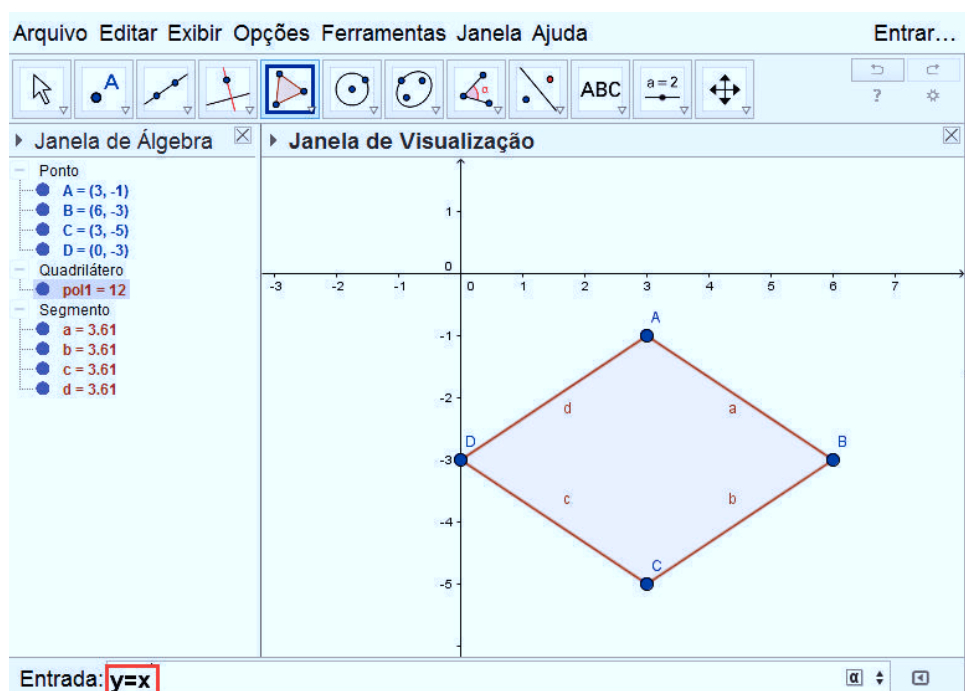
Novamente, utilizando o campo “*Entrada*”, vamos inserir cada um dos pontos:



Com a ferramenta “Polígono” selecionada, vamos clicar no ponto A , em seguida no ponto B , depois C e depois D e para fechar o polígono novamente o ponto A .

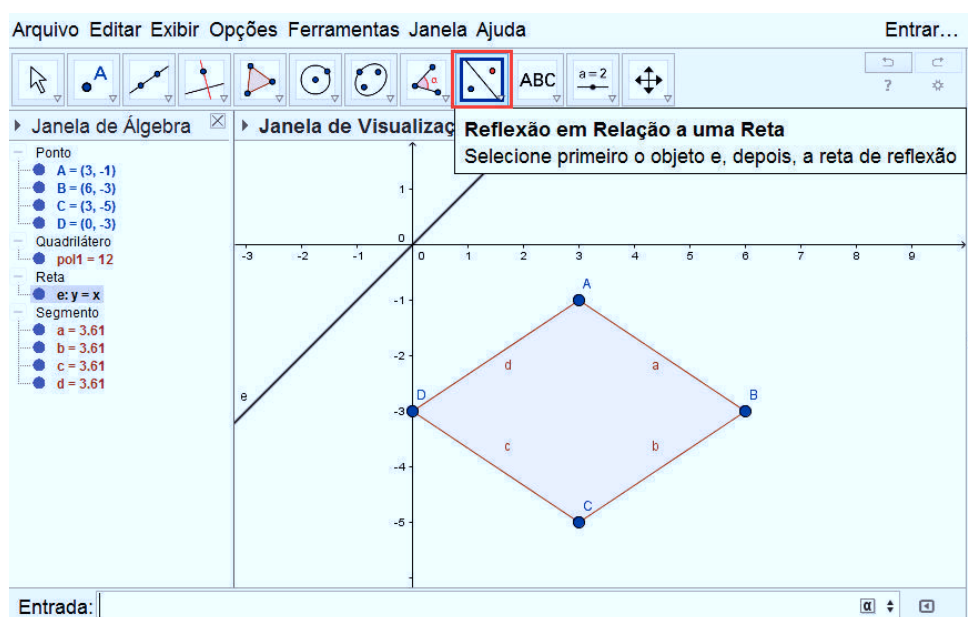


(b-c) Agora, precisaremos construir a reta $y = x$, uma vez que iremos fazer a reflexão dos pontos em torno dessa reta. Para isso, inserimos $y = x$ no campo “Entrada”:

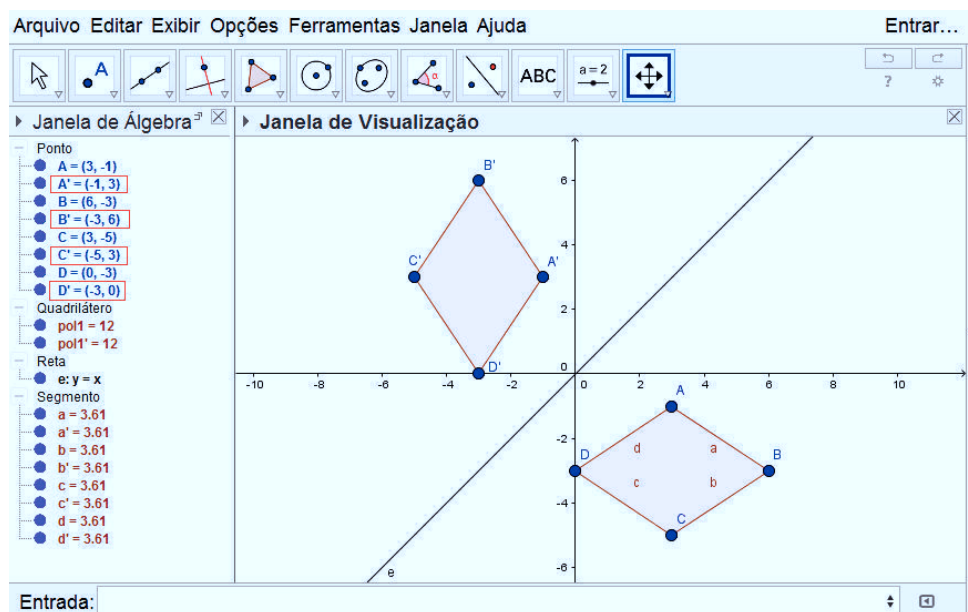


Agora, iremos utilizar um recurso do GeoGebra pra efetuar a reflexão dos pontos em torno da reta $y = x$, porém não vamos precisar refletir ponto por ponto, como já construímos o polígono formado por esses 4 pontos, vamos fazer a reflexão de todo o polígono, pois dessa forma iremos refletir todos os pontos de uma só vez.

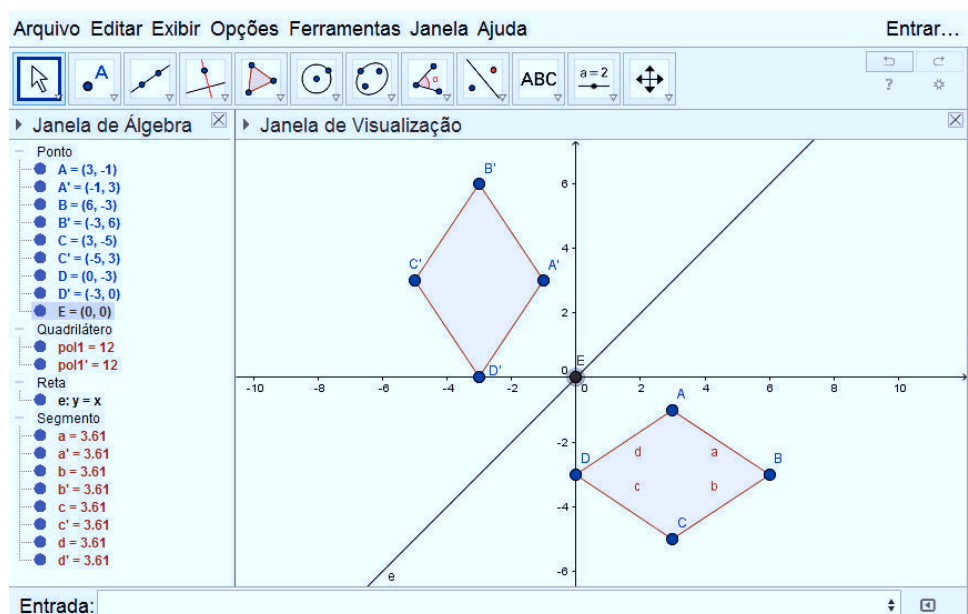
Vamos utilizar a ferramenta “*Reflexão em Relação a uma Reta*”, localizada na 9ª caixa de ferramentas:



Com a ferramenta selecionada, vamos clicar no interior do $pol1$ e em seguida na reta $y = x$. Note que uma nova figura, $pol1'$, surgiu na janela de visualização, essa figura é justamente a reflexão de $pol1$ em torno da reta $y = x$. E na janela álgebra temos as coordenadas dos A' , B' , C' e D' , que são as reflexões de A , B , C e D , respectivamente.

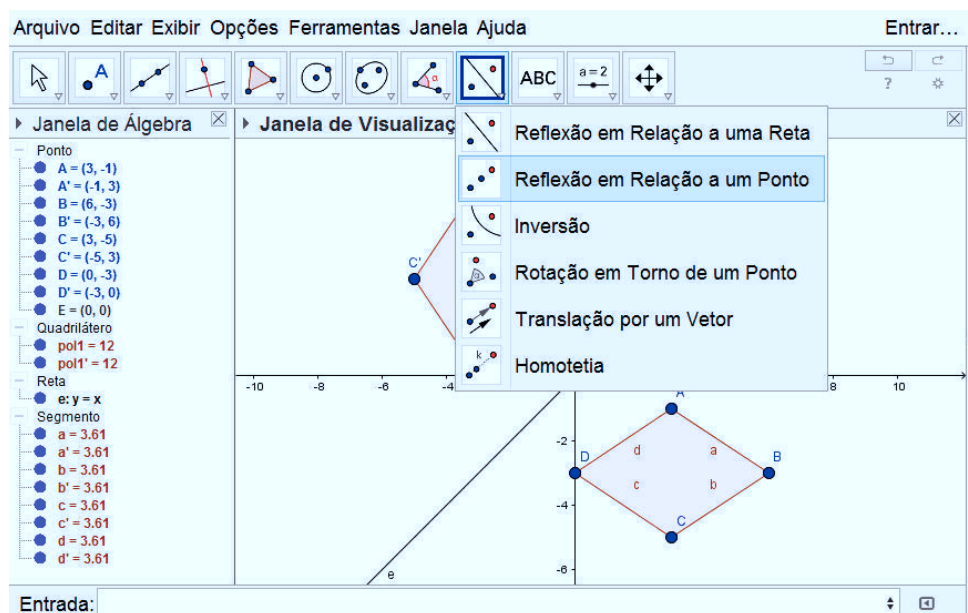


(d-e) Vamos utilizar a ferramenta “*Ponto*”, na 2ª caixa de ferramentas, para identificar a origem no plano cartesiano. Com a ferramenta “*Ponto*” selecionada clicamos na intersecção dos eixos OX e OY , para marcar o ponto $(0,0)$ que será denotado por E :

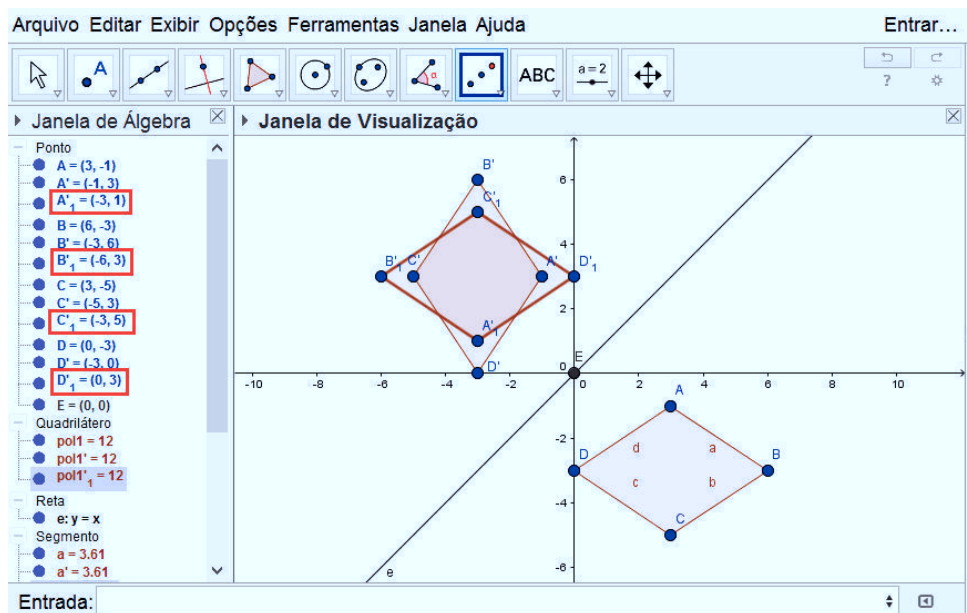


Assim como da outra vez, vamos fazer a reflexão do $pol1$ e automaticamente refletiremos todos os seus pontos.

Iremos utilizar a ferramenta “*Reflexão em Relação a um Ponto*”, na 9ª caixa de ferramentas, para efetuar a reflexão em torno da origem:



Com a ferramenta selecionada, vamos clicar no interior do $pol1$ e em seguida no ponto E . O novo polígono na janela de visualização, $pol1'_1$, é a reflexão de $pol1$ em torno da origem. Na Janela de Álgebra temos as coordenadas dos pontos A'_1 , B'_1 , C'_1 e D'_1 , que são as reflexões de A , B , C e D , respectivamente.



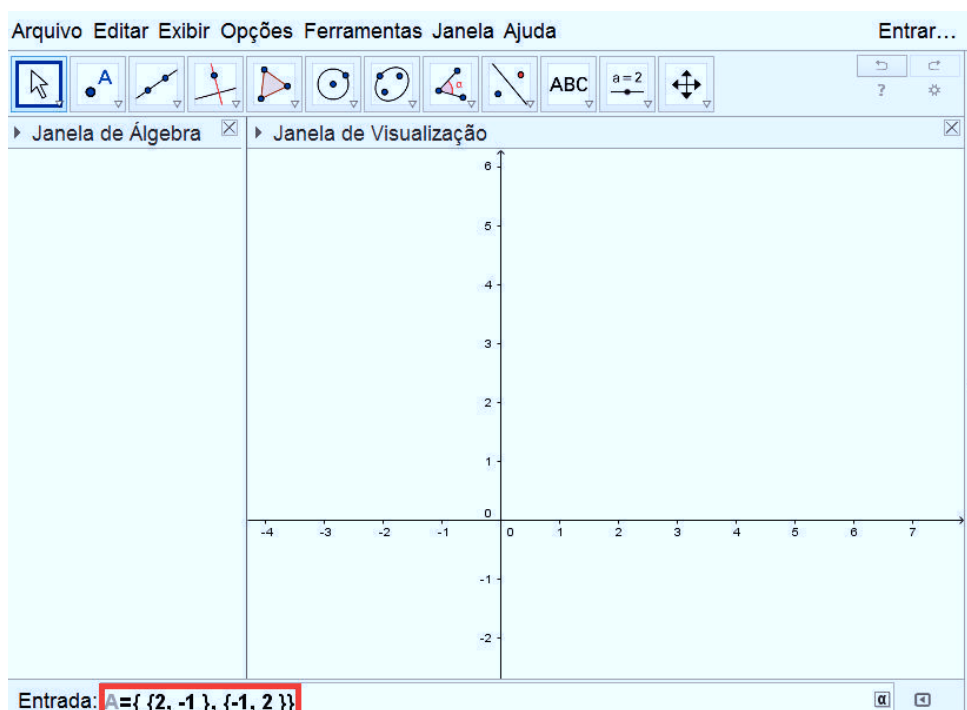
Acesse o exemplo resolvido na página:

<https://www.geogebra.org/m/MtgWYN6q/t5eWtGB9#material/NntVMCay>

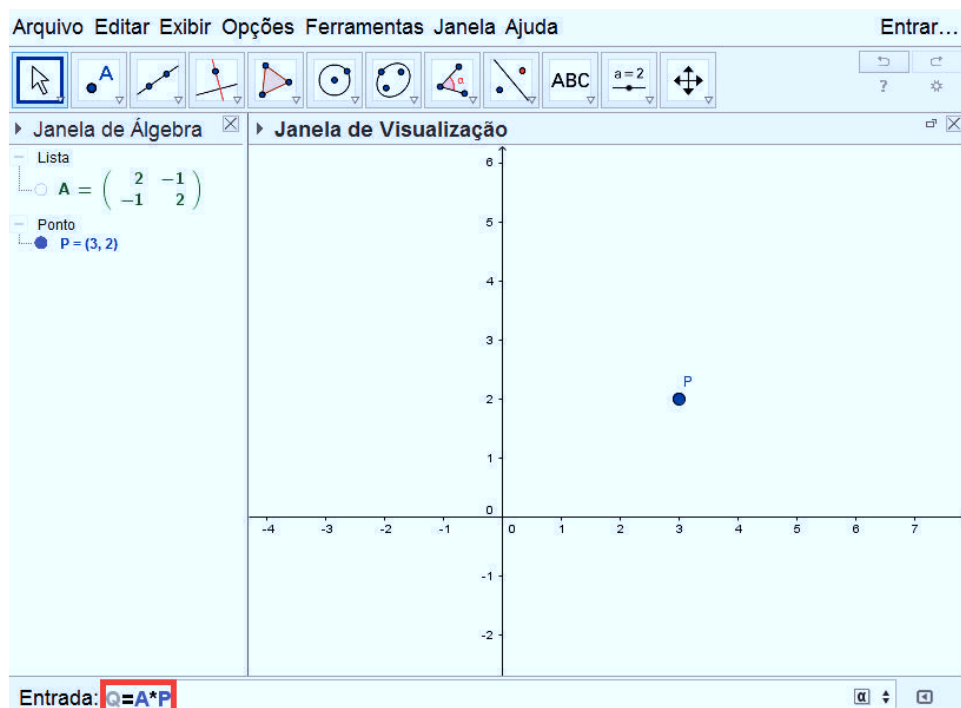
Exemplo 4. Neste exemplo, vamos precisar declarar uma matriz. No GeoGebra, uma matriz é denotada por chaves “{ }” e cada linha da matriz também deve estar entre chaves e devemos separar uma linha da outra com vírgula.

Vamos declarar a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

No campo entrada inserimos a seguinte declaração: $A = \{\{2, -1\}, \{-1, 2\}\}$



A matriz irá surgir na Janela de Álgebra. Declaramos o ponto $P = (3, 2)$ e agora vamos obter o ponto Q , que é a imagem do ponto P pela transformação T , dada pela matriz A :



OBSERVAÇÃO: É importante destacar que apesar do GeoGebra denotar o ponto P como sendo $P = (3, 2)$, implicitamente ele é escrito como uma matriz coluna $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, pois do contrário não seria possível fazer a multiplicação de A por P . No GeoGebra, os pontos são denotados como matrizes linha e vetores são denotados como matrizes coluna, apenas para diferenciar um objeto do outro.

- (a) Vamos determinar o ponto $P = (a, b)$, cuja a imagem pela transformação T , definida pela matriz A , é o ponto $Q = (-2, 3)$. Ou seja:

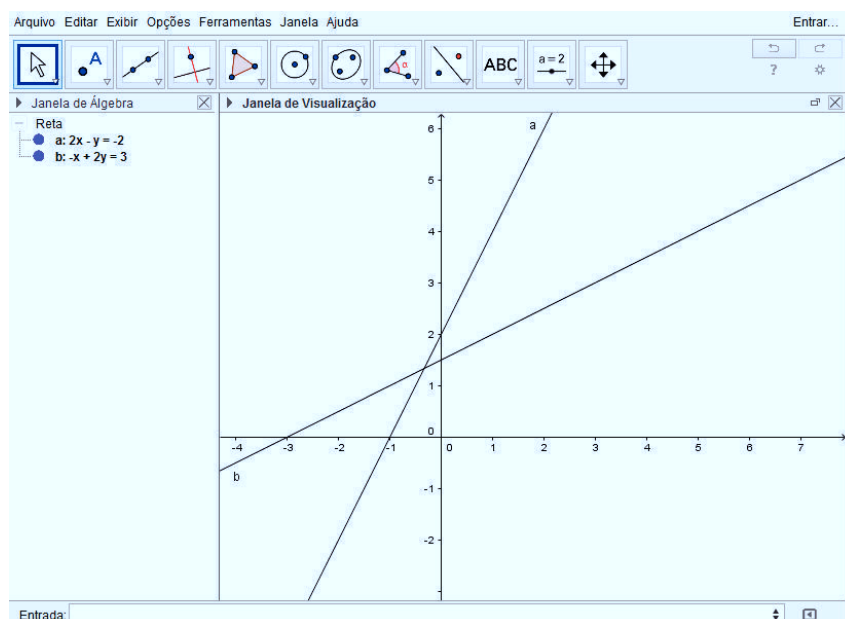
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Isso equivale a resolver o sistema linear:

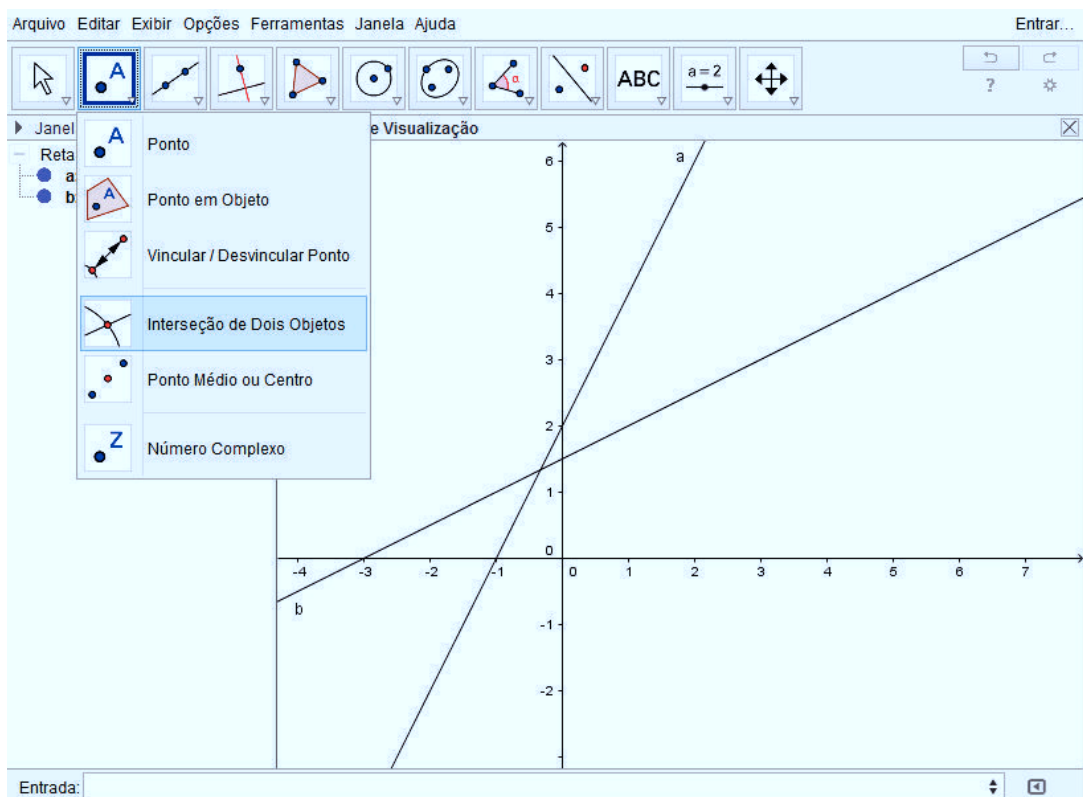
$$\begin{cases} 2a - 1b = -2 \\ -1a + 2b = 3 \end{cases}$$

Podemos utilizar o GeoGebra para resolver esse sistema graficamente. Note que as 2 equações são equações de 2 retas, se existir uma solução para este sistema, essa solução irá satisfazer tanto a primeira quanto a segunda equação, ou seja, a solução será um ponto pertencente as 2 retas.

Como o GeoGebra já utiliza as variáveis x e y para os eixos cartesianos, vamos apenas trocar as variáveis a e b , por x e y . Vamos inserir as duas equações no campo entrada.



Agora iremos marcar o ponto de intersecção entre as duas retas, para isso vamos utilizar a ferramenta “*Intersecção de Dois Objetos*”, localizada na 2ª caixa de ferramenta:



Com a ferramenta selecionada vamos clicar sobre a primeira e depois sobre a segunda reta e a ferramenta irá criar o ponto de intersecção entre as 2 retas.

Para testarmos se a solução está correta, basta multiplicarmos esse ponto pela matriz A e verificarmos se o ponto Q resultante é $Q = (-2, 3)$.

Acesse o exemplo resolvido na página:

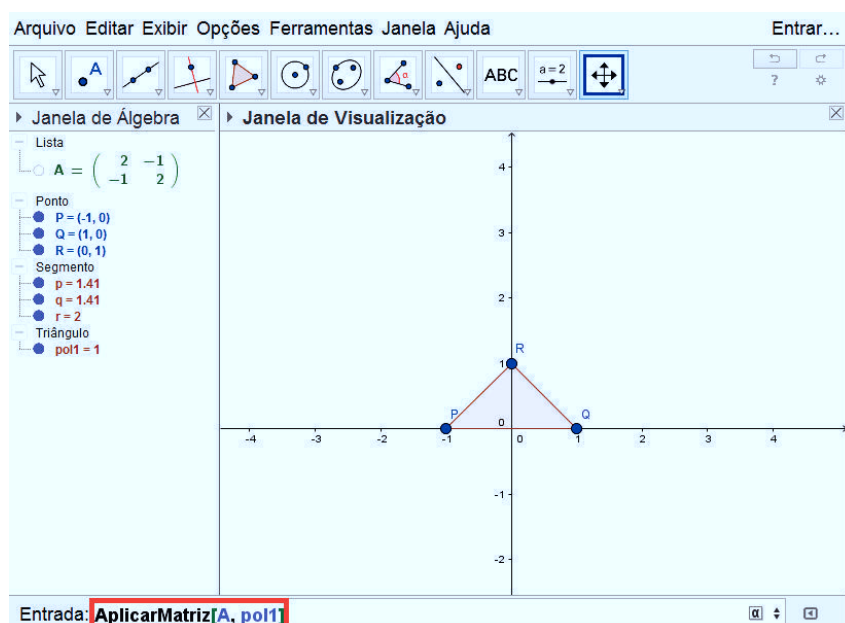
<https://www.geogebra.org/m/MtgWYN6q/t5eWtGB9#material/f6NwR3qy>

(b-c) Primeiro, vamos declarar os pontos P , Q e R no campo entrada e depois utilizando a ferramenta polígono vamos construir o triângulo $\triangle PQR$. Em vez de aplicarmos a matriz A em cada um dos 3 pontos, vamos utilizar um comando no GeoGebra que nos permitirá obter a imagem dos 3 pontos de uma só vez.

No campo entrada vamos utilizar o comando:

“AplicarMatriz[< Matriz >, < Objeto >]”

e substituímos “<Matriz>” pelo nome da nossa matriz, ou seja, A e “<Objeto>” pelo $pol1$ que é o nosso $\triangle PQR$



O triângulo $\triangle P'Q'R'$ é a imagem do triângulo $\triangle PQR$ pela transformação A . E os pontos P' , Q' e R' é a imagem dos pontos P , Q e R pela transformação A , respectivamente.

Acesse o exemplo resolvido na página:

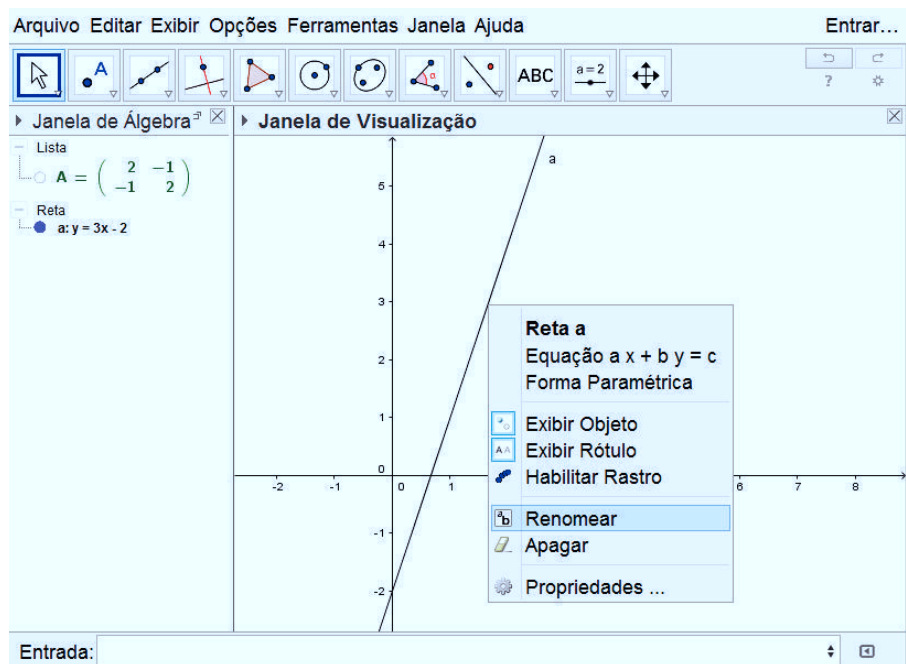
<https://www.geogebra.org/m/MtgWYN6q/t5eWtGB9#material/RadUZDXy>

- (d) Podemos encontrar a imagem da reta r de 2 formas, neste item vamos ver uma delas e no item (e) abordaremos a outra forma.

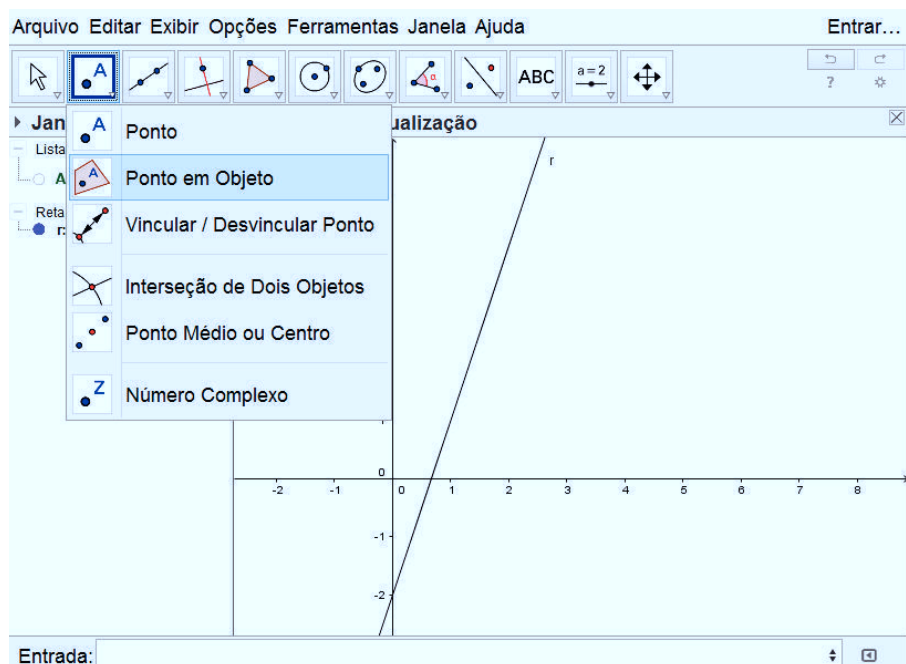
No campo entrada vamos declarar a reta r da seguinte forma:

$$y = 3x - 2,$$

para renomear a reta, vamos clicar com o botão direito do mouse sobre a reta e na janela de opções clicamos em renomear:



Sabemos que uma reta pode ser determinada por 2 pontos, então vamos encontrar 2 pontos distintos da r e vamos descobrir a imagem deles pela matriz da transformação A . Vamos utilizar a ferramenta “*Ponto em Objeto*”, localizada na 2ª caixa de ferramenta para criar 2 pontos distintos B e C :



Agora vamos criar o ponto $B' = A \times B$ e o ponto $C' = A \times C$ e agora vamos utilizar a ferramenta “Reta”, localizada na 3ª caixa de ferramenta para criar a reta que passa pelos pontos B' e C' . Essa reta é a imagem da reta r pela matriz da transformação A .

Acesse o exemplo resolvido na página:

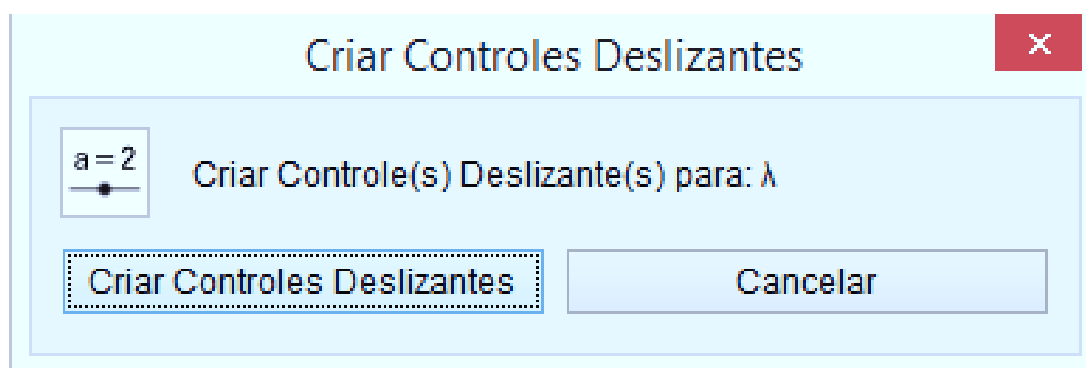
<https://www.geogebra.org/m/MtgWYN6q/t5eWtGB9#material/HSFsFj9x>

- (e) Utilizando o comando que aprendemos no item (c). Para isso precisaremos declarar a reta r no campo entrada e depois utilizando o comando “AplicarMatriz[A, r]”, vamos obter r' que é a imagem da reta r pela transformação A .

Exemplo 5. Iremos inicialmente visualizar a matriz da transformação. Para isso, na opção Entrada escreveremos a seguinte matriz:

$$A = \{\{\lambda, 0\}, \{0, \lambda\}\}$$

em seguida dê Enter. Logo após abrirá uma janela perguntando se deve criar controles deslizantes para λ , como mostra a figura:



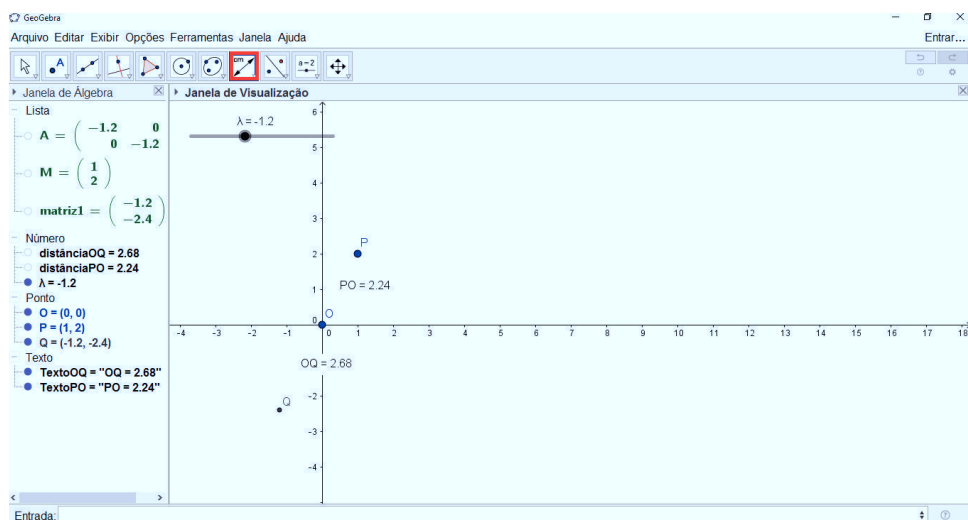
Em seguida, usando novamente a opção Entrada, digite a seguinte matriz:

$$M = \{\{1\}, \{2\}\}$$

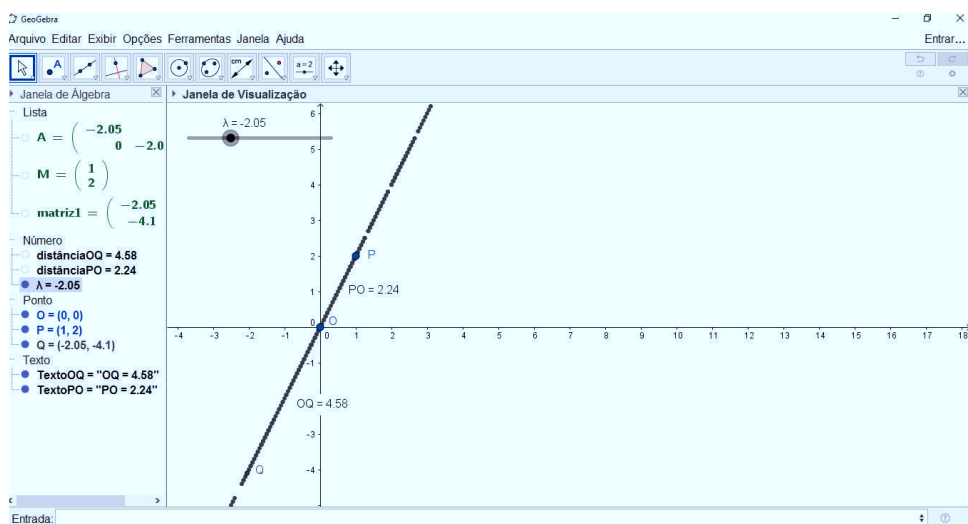
Efetuiremos a multiplicação das matrizes A e M . Para isso, escreva na opção Entrada: $A * M$. Insira os seguintes pontos usando a opção Entrada:

$$O = (0, 0), \quad P = (1, 2) \quad \text{e} \quad Q = (\lambda, 2 * \lambda)$$

Clique na caixa Distância, comprimento e perímetro, como mostra na figura a baixo e selecione a opção Distância, comprimento e perímetro. Logo em seguida clique sobre os pontos O e P e depois sobre os pontos Q e O . Observe que a ferramenta utilizada calcula a distância entre esses pontos.



Clique com o botão direito sobre o Controle Deslizante na Janela de visualização e na janela que se abre, clique em propriedades. Iremos definir o intervalo em que se encontra o processo de expansão e contração. Para que isso ocorra, coloque o intervalo de -5 à 5 e feche a janela. Na Janela de Álgebra, clique com o botão direito sobre o ponto Q e selecione a opção Habilitar Rastro. Mantendo o botão esquerdo do mouse pressionado movimento o cursor do Controle Deslizante e observe o resultado final, conforme mostra a figura abaixo.



Acesse o exemplo resolvido na página:

<https://www.geogebra.org/m/MtgWYN6q/t5eWtGB9#material/t42jVRmj>

Exemplo 6. Vamos declarar a matriz de reflexão em torno do eixo OX no campo entrada $A = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Bmatrix}$. Agora utilizando a ferramenta “Ponto”, na 2ª caixa de ferramentas, vamos criar um ponto P genérico no plano. Por fim, vamos criar o ponto Q , imagem do ponto P pela matriz da transformação A , para isso declaramos no campo entrada $Q = A * P$.

Agora com a ferramenta “Mover”, na 1ª caixa de ferramentas, mova o ponto P pela janela de visualização e observe o que acontece com o ponto Q .

Acesse o exemplo resolvido na página:

<https://www.geogebra.org/m/MtgWYN6q/t5eWtGB9#material/b2xtwnaE>

Exemplo 7. No campo Entrada insira a matriz $A = \{\{-1, 0\}, \{0, 1\}\}$ e dê Enter. No campo Entrada insira o ponto $P = (1, 2)$ e dê Enter. No campo Entrada insira a multiplicação do ponto P com a matriz A sendo o ponto $Q: Q = A * P$ e dê Enter. Selecione a opção mover - na figura a baixo - e mova o ponto P pelo plano e observe o resultado final.

<https://www.geogebra.org/m/MtgWYN6q/t5eWtGB9#material/m5YwtN5v>

Exemplo 8. Vamos declarar a matriz de reflexão em torno da origem no campo entrada $A = \{\{-1, 0\}, \{0, -1\}\}$. Agora utilizando a ferramenta “Ponto”, na 2ª caixa de ferramentas, vamos criar um ponto P genérico no plano. Por fim, vamos criar o ponto Q , imagem do ponto P pela matriz da transformação A , para isso declaramos no campo entrada $Q = A * P$.

Agora com a ferramenta “Mover”, na 1ª caixa de ferramentas, mova o ponto P pela janela de visualização e observe o que acontece com o ponto Q .

Acesse o exemplo resolvido na página:

<https://www.geogebra.org/m/MtgWYN6q/t5eWtGB9#material/V9KUJRUk>

Exemplo 9. No campo Entrada insira o ponto $P = (1, 2)$ e dê Enter. No campo Entrada insira o ponto $A = (4, 4)$ e dê Enter. No campo Entrada insira a matriz $M = \{\{1, 0\}, \{0, 1\}\}$ e dê Enter. No campo Entrada faça a multiplicação da matriz M pelo ponto P somando com o ponto A :

$$M * P + A$$

Repare no surgimento do ponto B . Mova o cursor sobre os pontos A e P e observe o resultado da translação.

Acesse o exemplo resolvido na página:

<https://www.geogebra.org/m/MtgWYN6q/t5eWtGB9#material/UsCvdP44>

Exemplo 10. Primeiramente vamos declarar a reta $x = y$ e depois vamos declarar a matriz de reflexão em torno da reta $x = y$ no campo entrada $A = \{\{0, 1\}, \{1, 0\}\}$. Agora utilizando a ferramenta “Ponto”, na 2ª caixa de ferramentas, vamos criar um ponto P genérico no plano. Por fim, vamos criar o ponto Q , imagem do ponto P pela matriz da transformação A , para isso declaramos no campo entrada $Q = A * P$.

Agora com a ferramenta “Mover”, na 1ª caixa de ferramentas, mova o ponto P pela janela de visualização e observe o que acontece com o ponto Q .

Acesse o exemplo resolvido na página:

<https://www.geogebra.org/m/MtgWYN6q/t5eWtGB9#material/nduA49WE>

Exemplo 11. No campo Entrada insira a matriz $M = \{\{\lambda_1, 0\}, \{0, \lambda_2\}\}$ e dê Enter. Abrirá uma janela solicitando para que crie controles deslizantes, clique em criar controles deslizantes e limite λ_1 entre -5 e 5 e λ_2 entre -5 e 5. No campo Entrada insira o ponto $P = (1, 1)$ e dê Enter. No campo entrada faça a multiplicação entre a matriz M e o ponto P e denomine o resultado como $Q = M * P$ e dê Enter.

Exemplo 12.

- (a) Vamos declarar cada um dos pontos A , B , C e D no campo entrada e depois com a ferramenta “*Polígono*”, localizada na 5ª caixa de ferramenta, vamos construir o quadrilátero $ABCD$. Também no campo entrada vamos declarar a reta $x = y$.
- (b) Agora utilizando o campo entrada, vamos declarar a transformação:

$$T_1 = \left\{ \left\{ \frac{3}{2}, 0 \right\}, \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\} \right\}$$

E então vamos utilizar o comando “AplicarMatriz[<Matriz>, <Objeto>]”, substituindo <Matriz>, por T_1 e <Objeto> por $pol1$. Vamos obter o $pol1'$, que é a imagem do $pol1$ pela transformação T_1 .

- (c) A representação no plano numérico da imagem do quadrilátero $ABCD$ é justamente o quadrilátero $A'B'C'D'$. Caso não estivéssemos obtendo a resolução através do GeoGebra, poderíamos obter essa representação fazendo a multiplicação da matriz da transformação T_1 por cada um dos vértices do quadrilátero.
- (d) Novamente utilizando o campo entrada, vamos declarar a matriz de transformação:

$$T_2 = \{\{0, 1\}, \{1, 0\}\}$$

e depois vamos utilizar o comando “AplicarMatriz[<Matriz>, <Objeto>]”, substituindo <Matriz>, por T_2 e <Objeto> por $pol1$.

Vamos obter o $pol1'_1$, que é a imagem do $pol1$ pela matriz da transformação T_2 . Agora vamos Aplicar a Matriz T_1 sobre o $pol1'_1$ e obter $pol2$.

- (e) Vamos agora fazer o mesmo procedimento que realizamos no item anterior invertendo apenas a ordem. Note que já fizemos no item (b), a imagem do quadrilátero pela matriz da transformação T_1 e obtivemos o quadrilátero $pol1'$, basta então aplicar a matriz T_2 sobre $pol1'$ e obter o quadrilátero $pol1''$.
- (f) Podemos observar que $T_1(T_2(x, y)) \neq T_2(T_1(x, y))$, pois ambas possuem imagens diferentes.

Acesse o exemplo resolvido na página:

<https://www.geogebra.org/m/MtgWYN6q/t5eWtGB9#material/V2CVZCEw>

Exemplo 13.

- (a) Para inserir a matriz da transformação T_1 coloque no campo Entrada:

$$T_1 = \left\{ \left\{ \frac{3}{2}, 0 \right\}, \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\} \right\}$$

Dê Enter.

- (b) Para inserir a matriz da transformação T_2 coloque no campo Entrada:

$$T_2 = \{\{1, 0\}, \{0, 1\}\}$$

Dê Enter.

(c) Para inserir a matriz da transformação T_3 coloque no campo Entrada:

$$T_3 = T_2 * T_1$$

Dê Enter.

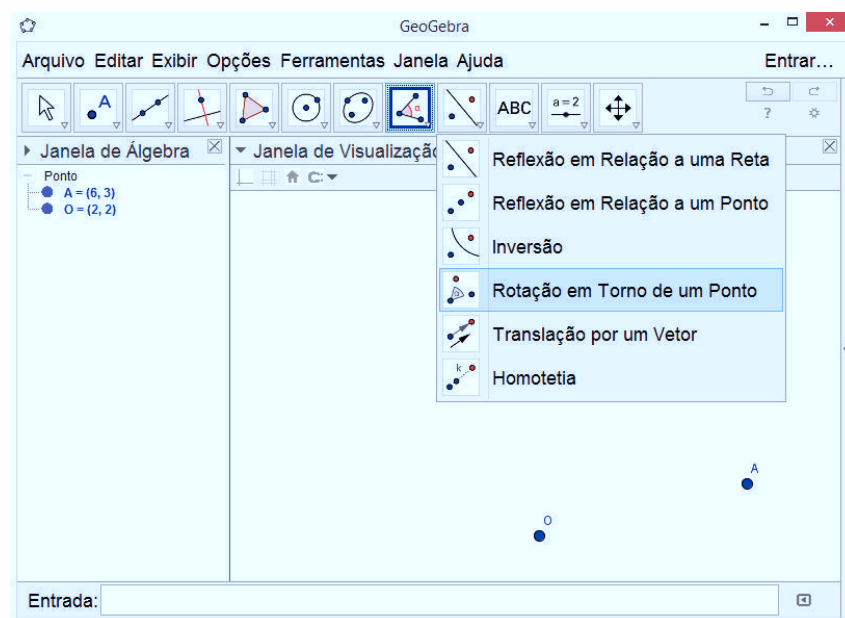
(d) Para inserir a matriz da transformação T_4 coloque no campo Entrada:

$$T_4 = T_1 * T_2$$

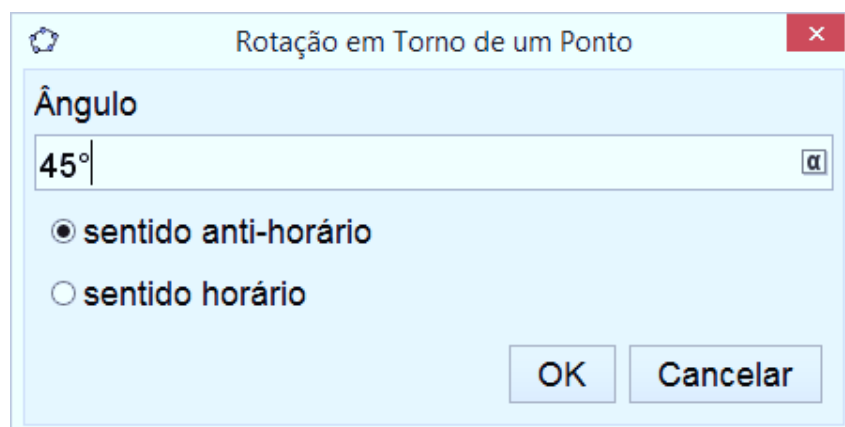
Dê Enter.

(e) Observe o resultado obtido.

Exemplo 14. Iremos introduzir uma nova ferramenta do GeoGebra para resolvermos esse exemplo. Primeiramente, com a ferramenta “*Ponto*” selecionada, vamos criar um ponto A e um ponto O quaisquer no plano cartesiano. Agora iremos utilizar a ferramenta “*Rotação em Torno de um Ponto*”, localizada na 9ª caixa de ferramentas:



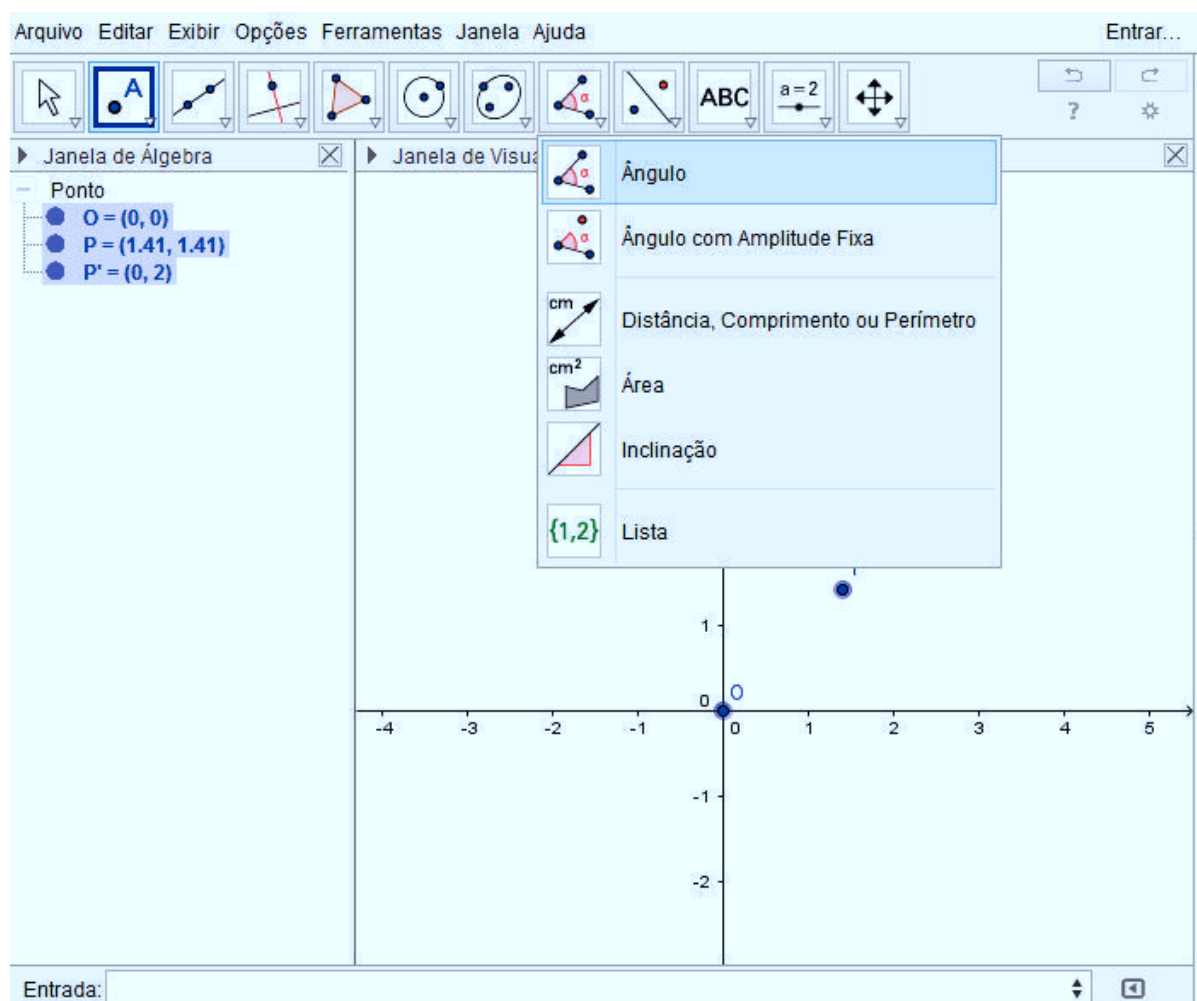
Com a ferramenta selecionada vamos clicar primeiramente no ponto A , que é o ponto que queremos rotacionar e por último no ponto O que é o centro da rotação. Na janela que irá se abrir, vamos definir o sentido da rotação, que nesse caso será o anti-horário e o ângulo de rotação:



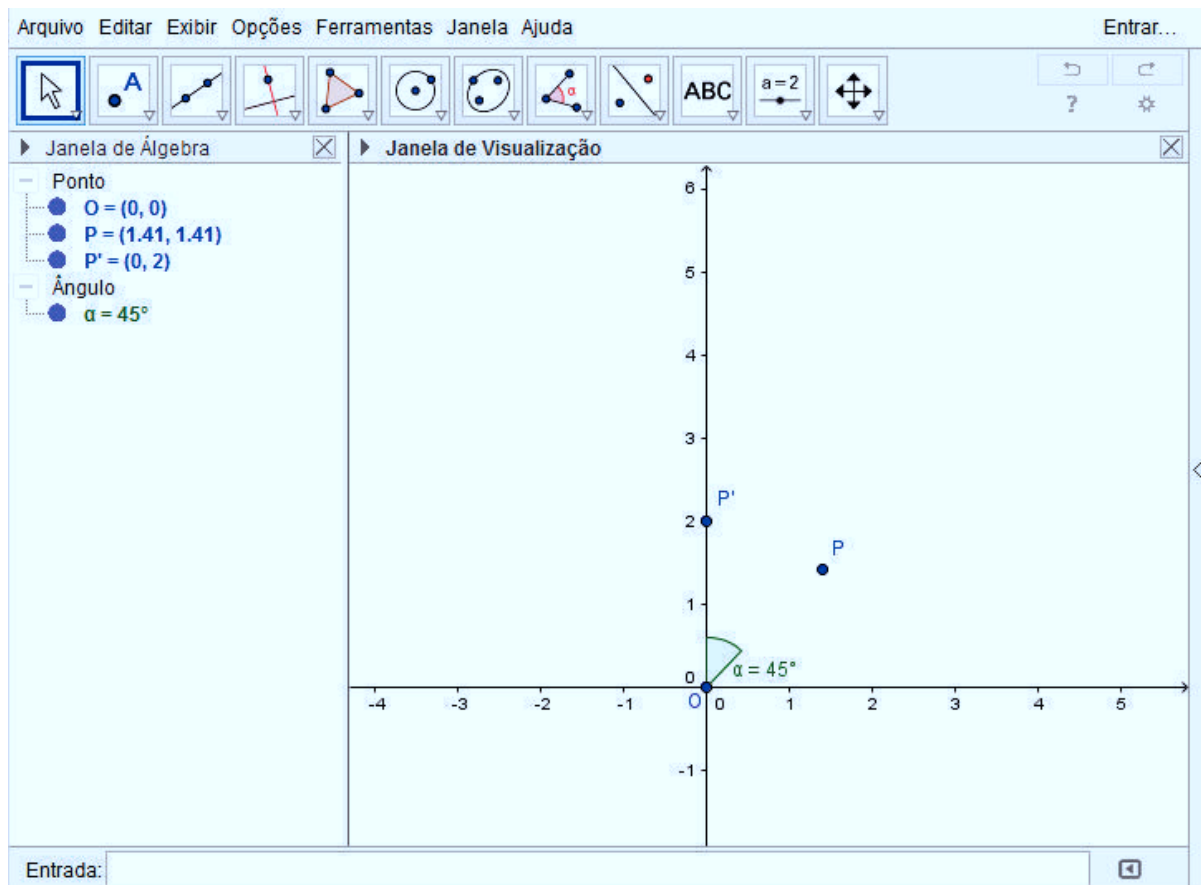
Feito isso iremos obter o ponto A' , que é a imagem do ponto A obtida através de uma rotação de 45° .

Exemplo 15. Assim como no exemplo anterior, podemos também fazer a rotação de uma figura em torno de um ponto. Com a ferramenta “*Polígono*” selecionada crie um polígono na janela de visualização, em seguida seleciona a ferramenta “*Ponto*” e crie o ponto que será o centro da rotação. Agora com a ferramenta “*Rotação em Torno de um Ponto*” selecionada clicamos sobre o polígono e sobre o ponto e escolhemos o ângulo e o sentido da rotação, nesse caso 90° no sentido anti-horário.

Exemplo 16. Neste exemplo vamos introduzir mais uma ferramenta do GeoGebra. Dados os pontos P e sua imagem pela rotação de θ , P' , vamos descobrir o valor de θ . Vamos precisar criar um ponto auxiliar, esse ponto é o centro da rotação, vamos utilizar a origem $O = (0, 0)$. Feito o ponto auxiliar, selecionamos a ferramenta “*Ângulo*”, localizada na 8ª caixa de ferramentas:



Vamos clicar inicialmente sobre o ponto P em seguida no ponto O e por último no ponto P' . É importante que utilizemos essa ordem, pois a ferramenta mede o ângulo no sentido anti-horário.



Exemplo 17. As transformações geométricas T_1 e T_2 são representadas pelas matrizes:

$$T_1 = \left\{ \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}, \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \right\} \text{ e } T_2 = \{ \{ \sqrt{2}, 0 \}, \{ 0, \sqrt{2} \} \}$$

No campo Entrada insira o ponto $P = (1, 1)$ e dê Enter. Ainda no campo Entrada faça a multiplicação:

$$T_3 = T_2 * T_1$$

No campo Entrada declare o ponto A como sendo a multiplicação da matriz da transformação T_3 pelo ponto P :

$$A = T_3 * P$$

e observe o resultado.

Exemplo 18. Assim como no **Exemplo 12**, vamos utilizar o comando:

$$\text{“AplicarMatriz[< Matriz >, < Objeto >]”}$$

para encontrar a imagem do quadrilátero $ABCD$ pela transformação T_3

Exemplo 19. Não existe uma interpretação geométrica para este exemplo.

Exemplo 20. Neste exemplo, vamos utilizar um novo comando:

“MatrizTransposta[< Matriz >]”

Após declarar a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos executar o comando:

“MatrizTransposta[A]”

e iremos obter a “matriz1”. Por último, vamos verificar que:

$$Q = \text{matriz1} * A$$

é a matriz identidade.

Exemplo 21.

(a) No campo entrada digite a matriz da transformação T_1 da seguinte forma:

$$T_1 = \{\{\sqrt{2}, 0\}, \{0, 2\sqrt{2}\}\}$$

Dê Enter.

(b) No campo entrada digite a matriz da transformação T_2 da seguinte forma:

$$T_2 = \{\{\cos(\theta), -\sin(\theta)\}, \{\sin(\theta), \cos(\theta)\}\}$$

Dê Enter.

(c) Iremos representar a matriz da transformação T_3 da seguinte forma:

$$A_3 = A_2 * A_1$$

Dê Enter.

(d) Iremos representar a matriz da transformação T_4 da seguinte forma:

$$A_4 = A_1 * A_2$$

Analise os resultados obtidos.

Exemplo 22.

(a) Após declarar os pontos A , B , C e D e construir o quadrado $ABCD$, com a ferramenta “Polígono” usaremos o comando “AplicarMatriz[T_3 , $pol1$]” e vamos obter a imagem do quadrado $ABCD$ pela transformação T_3 .

(b) Analogamente ao item (a), usaremos o comando “AplicarMatriz[T_4 , $pol1$]” e vamos obter a imagem do quadrado $ABCD$ pela transformação T_4 .

Acesse o exemplo resolvido na página:

<https://www.geogebra.org/m/MtgWYN6q/t5eWtGB9#material/bhHXvaJn>

Exemplo 23.

(a) No campo Entrada represente a reta $y = x$.

(b) No campo Entrada represente os pontos:

$$A = (7, 1) \quad B = (11, 3) \quad C = (7, 5) \quad D = (5, 3)$$

Logo após os pontos estarem dispostos, selecione a ferramenta polígono e clique sobre os pontos A , B , C e D criando o polígono $ABCD$.

(c-d) No campo Entrada digite a matriz da transformação $M = \{\{0, 1\}, \{1, 0\}\}$. Logo após, ainda no campo entrada, declare as imagens de A , B , C e D pela matriz da transformação M :

$$A' = M * A \quad B' = M * B \quad C' = M * C \quad D' = M * D$$

Após declarar os pontos, selecione a ferramenta polígono e clique sobre os pontos A' , B' , C' e D' criando o polígono $A'B'C'D'$.

(e) Observe os resultados obtidos.

Exemplo 24.

(a) Para construir a representação gráfica do quadrilátero $ABCD$, basta declararmos os pontos A , B , C e D e construir o quadrilátero $ABCD$, com a ferramenta “Polígono”.

(b) Verificar o item (c) abaixo.

(c) Construído o quadrilátero $ABCD$, vamos declarar a matriz

$$T = \left\{ \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\}, \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\} \right\}$$

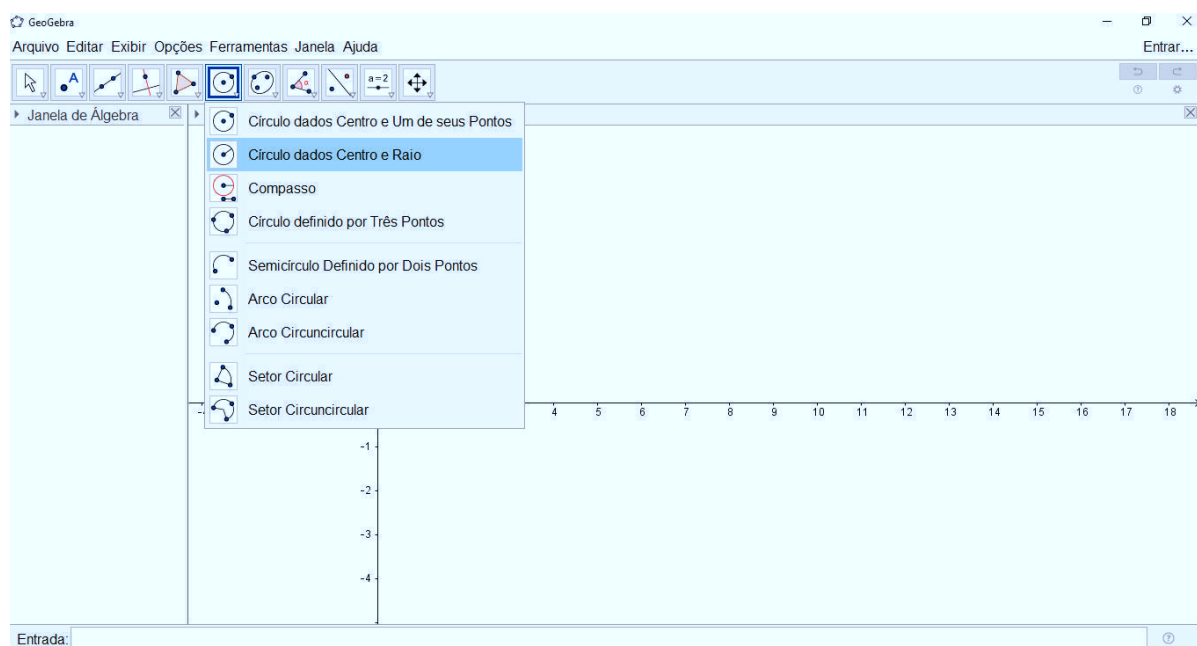
E para obtermos a imagem do quadrilátero $ABCD$ pela transformação T usaremos o comando “AplicarMatriz[T , $pol1$]” e vamos obter $pol1'$, que é a imagem do quadrado $ABCD$ pela transformação T .

(d) Podemos observar que a imagem dos segmentos de $ABCD$ não tiveram o seu comprimento original alterado e podemos notar que a área de $pol1$ e $pol1'$ são iguais; com o auxílio da ferramenta “Ângulo” podemos verificar que os Ângulos internos de $pol1'$ também não foram alterados. Podemos dizer que $pol1$ é congruente a $pol1'$. Uma transformação que preserva medidas é chamada de isometria.

Acesse o exemplo resolvido na página:

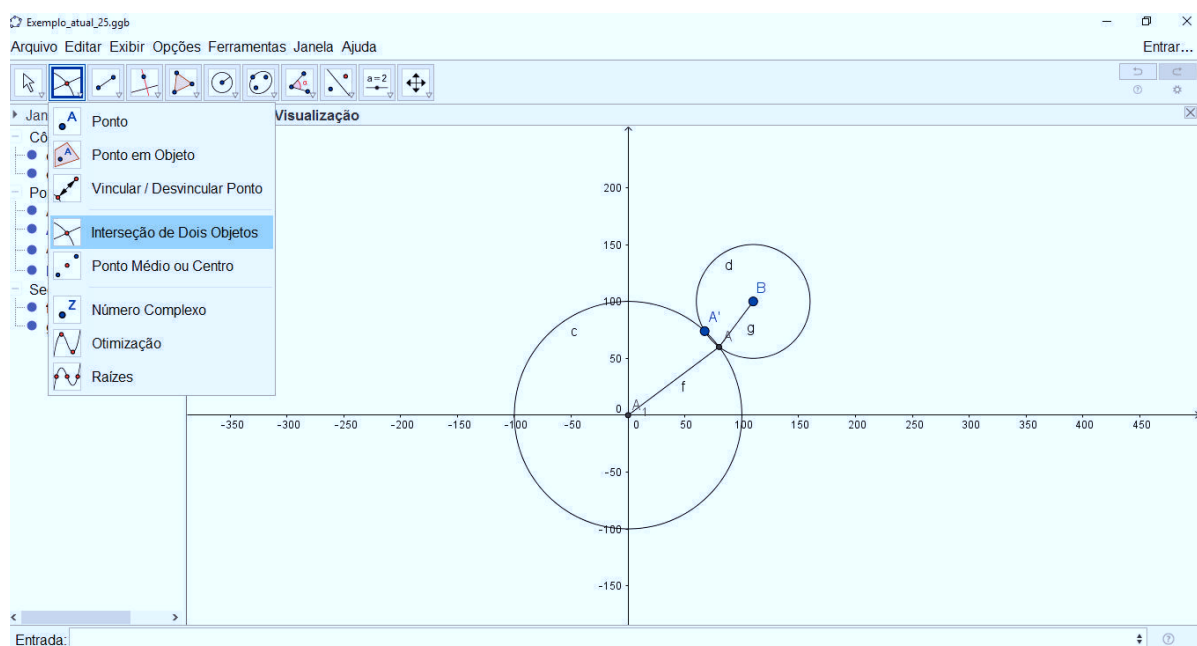
<https://www.geogebra.org/m/MtgWYN6q/t5eWtGB9#material/ArQuNJn4>

Exemplo 25. Selecione a ferramenta “*Círculo Dado Centro e Raio*”, como mostra a figura abaixo.

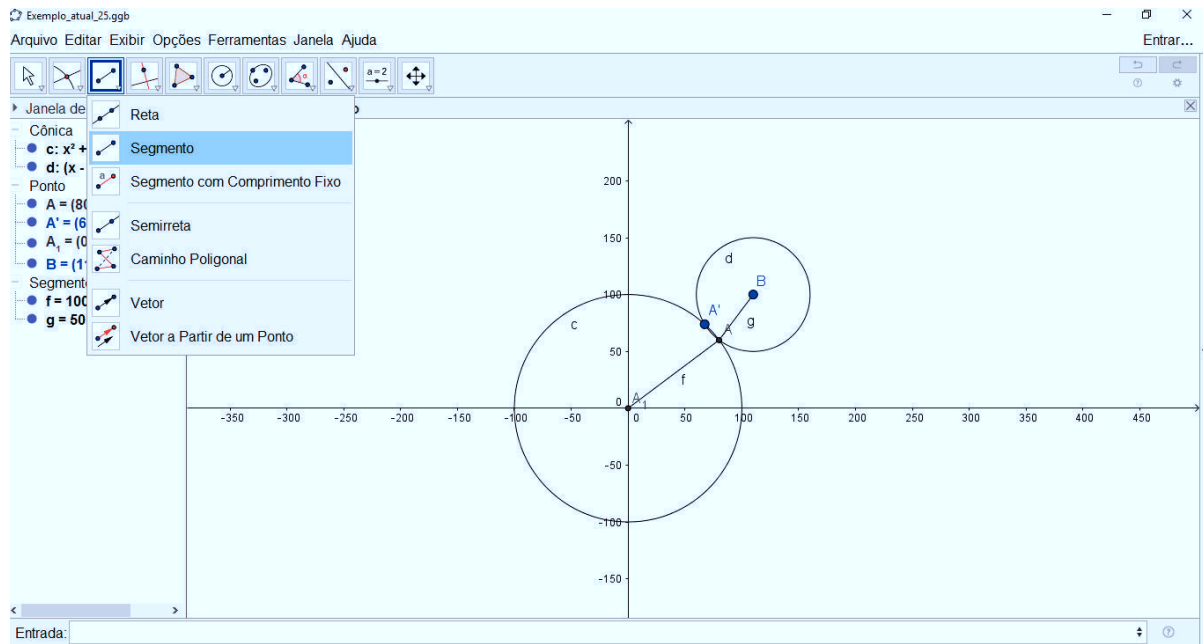


Para criar a circunferência na janela de visualização, clique sobre a origem. Após clicar sobre a origem uma janela se abrirá para ser colocado o valor do raio da circunferência, escreva o valor 100. Logo após ser criada a circunferência, digite o ponto $A' = (67.33, 73.94)$ No campo Entrada.

Novamente utilizando a ferramenta “*Círculo Dado Centro e Raio*”, clique sobre o ponto B e digite o raio igual a 50. Selecione a ferramenta “*Intersecção de Dois Objetos*”, como mostra a figura abaixo.



Clique sobre as duas circunferências no mesmo momento para plotar o ponto desejado. Clique sobre o ponto criado com o botão direito do mouse e selecione a opção *Renomear*, digite A na janela que se abre. Selecione a ferramenta “*Segmento*”, como mostra a figura abaixo.



Clique sobre o ponto A_1 com o botão direito do mouse e selecione a opção Renomear e digite O na janela que se abre. Clique sobre o ponto O com a ferramenta “*Segmento*” selecionada e logo em sequência sobre o ponto A , clique sobre o ponto A e sobre o ponto B .

Exemplo 26. Neste exemplo vamos introduzir 2 novos recursos do GeoGebra; a ferramenta “*Controle Deslizante*” a Janela de Visualização 3D. Primeiramente, vamos declarar a matriz de rotação

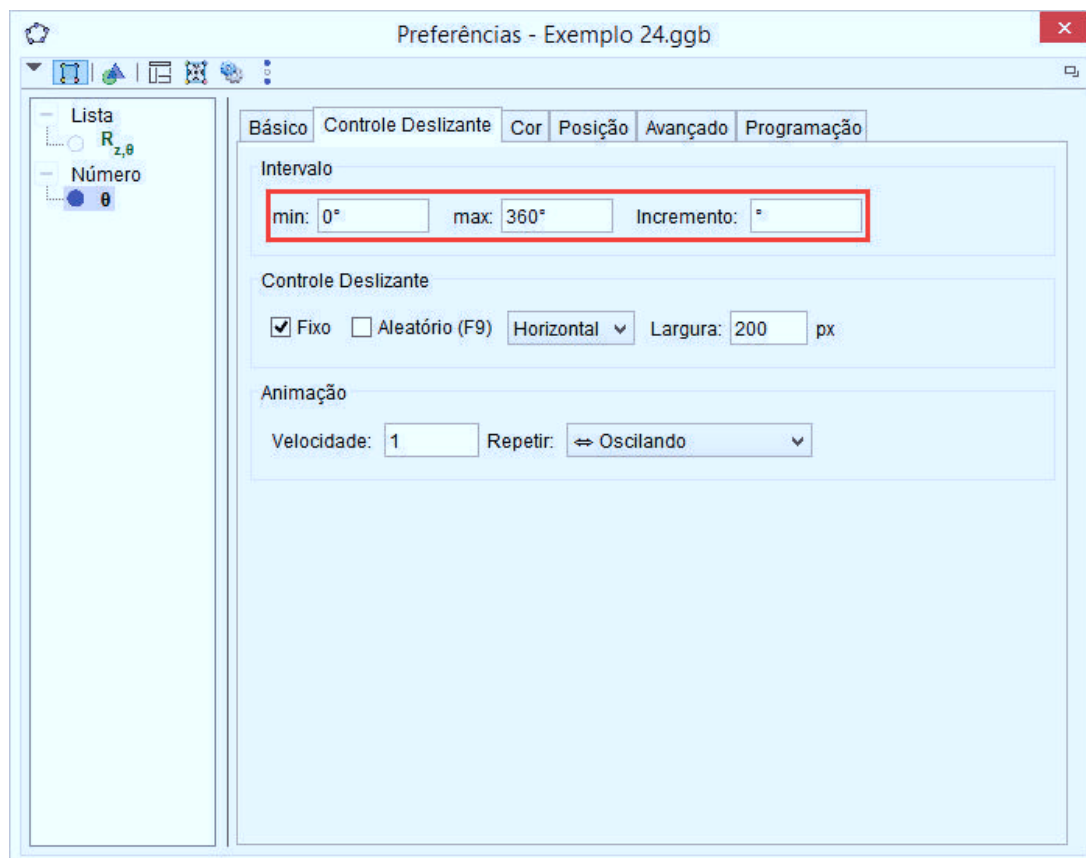
$$R_{z,\theta} = \{ \{ \cos(\theta), -\sin(\theta), 0 \}, \{ \sin(\theta), \cos(\theta), 0 \}, \{ 0, 0, 1 \} \}$$

A letra grega θ pode ser obtida pelo botão indicado na figura abaixo:

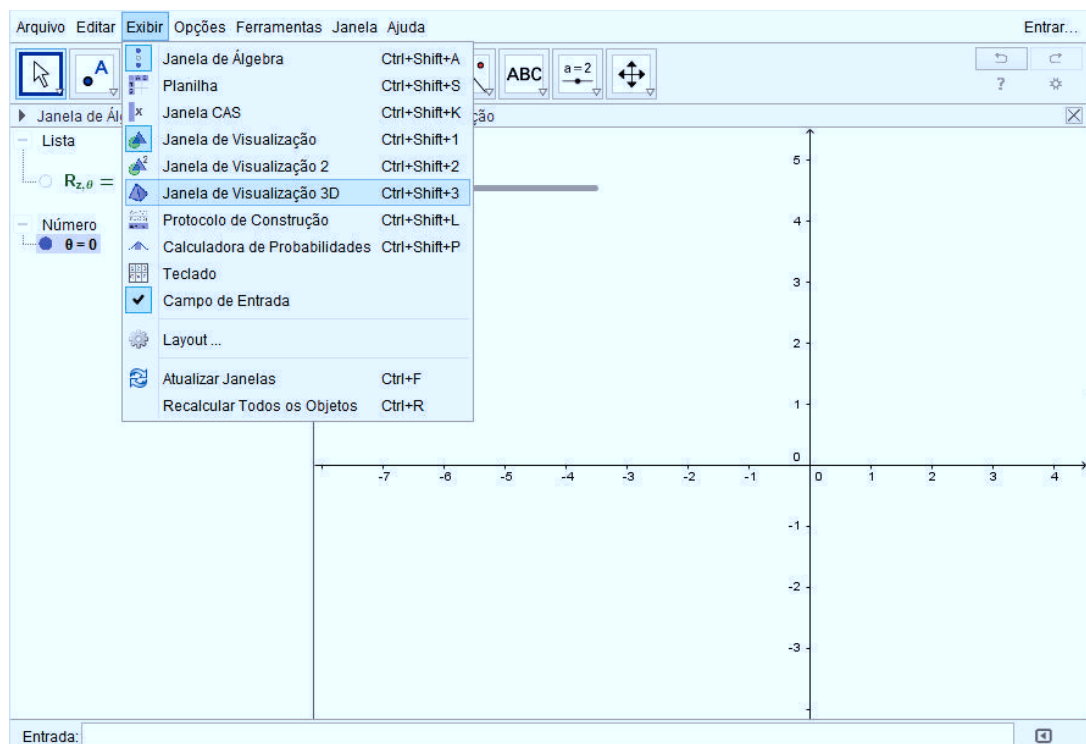


Ao declarar a matriz, o GeoGebra irá abrir um janela nos perguntando se desejamos criar um controle deslizante para θ , aceitamos e veremos que o mesmo irá surgir na Janela de Visualização.

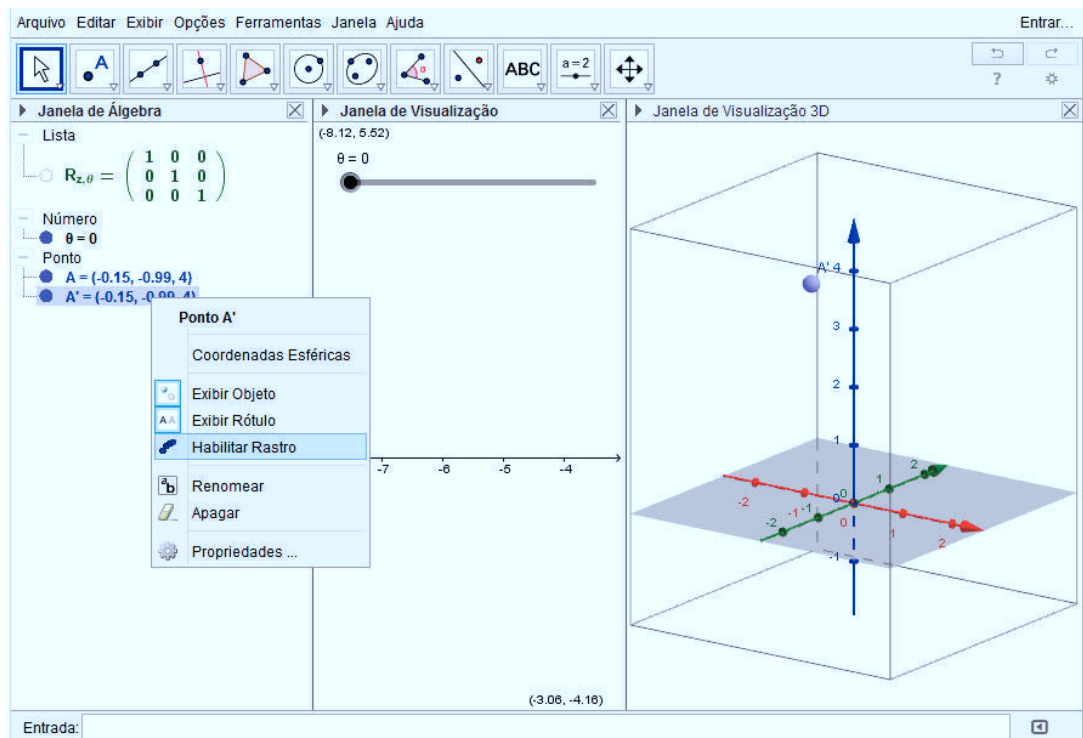
Vamos configurar esse controle, clicando com o botão direito do mouse sobre ele e clicando em propriedades, iremos definir 0° como sendo o valor mínimo e 360° como valor máximo e o incremento em $^\circ$:



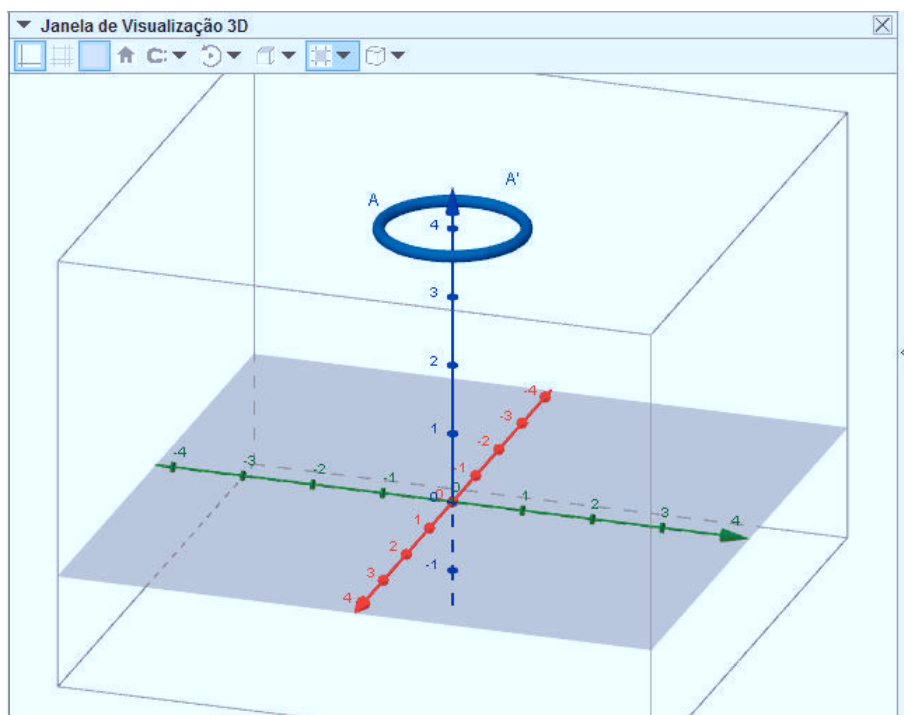
Feito isso iremos agora na Barra de Menus em Exibir e vamos selecionar Janela de Visualização 3D:



E agora vamos declarar um ponto no espaço tridimensional, ou seja, um ponto A com coordenadas em x , y e z . E por fim vamos usar o comando “AplicarMatriz[$R_{z,\theta}$, A]” e iremos obter o ponto A' . Vamos clicar com o botão direito do mouse sobre o ponto A' na Janela de Álgebra e vamos clicar sobre “Habilitar Rastro”:



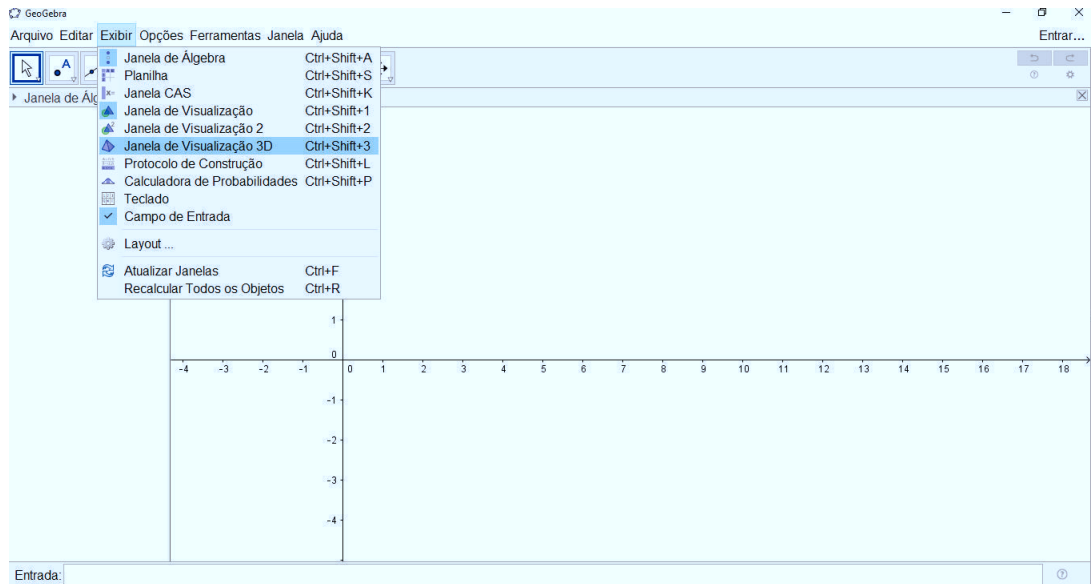
Agora vamos clicar com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante θ e vamos clicar em animar e observar o que acontece na Janela de Visualização 3D.



Acesse o exemplo resolvido na página:

<https://www.geogebra.org/m/MtgWYN6q/t5eWtGB9#material/dHrXSnt6>

Exemplo 27. Clique no menu Exibir e posteriormente em Janela de visualização 3D. Como mostra na figura abaixo.



Abrirá a janela de visualização em 3D. No campo Entrada declare a matriz:

$$R = \{\{1, 0, 0\}, \{0, \cos(\alpha), -\sin(\alpha)\}, \{0, \sin(\alpha), \cos(\alpha)\}\}$$

Logo em seguida abrirá uma janela onde devemos clicar sobre o botão “Criar Controles Deslizantes”. Com o botão direito do mouse clique sobre o controle deslizante que aparece na Janela de Visualização e selecione Propriedades. Abrirá uma janela de “Preferências”, na guia Controle Deslizante na parte Animação no campo Repetir selecione a opção Crescente.

Na campo Entrada declare o ponto $A = (1, 1, 1)$, note que o ponto aparecerá na Janela de Visualização 3D. No campo Entrada declare o ponto $A' = R * A$. Com o botão direito do mouse clique sobre o ponto A' e selecione a opção Habilitar Rastro. Com o botão direito do mouse clique sobre o controle deslizante α na Janela de Visualização e selecione a opção Animar. Verifique o resultado obtido.

Acesse o exemplo resolvido na página:

<https://www.geogebra.org/m/MtgWYN6q/t5eWtGB9#material/t9Equ3T9>

Exemplo 28. Primeiramente, vamos declarar a matriz de rotação

$$R_{y,\beta} = \{\{\cos(\beta), 0, \sin(\beta)\}, \{0, 1, 0\}, \{-\sin(\beta), 0, \cos(\beta)\}\}$$

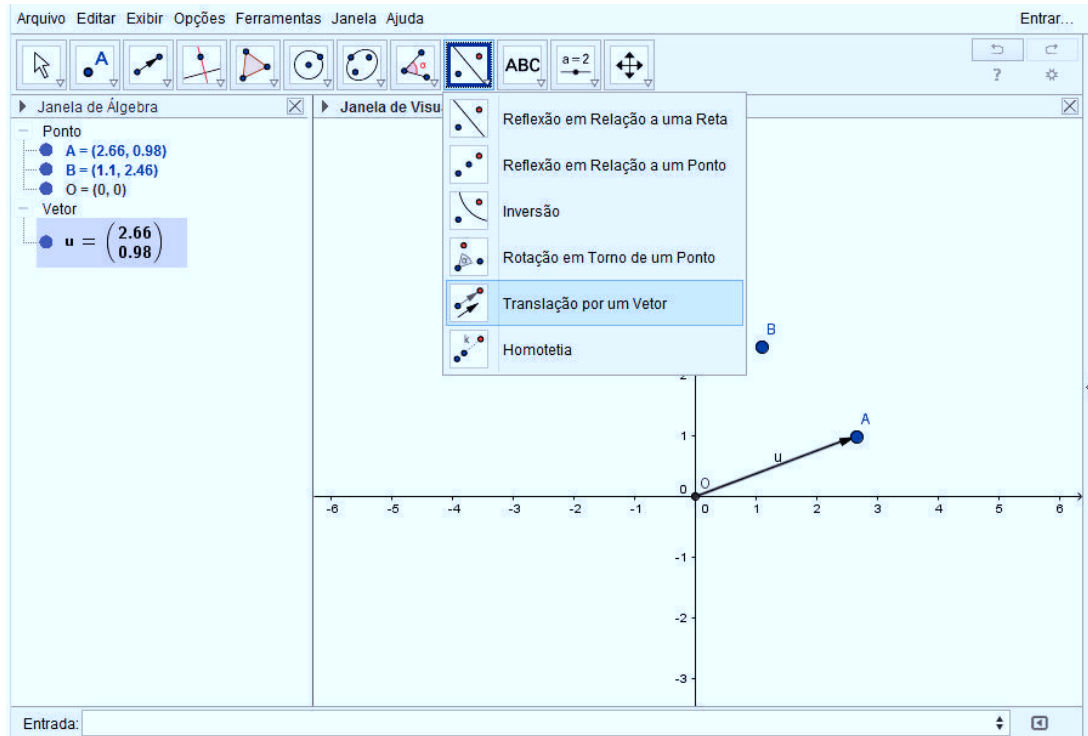
E assim como no **Exemplo 24** vamos declarar um ponto A no espaço tridimensional e aplicar a matriz da transformação $R_{y,\beta}$ sobre esse ponto e obter o ponto A' . Podemos novamente habilitar o rastro desse ponto e animar o controle deslizante β e observar o que acontece na Janela de Visualização 3D.

Exemplo 29. No menu Exibir selecione a Janela de Visualização 3D. No campo Entrada declare a matriz:

$$T = \left\{ \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right), 0 \right\}, \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), 0 \right\}, \{0, 0, 1\} \right\}$$

No campo Entrada declare o ponto $A = (20, 20, 30)$ e dê Enter. Ainda no campo Entrada declare $A' = T * A$, dê Enter.

Exemplo 30. Vamos introduzir a ferramenta “*Translação por um Vetor*”, na 9ª caixa de ferramentas. Com a ferramenta “*Ponto*” selecionada vamos clicar sobre a intersecção do eixo X e Y e criar o ponto O , origem do plano cartesiano \mathbb{R}^2 . Agora iremos criar dois outros pontos, A e B . Utilizando a ferramenta “*Vetor*”, na 3ª caixa de ferramentas iremos criar um vetor com origem em O e extremidade em A . Agora vamos selecionar a ferramenta “*Translação por um Vetor*”, na 9ª caixa de ferramentas:



Com a ferramenta selecionada vamos clicar sobre o ponto B e em seguida sobre o vetor u e iremos obter o ponto B' , que é a translação do ponto B pela posição do ponto A . Podemos selecionar a ferramenta “*Mover*” e mover o ponto A pelo plano e observar o que ocorre com o ponto B' .

Exemplo 31. No campo Entrada declare a matriz:

$$T = \{\{\lambda_1, 0, 0\}, \{0, \lambda, 0\}, \{0, 0, \lambda\}\}$$

Em seguida abrirá uma janela, clique em Criar Controles Deslizantes. Novamente, no campo Entrada declare o ponto $P = (1, 1, 1)$ e dê Enter e depois declare o ponto $P' = T * P$ e dê Enter. Note o resultado final.

Exemplo 32. Não existe uma interpretação geométrica para este exemplo.

Exemplo 33. No menu Exibir selecione a Janela de Visualização 3D. No campo Entrada declare a matriz:

$$T_1 = \{\{\cos(\beta), 0, \sin(\beta)\}, \{0, 1, 0\}, \{-\sin(\beta), 0, \cos(\beta)\}\}$$

e a matriz:

$$T_2 = \{\{\cos(\theta), -\sin(\theta), 0\}, \{\sin(\theta), \cos(\theta), 0\}, \{0, 0, 1\}\}$$

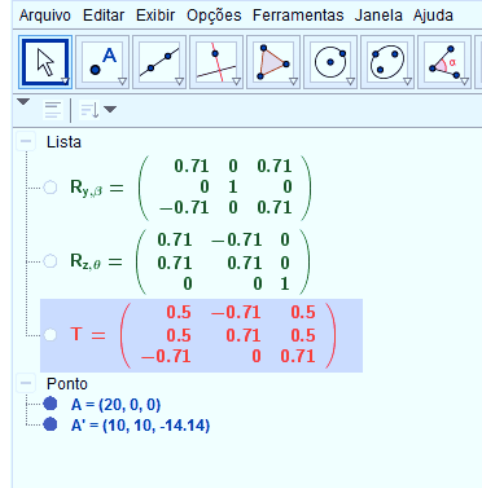
Declare também um ponto $P = (1, 1, 1)$ no espaço tridimensional. No campo Entrada escreva: $T_1 * T_2 * P$.

Exemplo 34. Primeiramente, vamos habilitar a Janela de Visualização 3D e então vamos declarar o ponto $A = (20, 0, 0)$ e as matrizes de rotação:

$$R_{z,\theta} = \left\{ \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right), 0 \right\}, \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), 0 \right\}, \{0, 0, 1\} \right\}$$

$$R_{y,\beta} = \left\{ \{1, 0, 0\}, \left\{ 0, \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\}, \left\{ 0, \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\} \right\}$$

Vamos criar a matriz $T = R_{y,\beta} * R_{z,\theta}$ que será a composição das matrizes de rotação $R_{z,\theta}$ e $R_{y,\beta}$, note que a ordem que usamos para compor é da direita para esquerda.



Para encontrarmos o ponto A' , utilizamos o comando “AplicarMatriz[T , A]” e vamos obter imagem do ponto A pela rotação $R_{z,\theta}$ e $R_{y,\beta}$, nesta ordem.

Exemplo 35. No menu Exibir selecione Janela de Visualização 3D. No campo Entrada escreva a matriz:

$$T_1 = \left\{ \{1, 0, 0\}, \left\{ 0, \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\}, \left\{ 0, \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\} \right\}$$

Dê Enter. No campo Entrada escreva a matriz:

$$T_2 = \left\{ \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right), 0 \right\}, \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), 0 \right\}, \{0, 0, 1\} \right\}$$

Dê Enter. No campo Entrada escreva o ponto $A = (20, 0, 0)$ e dê Enter. No campo Entrada escreva o ponto $A' = T_1 * T_2 * A$ dê Enter e analise o resultado.

Exemplo 36. Analogamente ao **Exemplo 32**, vamos declarar e as matrizes de rotação

$$R_{z,\theta} = \left\{ \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right), 0 \right\}, \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), 0 \right\}, \{0, 0, 1\} \right\}$$

$$R_{y,\beta} = \left\{ \{1, 0, 0\}, \left\{ 0, \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\}, \left\{ 0, \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\} \right\}$$

Vamos criar a matriz $T = R_{z,\theta} * R_{y,\beta}$ que será a composição das matrizes de rotação $R_{y,\beta}$ e $R_{z,\theta}$.

Para encontrarmos o ponto A' , utilizamos o comando “AplicarMatriz[T , A]” e vamos obter imagem do ponto A pela rotação $R_{z,\theta}$ e $R_{y,\beta}$, nesta ordem.

Podemos agora observar o resultado deste exemplo com o resultado do **Exemplo 32**.

Exemplo 37. No menu Exibir selecione Janela de Visualização 3D. No campo Entrada escreva a matriz:

$$T_1 = \left\{ \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right), -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right), 0 \right\}, \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right), \cos\left(\frac{\pi}{6}\right), 0 \right\}, \{0, 0, 1\} \right\}$$

Dê Enter. No campo Entrada escreva a matriz:

$$T_2 = \left\{ \{1, 0, 0\}, \left\{ 0, \cos\left(\frac{\pi}{6}\right), -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right\}, \left\{ 0, \sin\left(\frac{\pi}{6}\right), \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \right\} \right\}$$

Dê Enter. No campo Entrada escreva o ponto $A = (20, 0, 0)$ e dê Enter. No campo Entrada declare o seguinte ponto:

$$A' = T_2 * T_1 * A$$

Dê Enter e analise o resultado final.

Exemplo 38. Após habilitar a Janela de Visualização 3D, declaramos os pontos:

$$A = (20, 0, 10), \quad O = (0, 0, 0), \quad \text{e} \quad B = (10, 5, 15)$$

Vamos criar o vetor \overrightarrow{OP} , para isso com a ferramenta “*Vetor*”, na 3ª caixa de ferramentas, selecionada iremos clicar sobre o ponto O na Janela de Álgebra e em seguida sobre o ponto B , também na Janela de Álgebra, pois é mais fácil do que clicar sobre eles na Janela de Visualização 3D, e iremos obter o vetor u . Feito isso, iremos declarar a matriz da transformação P :

$$P = \{\{1, 0, 0\}, \{0, 3, 0\}, \{0, 0, 2\}\}$$

E construir um ponto auxiliar Q , que será a imagem do ponto A pela matriz da transformação P :

$$Q = P * A$$

Agora com ferramenta “*Translação por um Vetor*”, na 9ª caixa de ferramentas, selecionada vamos clicar sobre o ponto Q e sobre o vetor u na Janela de Álgebra e iremos obter Q' que é justamente o ponto que procuramos.

Note que como a translação não é uma transformação linear não podemos escrevê-la na forma matricial, o que nos impede de criar uma matriz que seja a composição da matriz da transformação T com a matriz da transformação P e por isso foi necessário a criação do ponto auxiliar Q .

Exemplo 39. Vamos repetir os mesmos passos do **Exemplo 38**, porém iremos primeiro transladar o ponto A e em seguida aplicar a matriz de escala não uniforme sobre o ponto A' .

Transformações Geométricas
Aplicação nos Movimentos de Braços Robóticos
Simulação do Braço Robótico no GeoGebra

Claudina Izepe Rodrigues

30 de janeiro de 2017

Sumário

Comentários iniciais	95
Construção 1	98
Atividades	98
1 Rotação em torno do eixo z	98
2 Rotação em torno do eixo x	104
3 Rotação em torno do eixo z seguida da rotação em torno do eixo x (I)	105
4 Rotação em torno do eixo z seguida da rotação em torno do eixo x (II)	107
5 Rotação em torno do eixo z seguida da rotação em torno do eixo x e translação na direção e sentido do eixo z positivo	110
6 Desenhando um braço robótico - animação	112
Construção 2	117

Atividade: Construção de uma simulação de um braço robótico	117
Apêndice	124
Seno e cosseno da soma de ângulos	124
Referências	126

Comentários iniciais

GeoGebra é um programa gratuito desenvolvido pelo Prof. Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg - Áustria - por volta de 2001 e tem sido continuamente aprimorado. O programa tem como finalidade auxiliar o ensino de matemática e contempla geometria, álgebra e cálculo.

Aplicaremos conceitos e resultados sobre transformações geométricas no espaço para construir uma animação de um braço robótico utilizando o programa GeoGebra.

Apresentaremos duas formas para a construção da animação. Na primeira construção utilizaremos o recurso 3D do programa e também seu *Sistema de Computação Algébrico (CAS)* que permite realizar cálculos simbólicos. Esta construção é feita por meio de 6 atividades e também permite observar o produto simbólico de matrizes além de ser possível observar, nas atividades 3 e 4, que a matriz associada à composição das duas transformações de rotação envolvidas é o produto das matrizes associadas a cada uma das transformações. Essa construção está dividida em 6 atividades para que cada etapa da construção seja explorada pelo aluno com o objetivo de refletir e entender melhor os conceitos matemáticos envolvidos. A segunda construção é realizada por meio de apenas uma atividade e não utilizaremos os recursos de cálculos simbólicos, ou seja, não utilizaremos a *Janela CAS* do programa. As atividades proporcionarão apresentar o programa e, ao mesmo tempo, construir a animação. Assim, assinalaremos e ilustraremos a sua utilidade como ferramenta auxiliar e eficiente para o desenvolvimento, estudo, aprendizado e melhor entendimento dos conceitos propostos na oficina.

Ao abrir o GeoGebra aparecem a *Janela de Álgebra* e a *Janela de Visualização* exibindo um sistema de eixos coordenados, como na figura 1 da página 95. Esta *Janela de Visualização* é para as construções e representações de figuras planas.

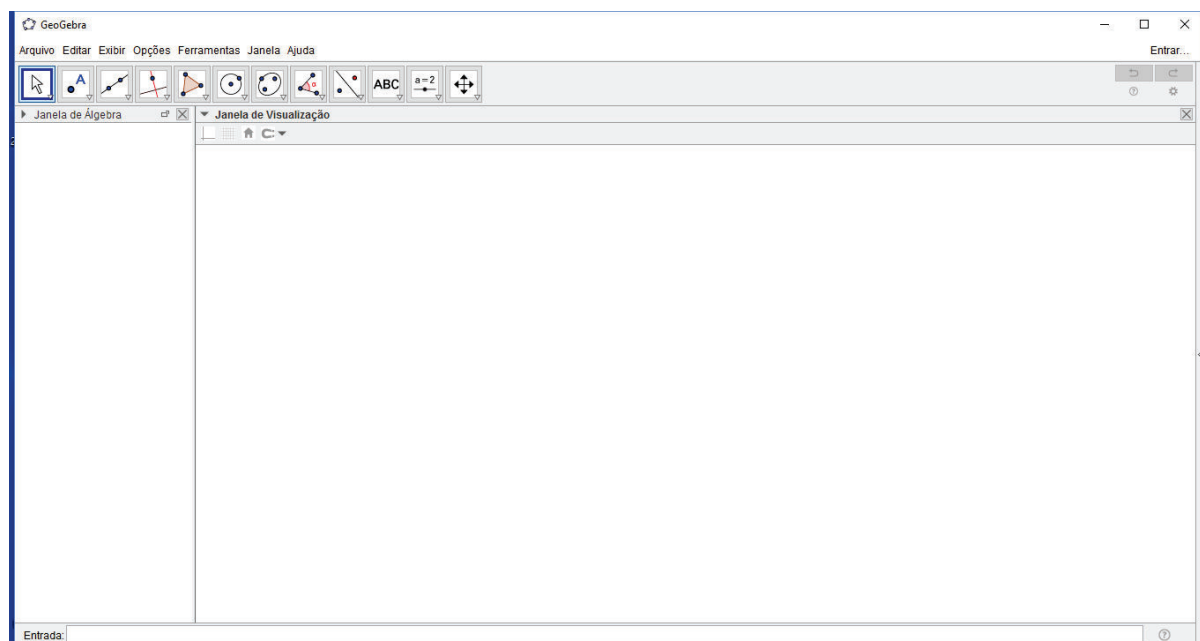


Figura 1: Tela do GeoGebra

Na primeira construção, que corresponde as 6 primeiras atividades, utilizaremos os recursos de computação simbólica do GeoGebra. Com essa finalidade, no menu principal, escolha o item *Exibir* → *Janela CAS*, conforme mostra a figura 2 da página 96.

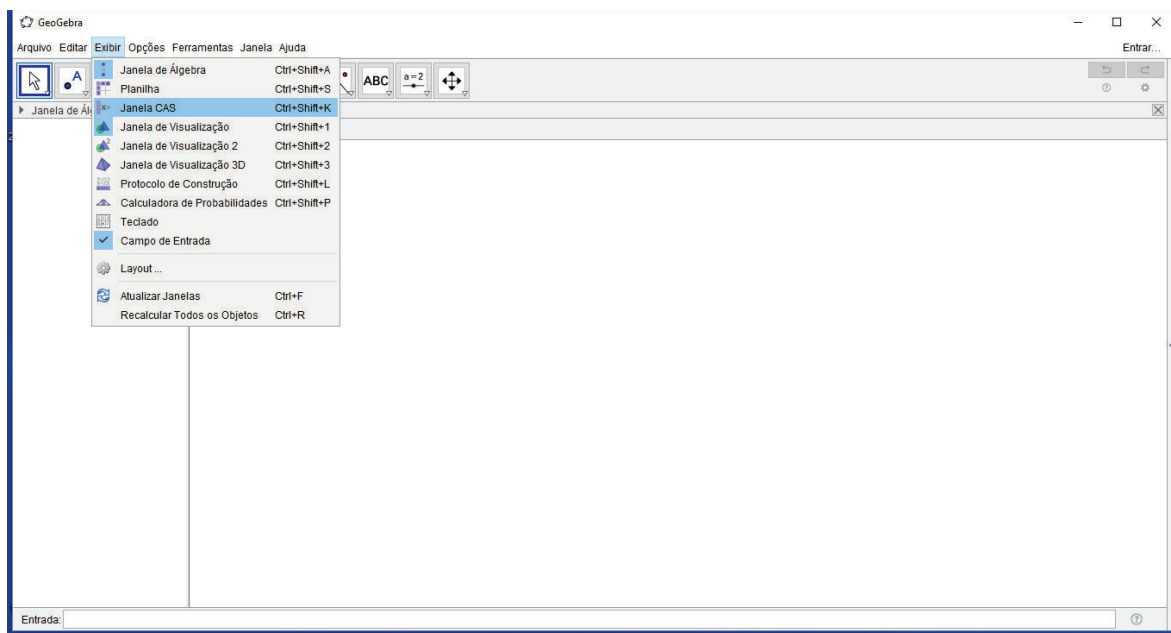


Figura 2: Abrindo a *Janela CAS*

Assim, serão exibidas na tela as 3 janelas: *Janela de Álgebra*, *Janela CAS* e *Janela de Visualização*, como na figura 3 da página 96.

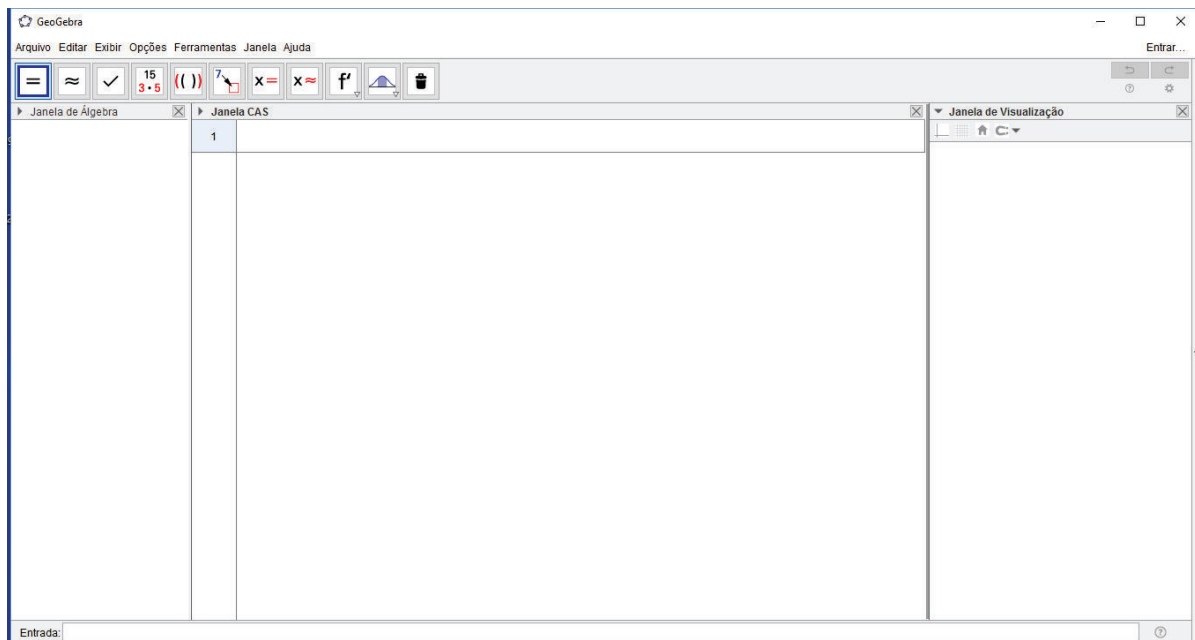


Figura 3: *Janelas de Álgebra, CAS e de Visualização*

Nas atividades seguintes também utilizaremos representações de pontos no espaço. Assim, vamos apresentar na tela a *Janela de Visualização 3D*. Para isso, no menu principal, escolha o item *Exibir* → *Janela de Visualização 3D*, conforme mostra a figura 4 da página 97.

Devido às atividades a serem realizadas, convém deixar um maior espaço da tela para a *Janela CAS* e a *Janela de Visualização 3D* e menor para a *Janela de Visualização* e a *Janela de Álgebra*. Para isso, aponte o cursor para a linha à direita da *Janela CAS*, pressione o botão do mouse e, mantendo-o pressionado, arraste a linha para o local desejado. Proceda de modo análogo com outras linhas verticais dividindo a tela da forma apresentada na figura 4 da página 97.

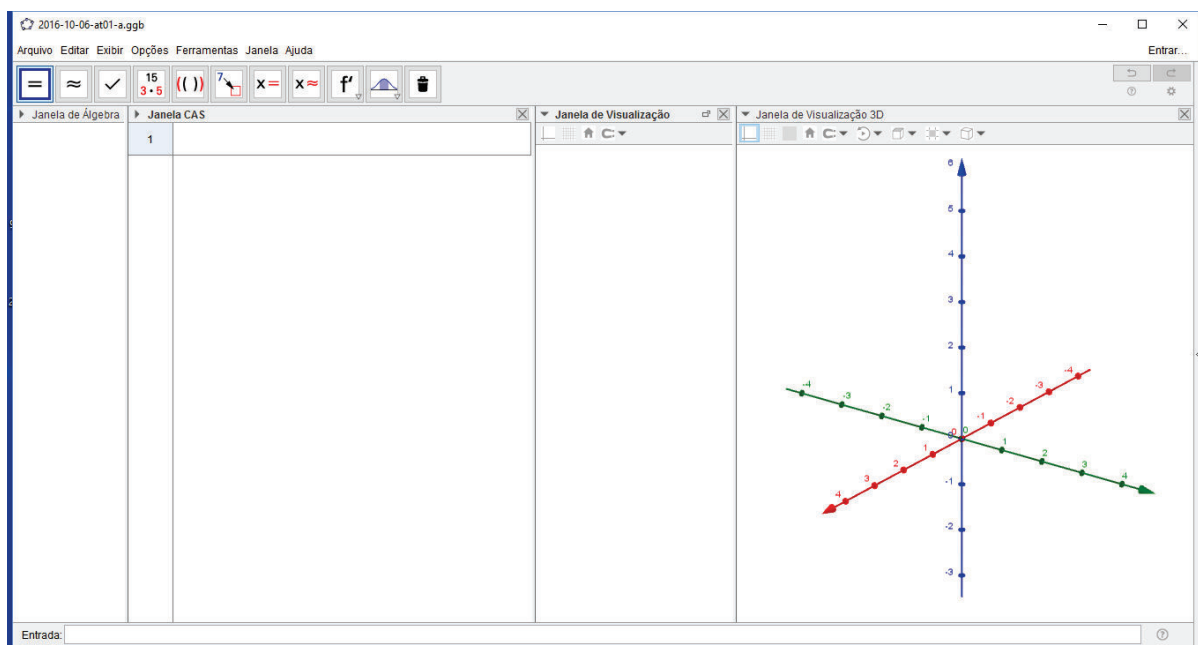


Figura 4: *Janelas de Álgebra, CAS, de Visualização e de Visualização 3D*

Construção 1

Atividades

1 Rotação em torno do eixo z

- (a) Inserir um ponto arbitrário $P = (a, b, c)$ na *Janela CAS*.

Aponte o cursor para o local editável da linha 1 da *Janela CAS*, clique e digite:

$$P := (a, b, c)$$

Por fim, pressione a tecla *Enter*. Com isso, obtemos o que é mostrado na figura 5 da página 98.

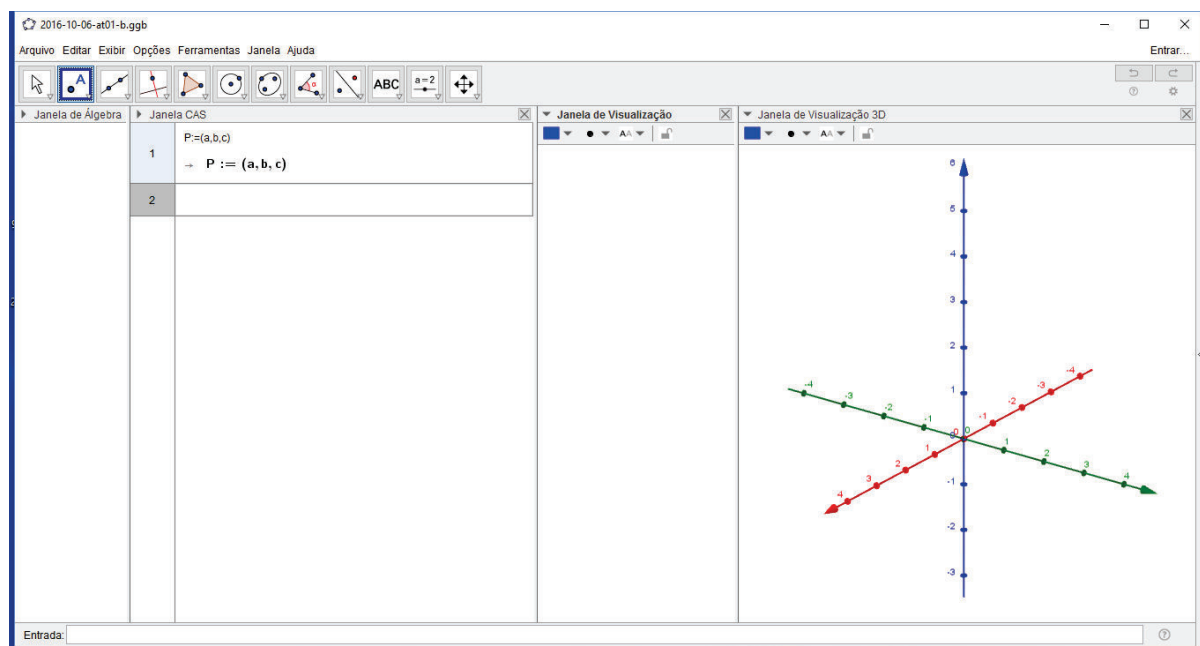


Figura 5: Inserir um ponto P arbitrário na *Janela CAS*

- (b) Inserir a matriz de rotação em torno do eixo z de um ângulo θ na *Janela CAS*.

Aponte o cursor para o local editável da linha 2 da *Janela CAS*, clique e digite:

$$A := \{\{\cos(\theta), -\sin(\theta), 0\}, \{\sin(\theta), \cos(\theta), 0\}, \{0, 0, 1\}\}$$

A letra grega θ pode ser obtida clicando sobre a letra α localizada à direita da linha 2 e observe que cada uma das linhas da matriz devem ser colocadas entre chaves. Por fim, pressione a tecla *Enter*. Ao completar estas instruções é obtido o que é mostrado na figura 6 da página 99.

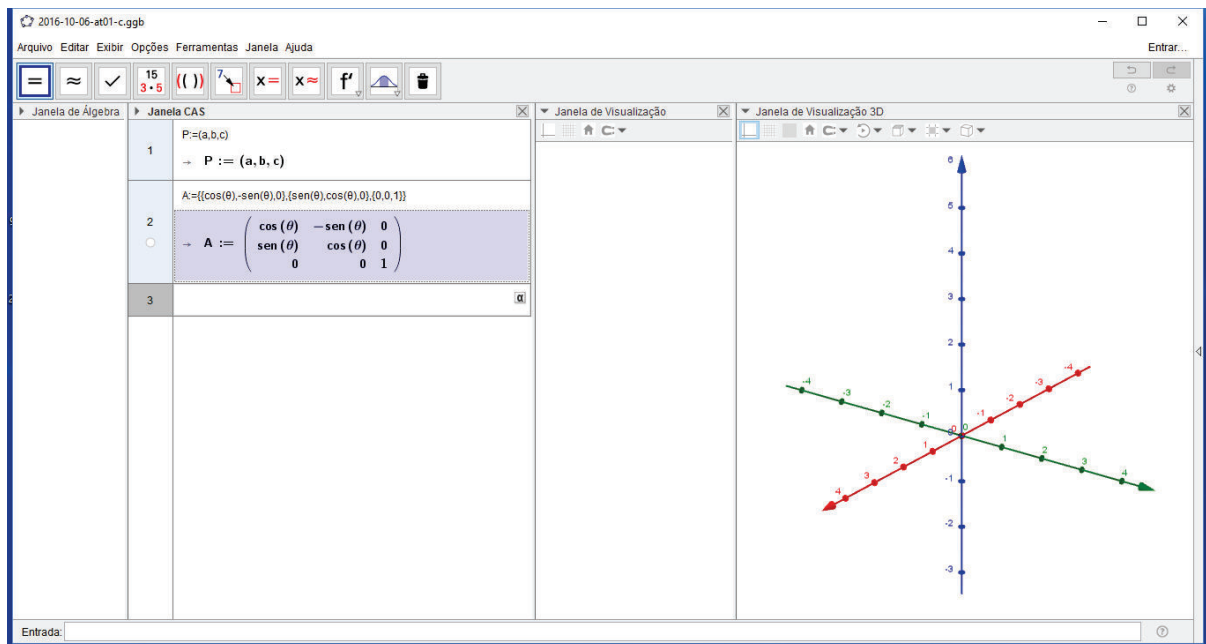


Figura 6: Inserir a matriz de rotação na *Janela CAS*

- (c) Inserir na *Janela CAS* o ponto Q obtido pela rotação do ponto P em torno do eixo z de um ângulo θ .

Aponte o cursor para o local editável da linha 3 da *Janela CAS*, clique e digite:

$$Q := A * P,$$

e pressione a tecla *Enter*. (Veja a figura 7 da página 100.) Observe que as coordenadas do ponto Q são as entradas da matriz coluna obtida pelo produto da matriz A pela matriz coluna cujas entradas são as coordenadas do ponto $P = (a, b, c)$.

- (d) Inserir controles deslizantes para a , b e c na *Janela de Visualização*.

Clique no *Campo de Entrada*, que está localizado abaixo da *Janela de Visualização* e de *álgebra*, digite $a = 1$ e pressione *Enter*. Observe que $a = 1$ aparece na *Janela de Álgebra*. Na *Janela de Álgebra*, aponte o cursor para $a = 1$, pressione o botão direito do mouse e selecione *Exibir Objeto* no menu que se abre. Aparecerá na *Janela de Visualização* um cursor correspondente ao a . Com este cursor podemos variar o número a de -5 a 5 e isto pode ser alterado utilizando o recurso *Propriedades* para alterar as características do cursor. Mas, para o que segue, deixaremos como está.

Proceda de modo análogo para inserir controles deslizantes para b e c .

- (e) Inserir controle deslizante para θ na *Janela de Visualização* e configurá-lo para que o ângulo varie de 0° a 360° com incrementos de 1° e variação crescente.

Clique no *Campo de Entrada*, digite $\theta = 1^\circ$ e pressione *Enter*. A letra θ pode ser obtida clicando sobre a letra α localizada á direita no *Campo de*

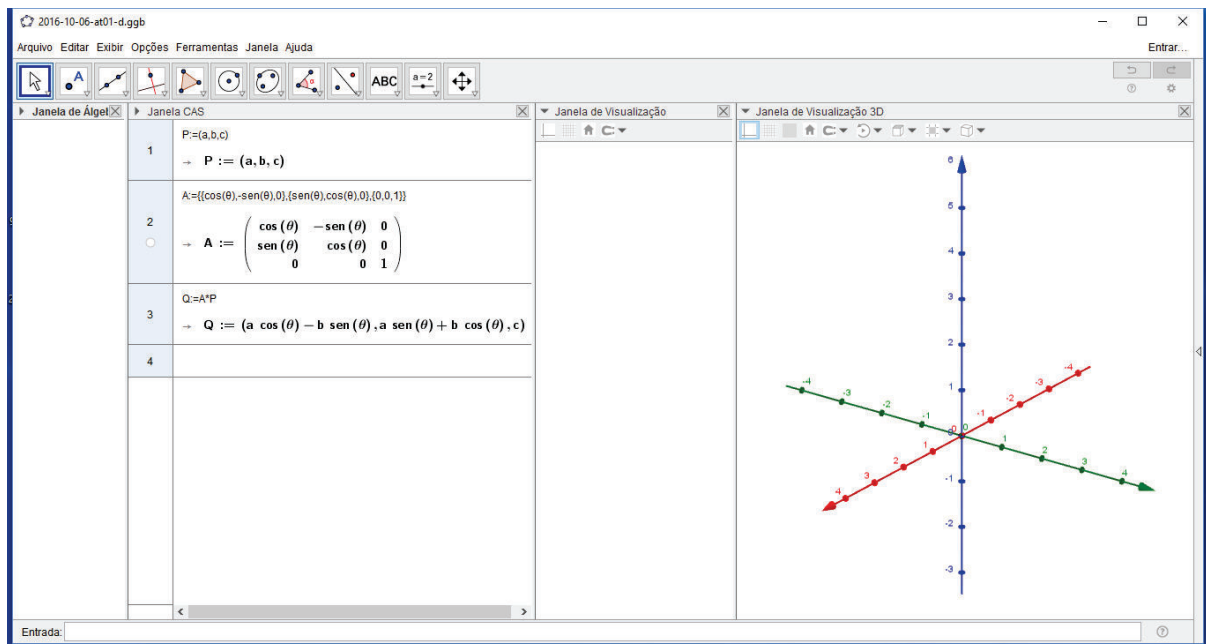


Figura 7: Inserir a rotação de P de ângulo θ na *Janela CAS*

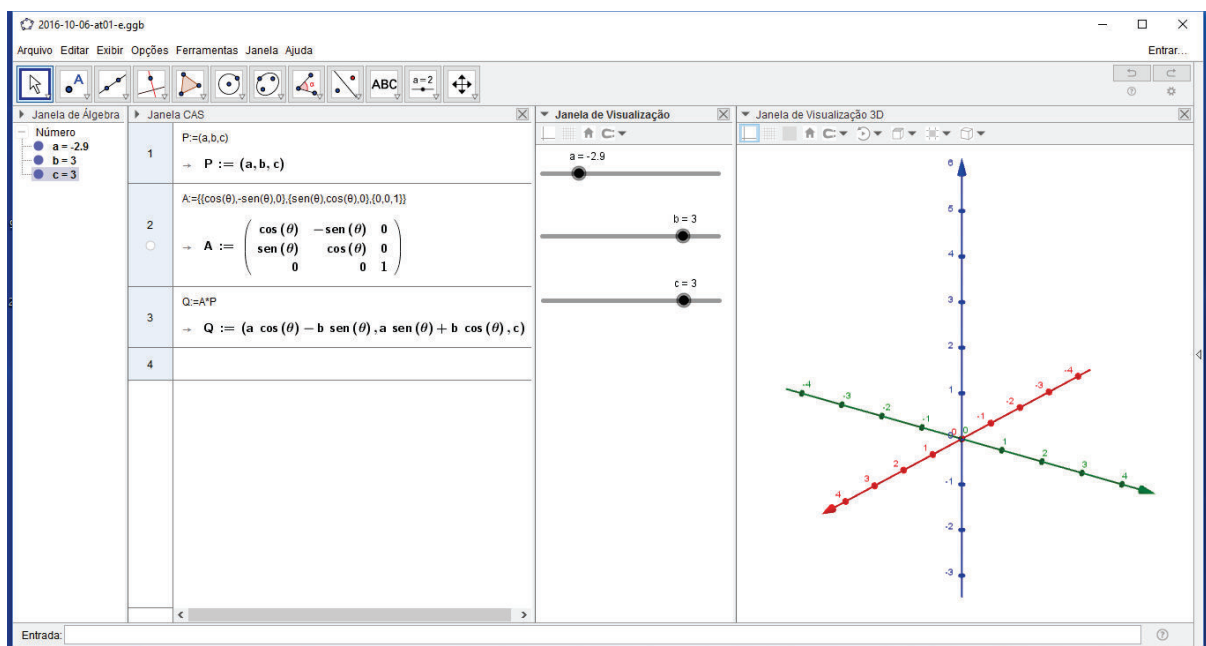


Figura 8: Inserir controles deslizantes para a , b e c

Entrada e selecionando a letra θ no menu que se abre. Neste menu também pode ser obtido o símbolo $^\circ$ de grau. Na *Janela de Álgebra*, aponte o cursor para $\theta = 1^\circ$, pressione o botão direito do mouse e selecione *Propriedades* no menu que se abre. Aparecerá uma caixa de diálogo como mostra a figura 9 da página 101. Nas características em *Básico* selecione em *Exibir Rótulo* a opção *Nome & Valor*.

Em *Controle Deslizante*, verifique se a variação do ângulo está entre 0° e 360° e em *Incremento* coloque 1° . Além disso, selecione em *Repetir* a opção *Crescente*. (ver figura 10 da página 102)

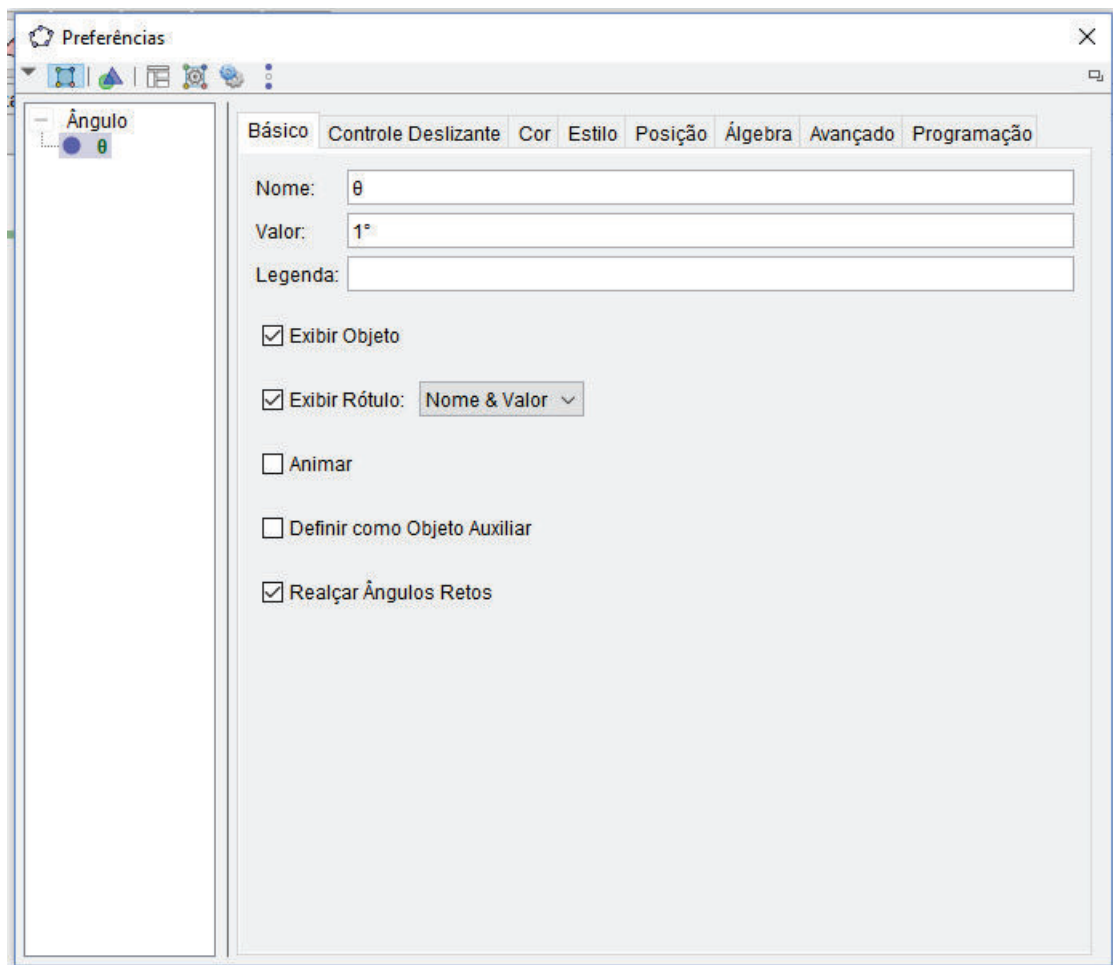


Figura 9: Configurando o *Controle Deslizante* para θ : características básicas

Assim, a interface gráfica ficará como mostra a figura 11 da página 103.

- (f) Representar os pontos P e Q na *Janela de Visualização 3D*.

Na linha 1 da *Janela CAS*, aponte o cursor para

$$P := (a, b, c),$$

pressione o botão direito do mouse e selecione *Copiar* no menu que se abre. A seguir, cole no *Campo de Entrada*, localizado na base da tela, e pressione *Enter*. Observe que aparecerá um ponto P_1 na *Janela de Álgebra* e na *Janela de Visualização 3D*. Para que as coordenadas do ponto sejam exibidas na *Janela de Visualização 3D*, aponte o cursor para o ponto P_1 na *Janela de Álgebra*, pressione o botão direito do mouse e selecione a opção *Propriedades* do menu que se abre. Na caixa de diálogo, em *Exibir Rótulo* selecione *Nome & Valor*. O mesmo resultado pode ser obtido apontando o cursor para o ponto na *Janela de Visualização 3D* e procedendo de modo análogo. Note que as coordenadas do ponto são exatamente os valores para a , b e c que aparecem nos controles deslizantes para essas coordenadas. Pode acontecer de o ponto não aparecer no campo visual da representação do sistema de eixos cartesianos do espaço. Neste caso, altere os valores de a

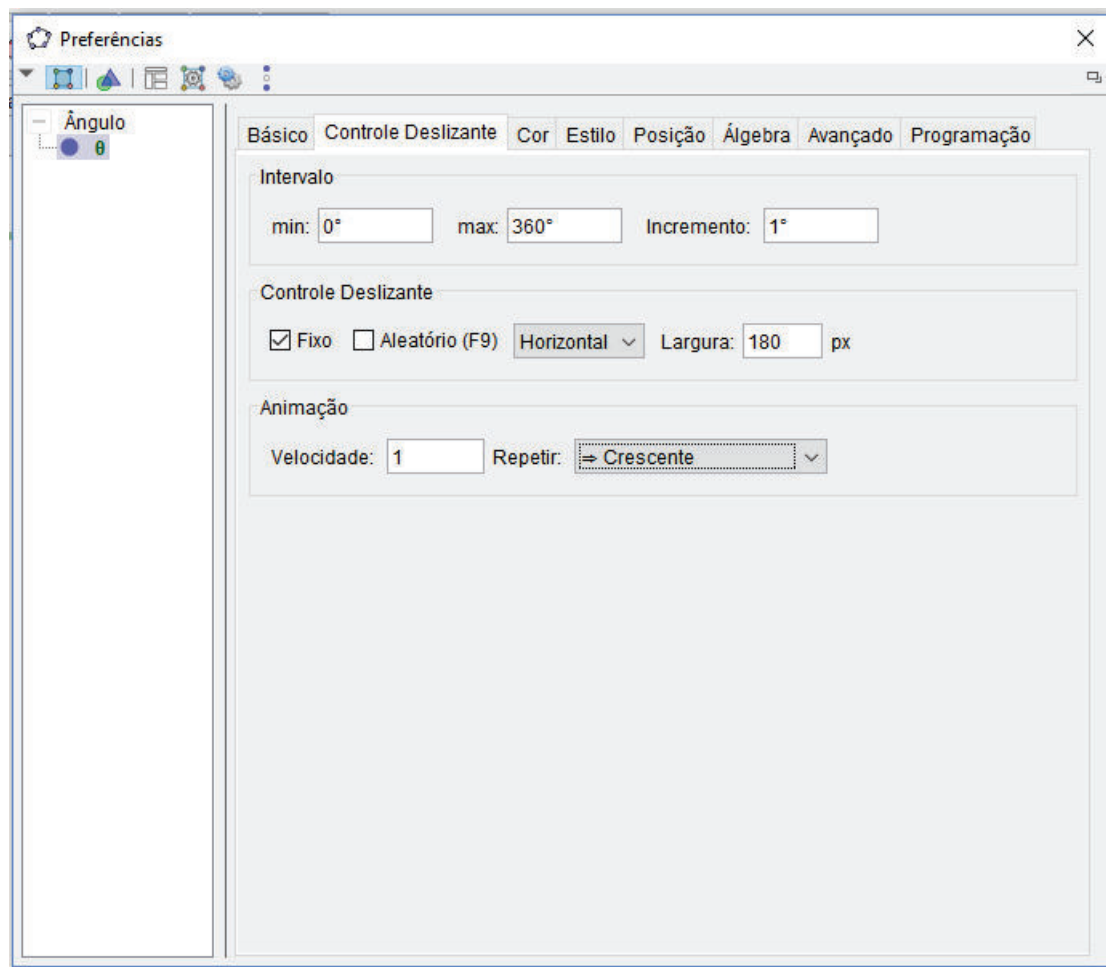


Figura 10: Configurando o *Controle Deslizante* para θ : características do controle

e/ou b e/ou c , Movimentar os respectivos cursores dos controles deslizantes alterando os valores para números convenientes. (ver figura 12 da página 103).

De modo análogo, na linha 3 da *Janela CAS*, aponte o cursor para

$$Q := ((a * \cos(\theta)) - (b * \sin(\theta)), (a * \sin(\theta)) + (b * \cos(\theta)), c),$$

pressione o botão direito do mouse e selecione *Copiar* no menu que se abre. A seguir, cole no *Campo de Entrada*. Aparecerá o ponto Q_1 na *Janela de Álgebra* e na *Janela de Visualização 3D*. Este ponto é a rotação de ângulo θ do ponto P_1 em torno do eixo z .

- (g) Movimentar os cursores de a , b , c e θ e observar as modificações da figura na *Janela de Visualização 3D*.
- (h) Desenhar o caminho do ponto Q_1 ao variar o ângulo de rotação θ , utilizando o recurso *Rastro* do *GeoGebra*.

Aponte o cursor para o ponto Q_1 na *Janela de Álgebra* ou na *Janela de Visualização 3D*, pressione o botão direito do mouse e selecione *Habilitar Rastro* no menu que se abre. A seguir, movimente o cursor do *Controle*

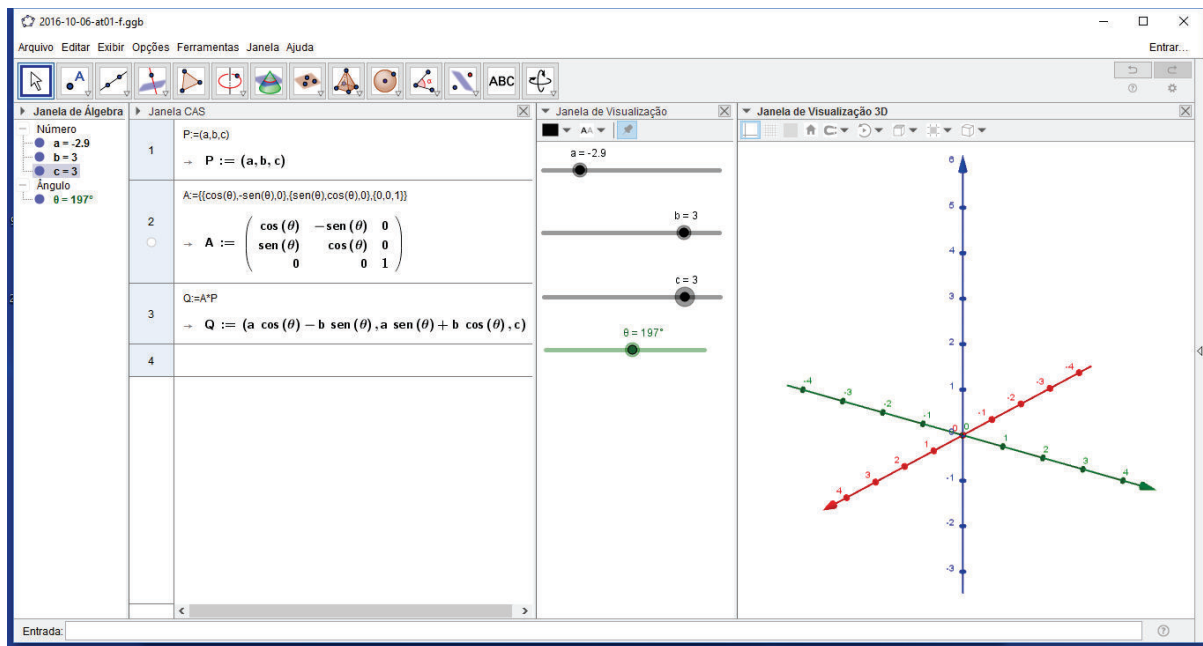


Figura 11: Elementos na interface gráfica

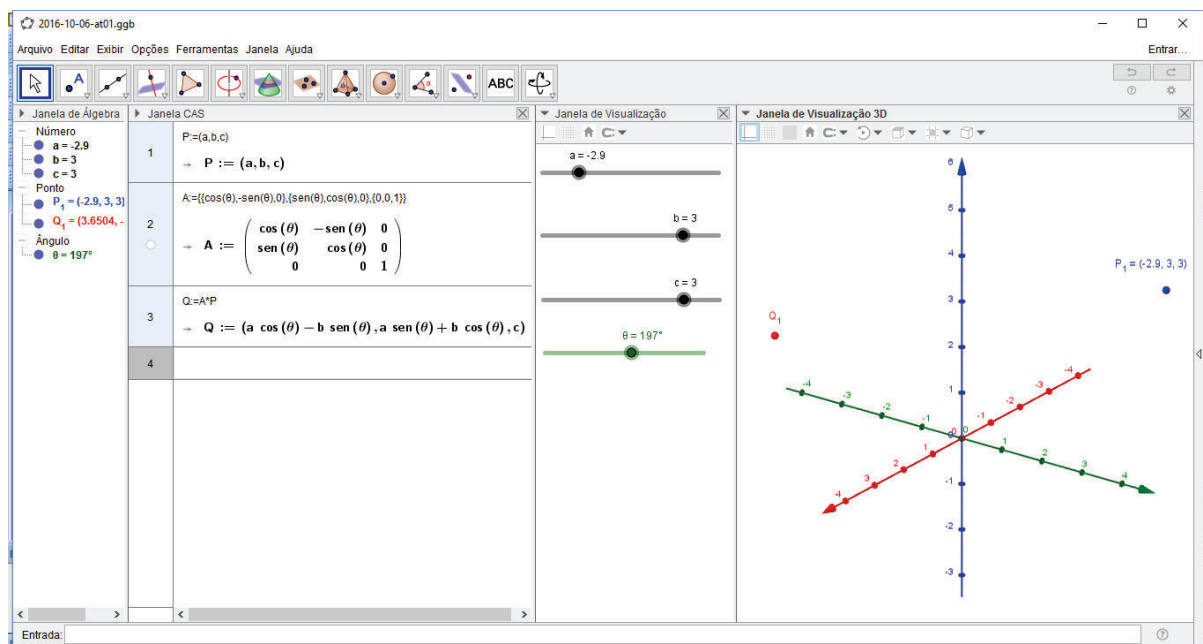


Figura 12: Representar os pontos na *Janela de Visualização 3D*

deslizante de θ ou aponte para o *Controle Deslizante*, pressione o botão direito do mouse e selecione *Animar* no menu que se abre. Com isso, o ângulo θ variará em todo o intervalo de 0° a 360° e será desenhado o caminho do ponto Q_1 . Para parar a animação, selecione o *Controle Deslizante* de θ e desmarque a opção *Animar*. (ver figura 13 na página 104.)

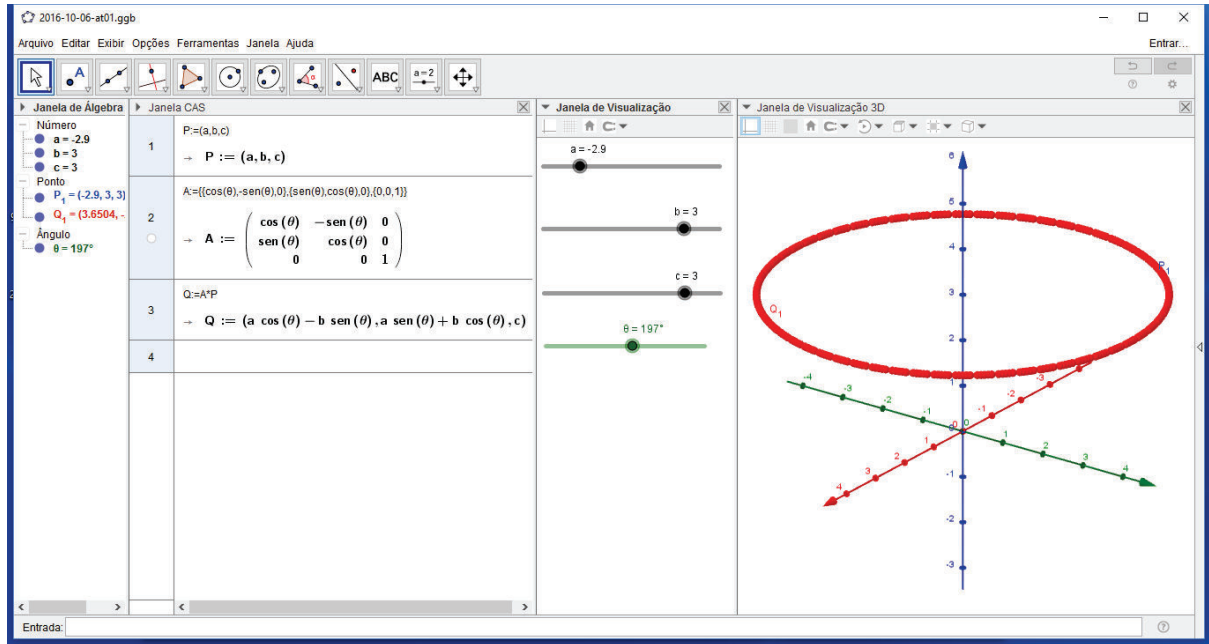


Figura 13: Desenhando o caminho de Q_1 ao variar θ

2 Rotação em torno do eixo x

- Inserir um ponto arbitrário $P = (a, b, c)$ na linha 1 da *Janela CAS*.
- Inserir a matriz de rotação em torno do eixo x de um ângulo α na *Janela CAS*.

Aponte o cursor para o local editável da linha 2 da *Janela CAS*, clique e digite:

$$B := \{\{1, 0, 0\}, \{0, \cos(\alpha), -\sin(\alpha)\}, \{0, \sin(\alpha), \cos(\alpha)\}\}$$

A letra grega α pode ser obtida clicando sobre a letra α localizada à direita da linha 2.

- Inserir na *Janela CAS* o ponto Q obtido pela rotação do ponto P em torno do eixo x de um ângulo α .

Aponte o cursor para o local editável da linha 3 da *Janela CAS*, clique e digite:

$$Q := B * P,$$

e pressione a tecla *Enter*. Observe que as coordenadas do ponto Q são as entradas da matriz coluna obtida pelo produto da matriz B pela matriz coluna cujas entradas são as coordenadas do ponto $P = (a, b, c)$.

- Inserir controles deslizantes para a , b e c na *Janela de Visualização*.
- Inserir controle deslizante para α na *Janela de Visualização* e configurá-lo para que o ângulo varie de 0° a 360° com incrementos de 1° e variação crescente.

- (f) Representar os pontos P e Q na *Janela de Visualização 3D*. (Veja a figura 14 da página 105.)

Os pontos P e Q são denotados por P_1 e Q_1 na *Janela de Álgebra* e na *Janela de Visualização 3D*, respectivamente.

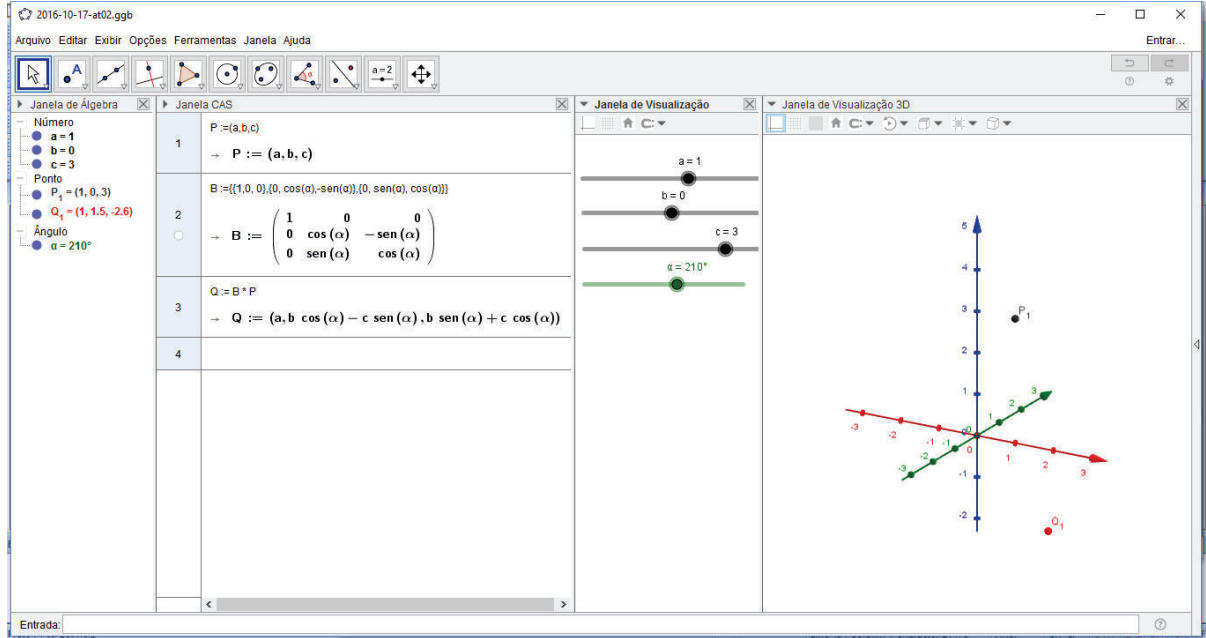


Figura 14: Rotação em torno de eixo x do ponto P_1

- (g) Movimentar os cursores de a , b , c e α e observar as modificações da figura na *Janela de Visualização 3D*.
 (h) Desenhar o caminho do ponto Q_1 ao variar o ângulo de rotação α , utilizando o recurso *Rastro do GeoGebra*. (Veja a figura 15 da página 106.)

3 Rotação em torno do eixo z seguida da rotação em torno do eixo x (I)

O objetivo desta atividade é rotacionar um ponto P em torno do eixo z de um ângulo θ seguido pela rotação em torno do eixo x de um ângulo α .

- (a) Inserir um ponto arbitrário $P = (a, b, c)$ na linha 1 da *Janela CAS*.
 (b) Inserir a matriz de rotação em torno do eixo z de um ângulo θ na *Janela CAS*.

Aponte o cursor para o local editável da linha 2 da *Janela CAS*, clique e digite:

$$A := \{\{\cos(\theta), -\sin(\theta), 0\}, \{\sin(\theta), \cos(\theta), 0\}, \{0, 0, 1\}\}$$

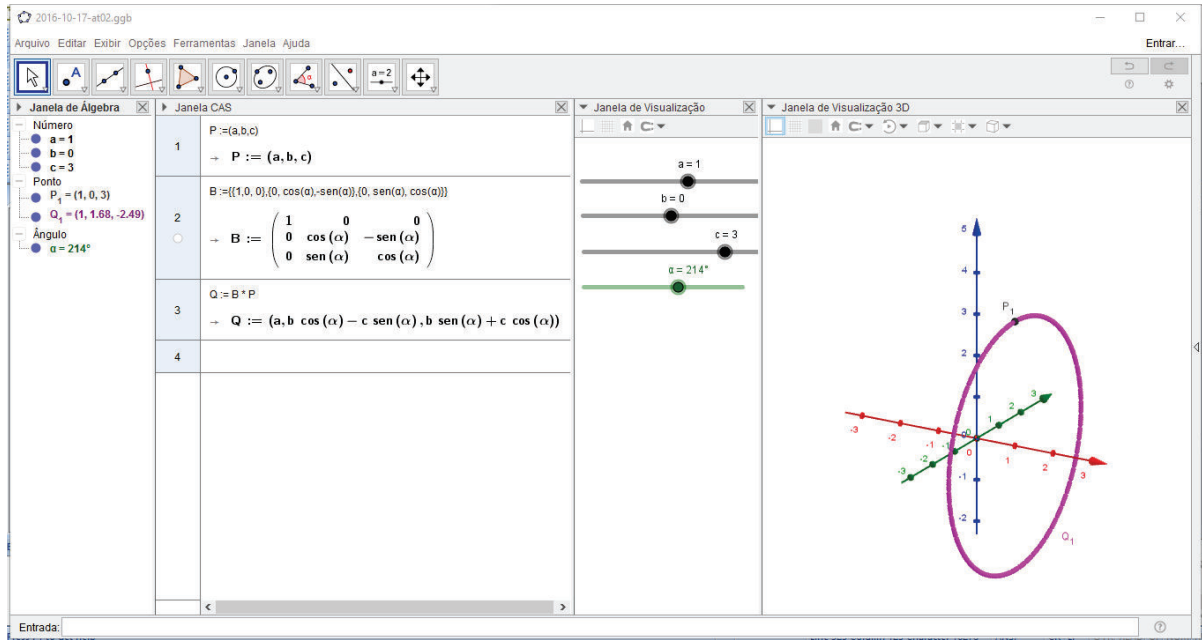


Figura 15: Rotação em torno de eixo x do ponto P_1 ao variar α de 0° a 360°

- (c) Inserir na *Janela CAS* o ponto Q obtido pela rotação do ponto P em torno do eixo z de um ângulo θ .

Digite:

$$Q := A * P,$$

- (d) Inserir a matriz de rotação em torno do eixo x de um ângulo α na *Janela CAS*.

Digite:

$$B := \{\{1, 0, 0\}, \{0, \cos(\alpha), -\sin(\alpha)\}, \{0, \sin(\alpha), \cos(\alpha)\}\}$$

- (e) Inserir na *Janela CAS* o ponto R obtido pela rotação do ponto Q em torno do eixo x de um ângulo α .

Digite:

$$R := B * Q,$$

Observe que o ponto R apresentado pelo programa é

$$R = (a \cos(\theta) - b \sin(\theta), \cos(\alpha)(a \sin(\theta) + b \cos(\theta)) - \sin(\alpha)c, \sin(\alpha)(a \sin(\theta) + b \cos(\theta)) + \cos(\alpha)c).$$

- (f) Inserir os valores 0, 3 e 0 para as coordenadas a , b e c do ponto P , respectivamente.
- (g) Inserir controles deslizantes para θ e α na *Janela de Visualização* e configurar θ para que os ângulos variem de 0° a 360° , com incrementos de 1° e variação crescente. e α para que varie de -45° a 45° , com incrementos de 1° e variação oscilando.

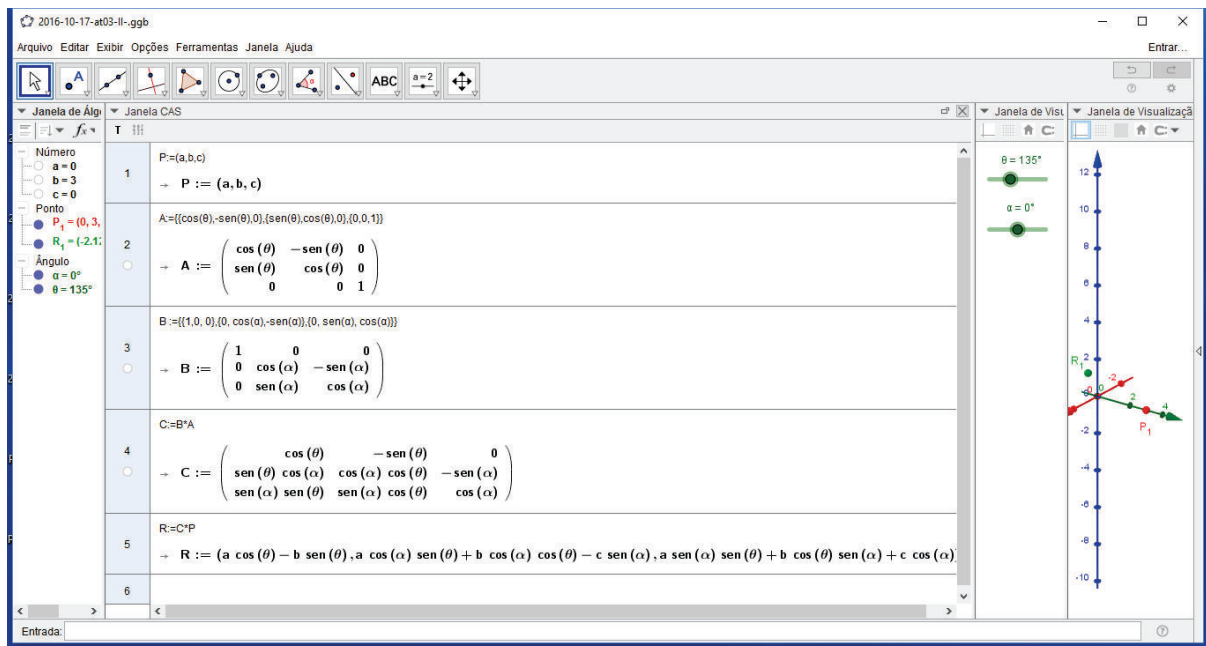


Figura 16: Rotação em torno do eixo z seguida da rotação em torno do eixo x

(h) Representar os pontos P , Q e R na *Janela de Visualização 3D*. (Veja a figura 16 da página 107.) Note que esses pontos são denotados por P_1 , Q_1 e R_1 na *Janela de Álgebra* e na *Janela de Visualização 3D*.

(i) Retirar a *Janela CAS* e *Janela de Visualização* da tela, deixando apenas a *Janela de Álgebra* e a *Janela de Visualização 3D*, como mostra a figura 17 na página 108.

Clique no \times que está localizado a direita na barra superior da *Janela CAS* para retirá-la da tela. Proceda de modo análogo na *Janela de Visualização*.

(j) Na *Janela de Álgebra* colocar $\theta = 135^\circ$ e $\alpha = 0^\circ$.

Dê dois cliques seguidos sobre o θ na *Janela de Álgebra* e altere o valor do ângulo para 135. É importante que o símbolo $^\circ$ de grau não seja retirado. Proceda de modo análogo com o ângulo α .

(k) Observar as modificações da figura na *Janela de Visualização 3D*.

(l) Desenhar o caminho do ponto R_1 ao variar o ângulo de rotação α , utilizando o recurso *Rastro* do GeoGebra.

4 Rotação em torno do eixo z seguida da rotação em torno do eixo x (II)

O objetivo desta atividade é rotacionar um ponto P em torno do eixo z de um ângulo θ seguido pela rotação em torno do eixo x de um ângulo α , como na atividade anterior. Mas,

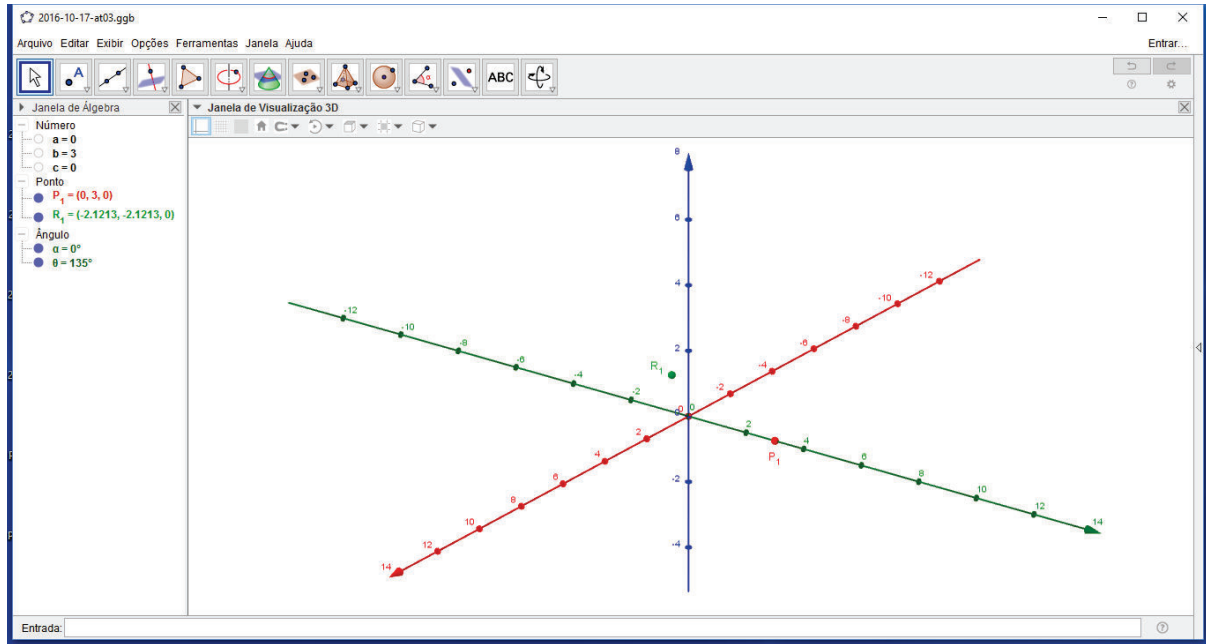


Figura 17: Rotação em torno do eixo z seguida da rotação em torno do eixo x

para isso utilizaremos a matriz da transformação composição das duas transformações de rotação.

- Inserir um ponto arbitrário $P = (a, b, c)$ na linha 1 da *Janela CAS*.
- Inserir a matriz de rotação em torno do eixo z de um ângulo θ na *Janela CAS*.

Aponte o cursor para o local editável da linha 2 da *Janela CAS*, clique e digite:

$$A := \{\{\cos(\theta), -\sin(\theta), 0\}, \{\sin(\theta), \cos(\theta), 0\}, \{0, 0, 1\}\}$$

- Inserir a matriz de rotação em torno do eixo x de um ângulo α na *Janela CAS*.

Digite:

$$B := \{\{1, 0, 0\}, \{0, \cos(\alpha), -\sin(\alpha)\}, \{0, \sin(\alpha), \cos(\alpha)\}\}$$

- Inserir na *Janela CAS* a matriz C da transformação composição das duas transformações de rotação, ou seja, em relação a θ seguida pela transformação de rotação em relação a α .

Digite:

$$C := B * A$$

- Inserir na *Janela CAS* o ponto R obtido pela transformação composição cuja matriz associada é C do ponto P .

Digite:

$$R := C * P,$$

Observe que o ponto R apresentado pelo programa é

$$R = (a \cos(\theta) - b \sin(\theta), \cos(\alpha)(a \sin(\theta) + b \cos(\theta)) - \sin(\alpha)c, \sin(\alpha)(a \sin(\theta) + b \cos(\theta)) + \cos(\alpha)c).$$

Compare as coordenadas de R obtidas nesta atividade e as obtidas na atividade anterior.

- (f) Inserir os valores 0, 3 e 0 para as coordenadas a , b e c do ponto P , respectivamente.
- (g) Inserir controles deslizantes para θ e α na *Janela de Visualização* e configurar θ para que os ângulos variem de 0° a 360° , com incrementos de 1° e variação crescente. e α para que varie de -45° a 45° , com incrementos de 1° e variação oscilando.
- (h) Representar os pontos P e R na *Janela de Visualização 3D*. (Veja a figura 18 da página 109.) Note que esses pontos são denotados por P_1 e R_1 na *Janela de Álgebra* e na *Janela de Visualização 3D*.

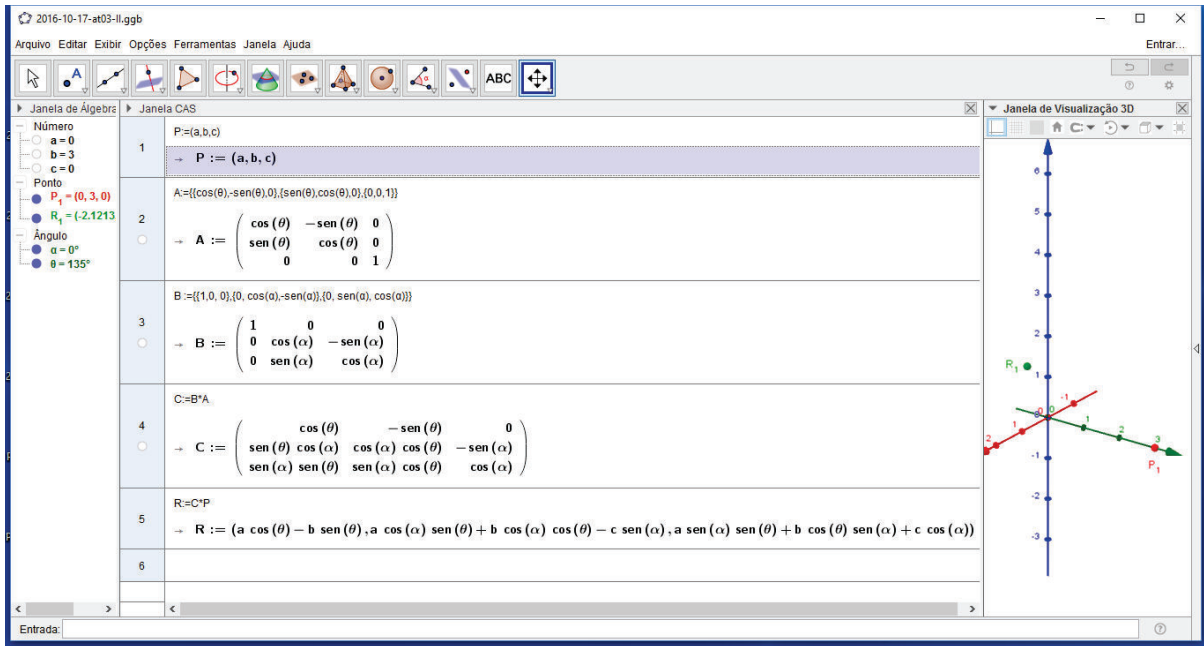


Figura 18: Rotação em torno do eixo z seguida da rotação em torno do eixo x

- (i) Retirar a *Janela CAS* e *Janela de Visualização* da tela, deixando apenas a *Janela de Álgebra* e a *Janela de Visualização 3D*, como mostra a figura 17 na página 108.

Clique no \times que está localizado a direita na barra superior da *Janela CAS* para retirá-la da tela. Proceda de modo análogo na *Janela de Visualização*.

- (j) Na *Janela de Álgebra* colocar $\theta = 135^\circ$ e $\alpha = 0^\circ$.

Dê dois cliques seguidos sobre o θ na *Janela de Álgebra* e altere o valor do ângulo para 135. É importante que o símbolo $^\circ$ de grau não seja retirado. Proceda de modo análogo com o ângulo α .

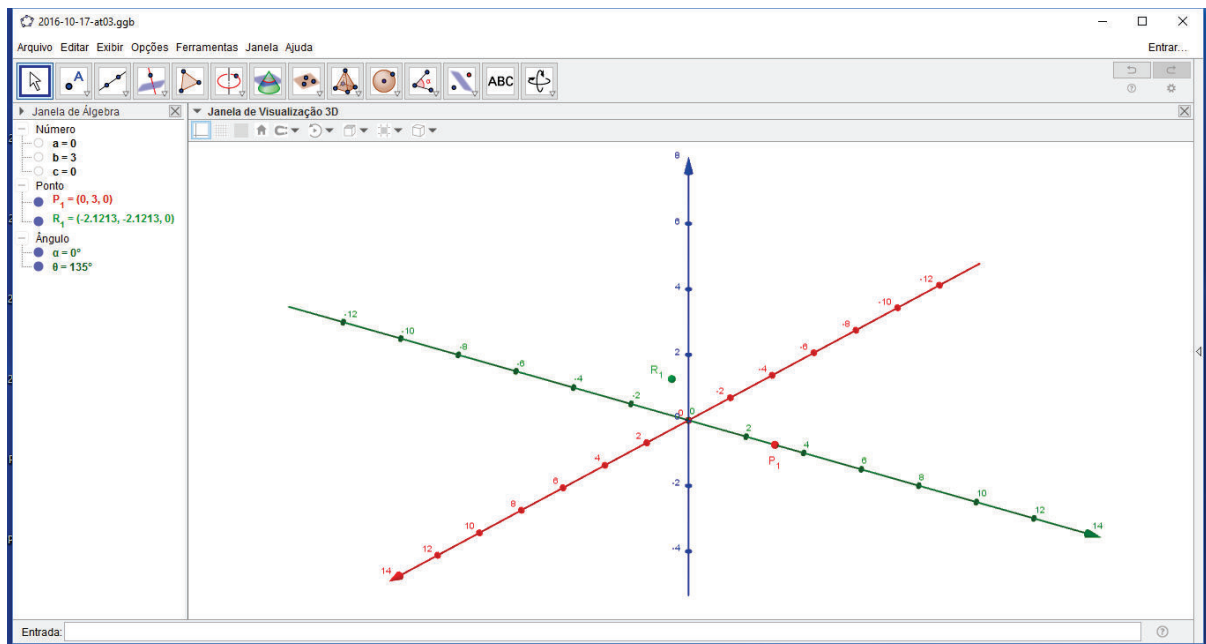


Figura 19: Rotação em torno do eixo z seguida da rotação em torno do eixo x

- (k) Observar as modificações da figura na *Janela de Visualização 3D*.
- (l) Desenhar o caminho do ponto R_1 ao variar o ângulo de rotação α , utilizando o recurso *Rastro* do *GeoGebra*.

5 Rotação em torno do eixo z seguida da rotação em torno do eixo x e translação na direção e sentido do eixo z positivo

O objetivo desta atividade é rotacionar um ponto P em torno do eixo z de um ângulo θ seguido pela rotação em torno do eixo x de um ângulo α , como na atividade anterior, e, finalmente, transladar de 6 unidades na direção do eixo z no sentido positivo.

- (a) Realizar os itens de (a) até (e) da atividade 4.
- (b) Inserir na *Janela CAS* o ponto Q obtido pela translação de 6 unidades do ponto R na direção e sentido positivo do eixo z . (Veja a figura 20 da página 111.)

Digite:

$$Q := R + (0, 0, 6)$$

- (c) Inserir os valores 0, 3 e 0 para as coordenadas a , b e c do ponto P , respectivamente.

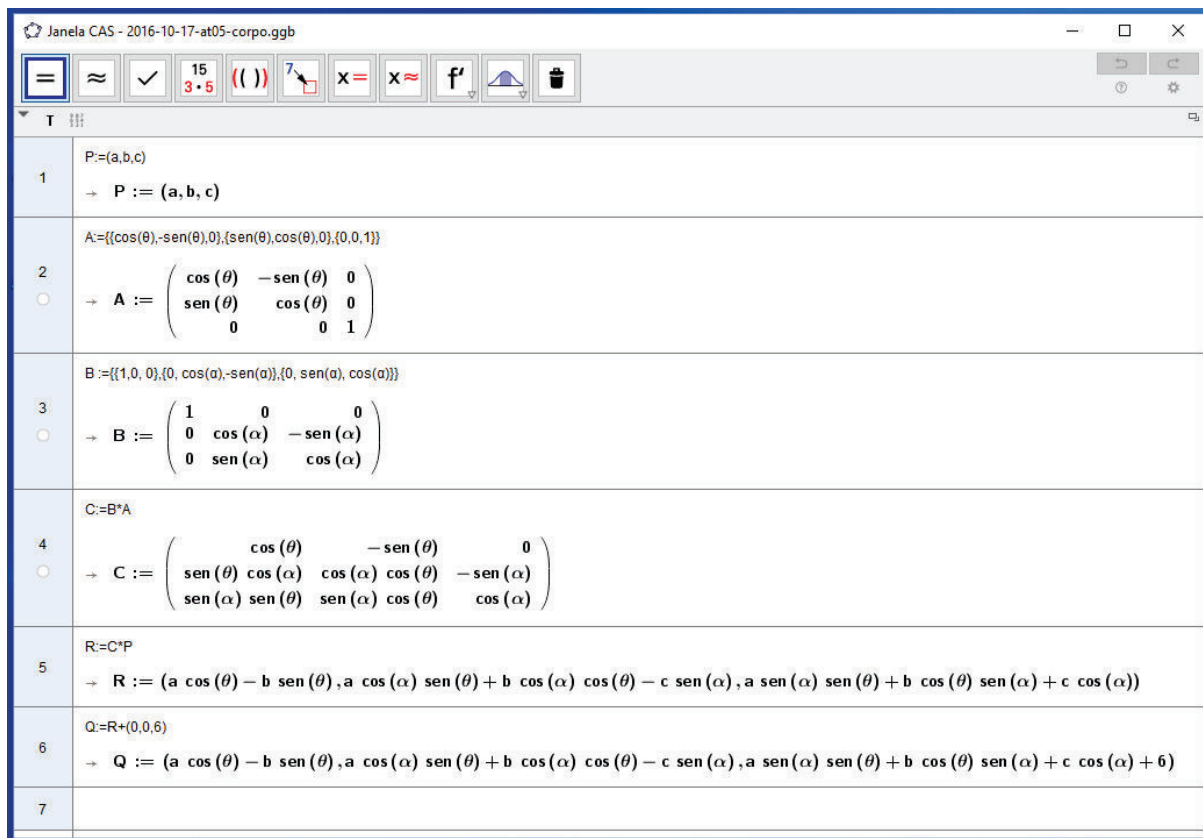


Figura 20: Composição das rotações em torno do eixo z e do eixo x seguida pela translação na direção do eixo z

- Inserir controles deslizantes para θ e α na *Janela de Visualização* e configurar θ para que os ângulos variem de 0° a 360° , com incrementos de 1° e variação crescente. e α para que varie de -45° a 45° , com incrementos de 1° e variação oscilando.
- Representar o ponto Q na *Janela de Visualização 3D*. (Veja a figura 21 da página 112.) Note que esse ponto é denotado por Q_1 na *Janela de Álgebra* e na *Janela de Visualização 3D*.
- Traçar o rastro do ponto Q_1 quando o ângulo θ varia de 0° a 360° . Descrever o movimento de Q_1 . (ver figura 22 da página 112)
- Apagar o rastro do ponto Q_1 .
- Traçar o rastro do ponto Q_1 quando o ângulo α varia de -45° a 45° . Descrever o movimento de Q_1 . (ver figura 23 da página 113)
- Apagar o rastro do ponto Q_1 .
- Animar os ângulos θ e α simultaneamente, *sem* solicitar o rastro do ponto Q_1 . Descrever o movimento de Q_1 .

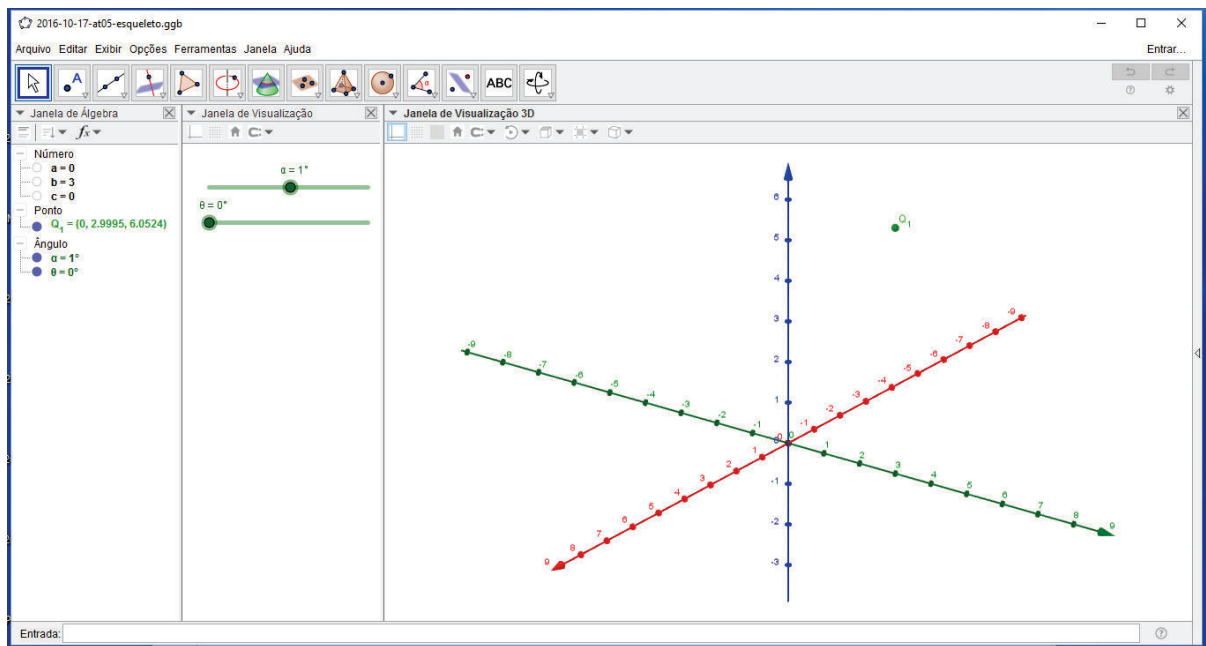


Figura 21: Rotação em torno do eixo z seguida da rotação em torno do eixo x e translação na direção do eixo z

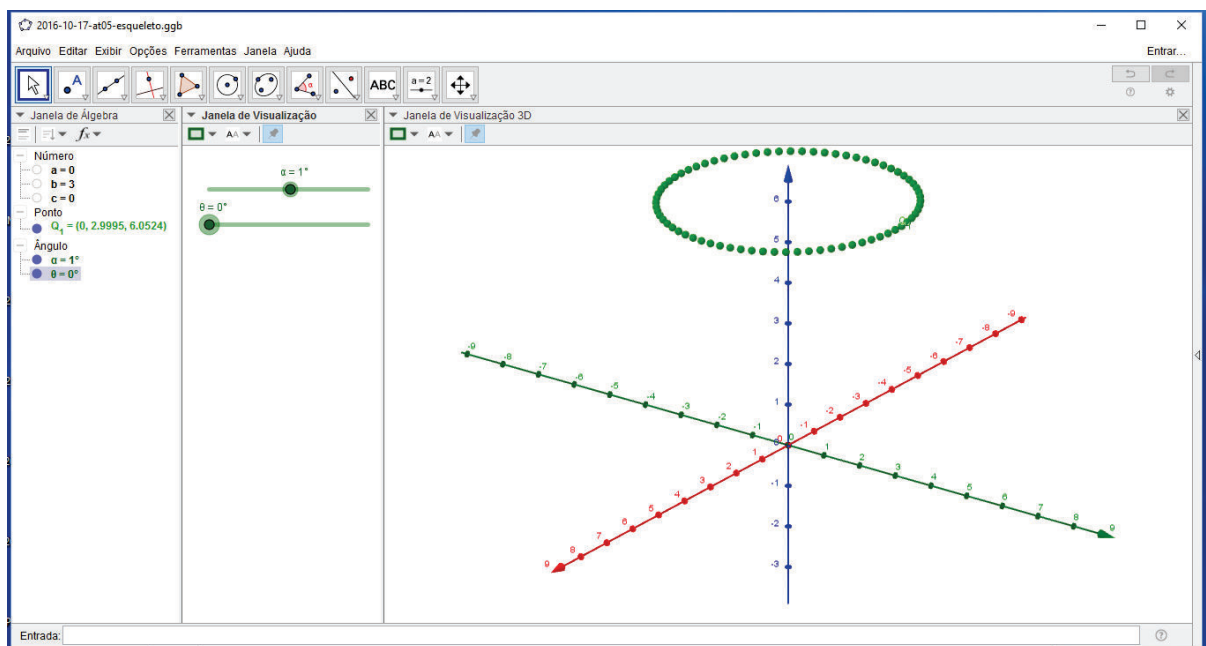


Figura 22: Rotação do ponto Q_1 em torno do eixo z

6 Desenhando um braço robótico - animação

O objetivo desta atividade é desenhar uma figura representando um braço robótico e animá-la utilizando a característica dinâmica do *GeoGebra*.

(a) Realizar os itens de (a) até (e) da atividade 5.

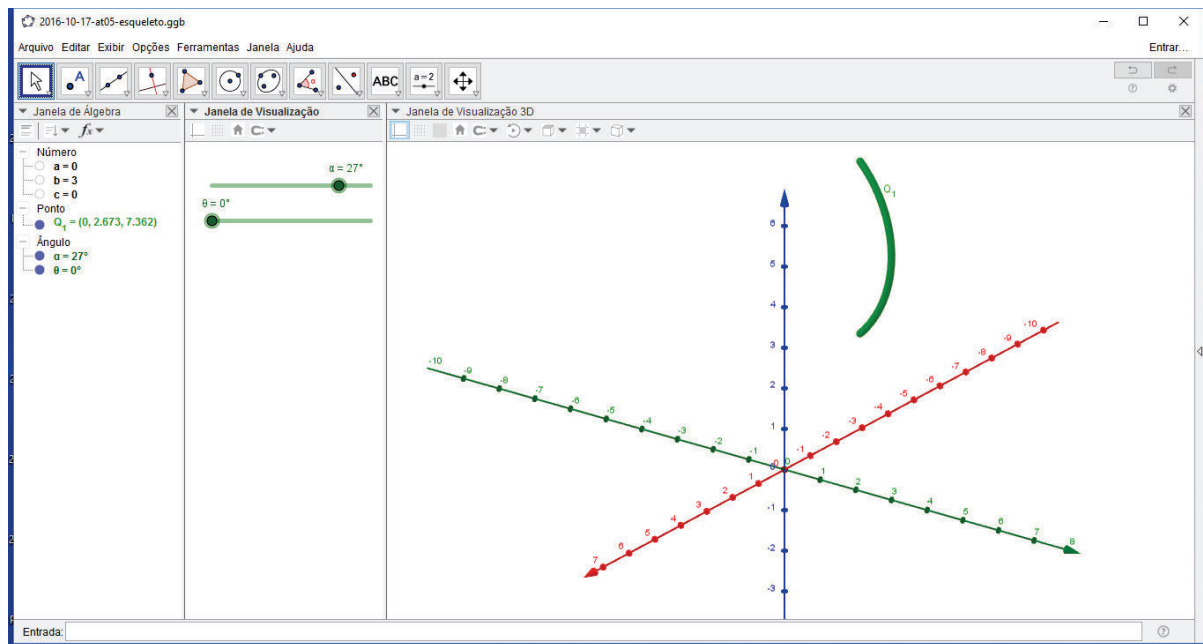


Figura 23: Rotação do ponto Q_1 em torno da reta paralela ao eixo x passando pelo ponto $(0, 0, 6)$

- (b) Desenhar a superfície cilíndrica de eixo o segmento de extremidades os pontos $(0, 0, 0)$ e $(0, 0, 0.6)$ e raio 2.

No *Campo de Entrada*, digite

$$\text{Cilindro}[(0, 0, 0), (0, 0, 0.6), 2]$$

e pressione *Enter*.

- (c) Desenhar a superfície cilíndrica de eixo o segmento de extremidades os pontos $(0, 0, 0.6)$ e $(0, 0, 7)$ e raio 0.4.

No *Campo de Entrada*, digite

$$\text{Cilindro}[(0, 0, 0.6), (0, 0, 7), 0.4]$$

e pressione *Enter*.

- (d) Desenhar a superfície cilíndrica de eixo o segmento de extremidades os pontos $(0, 0, 6)$ e Q_1 e raio 0.3.

No *Campo de Entrada*, digite

$$\text{Cilindro}[(0, 0, 6), Q_1, 0.3]$$

e pressione *Enter*.

- (e) Desenhar a esfera de centro no ponto $(0, 0, 7)$ e raio 0.4.

No *Campo de Entrada*, digite

$$\text{Esfera}[(0, 0, 7), 0.4]$$

e pressione *Enter*.

- (f) Desenhar a esfera de centro no ponto Q_1 e raio 0.3. (ver figura 24 da página 114)

No *Campo de Entrada*, digite

$$\text{Esfera}[Q_1, 0.3]$$

e pressione *Enter*.

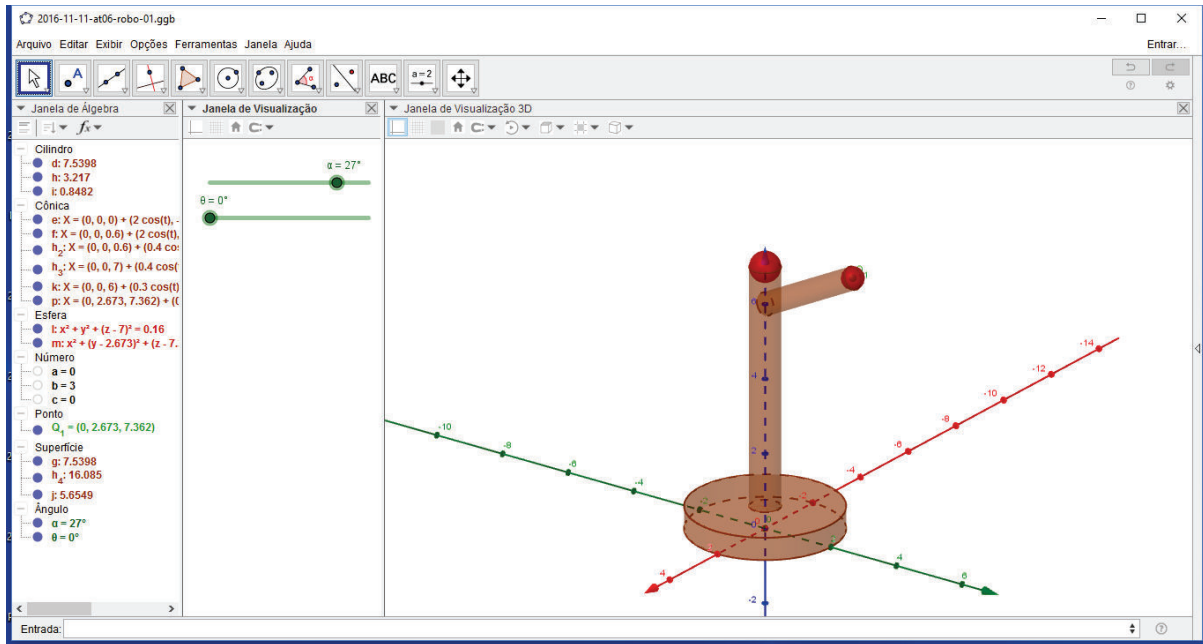


Figura 24: Desenho de um braço robótico estilizado

- (g) Esconder os eixos coordenados.

Aponte o cursor para um local qualquer da *Janela de Visualização 3D* que não tenha algo desenhado, pressione o botão direito do mouse e desmarque a opção *Eixos* no menu que se abre.

- (h) Esconder o ponto Q_1

Na *Janela de Álgebra*, aponte o cursor para o pequeno círculo localizado na frente das coordenadas do ponto Q_1 para escondê-lo.

- (i) Alterar a cor do cilindro da base da figura.

Aponte o cursor para cilindro da base da figura, pressione o botão direito do mouse e selecione a opção *Propriedades* no menu que se abre. Na caixa de diálogo *Preferências* que se apresenta na tela, selecione a opção *Cor* e altere a cor para uma cor de sua escolha. Configure a transparência para 100. Finalmente feche esta caixa clicando no pequeno \times localizado no seu canto superior direito. (ver figura 25 da página 115)

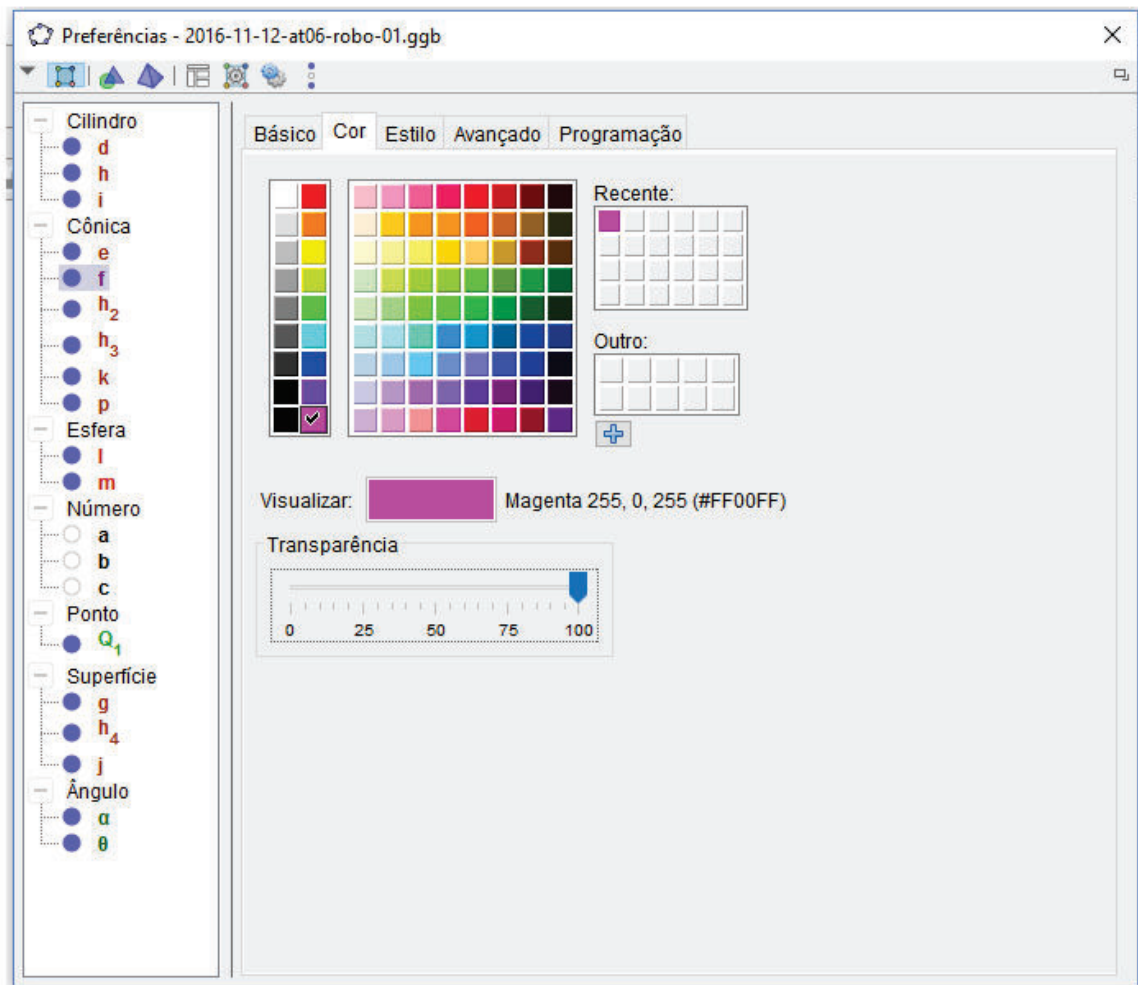


Figura 25: Preferências

(j) Alterar a cor das outras figuras, ou sejam, os outros dois cilindros e as duas esferas.

Proceda de modo análogo ao item anterior. (ver figura 26 da página 116)

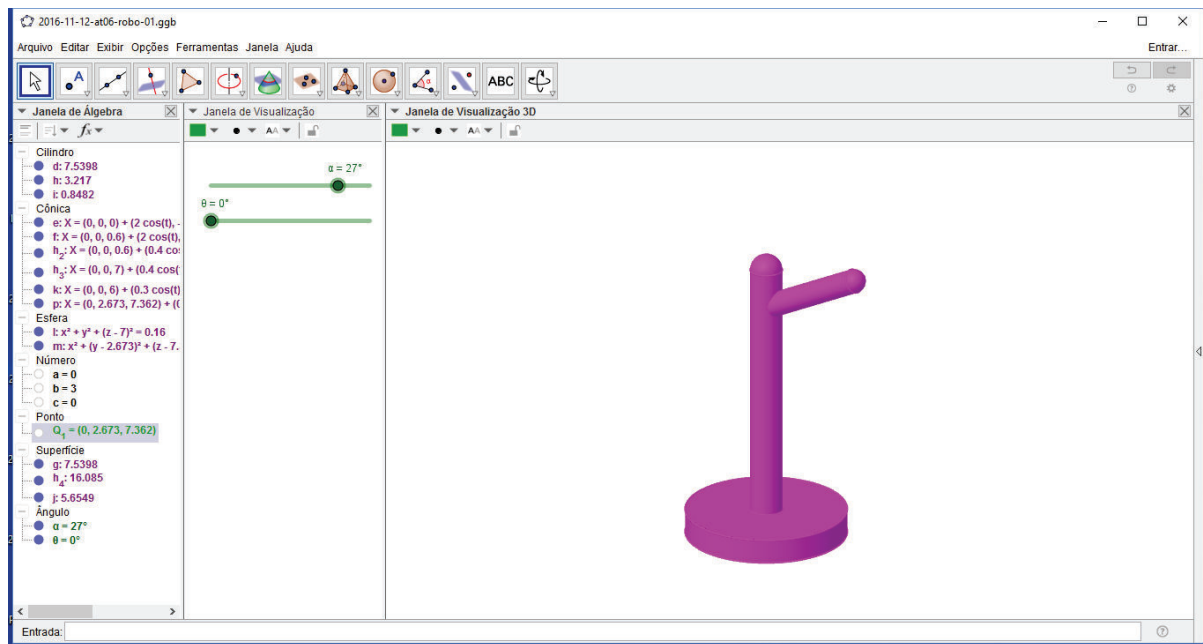


Figura 26: Desenho de um braço robótico estilizado

- (k) Animar os cursores dos ângulos θ e α e observar o comportamento da figura construída.

Construção 2

Nesta construção utilizaremos a *Janela de Visualização 3D*, além da *Janela de Álgebra* e a *Janela de Visualização*, que aparecem automaticamente ao abrir o programa. Assim, ao abrir o programa, é preciso solicitar que a *Janela 3D* seja exibida na tela. Para isso, em *Exibir* selecione a opção *Janela de Visualização 3D*.

Atividade: Construção de uma simulação de um braço robótico

- (a) Inserir o ponto $P = (0, 3, 0)$.

Clique no *Campo de Entrada*, que está localizado abaixo da *Janela de Visualização* e de *álgebra*, digite

$$P = (0, 3, 0)$$

e pressione *Enter*.

- (b) Inserir controle deslizante para θ na *Janela de Visualização* e configurá-lo para que o ângulo varie de 0° a 360° com incrementos de 1° e variação crescente.

Clique no *Campo de Entrada*, digite $\theta = 1^\circ$ e pressione *Enter*. A letra θ pode ser obtida clicando sobre a letra α localizada à direita no *Campo de Entrada* e selecionando a letra θ no menu que se abre. Neste menu também pode ser obtido o símbolo $^\circ$ de grau. Na *Janela de Álgebra*, aponte o cursor para $\theta = 1^\circ$, pressione o botão direito do mouse e selecione *Exibir Objeto* no menu que se abre. Aparecerá na *Janela de Visualização* um controle deslizante correspondente ao θ . Aponte novamente o cursor novamente para $\theta = 1^\circ$, pressione o botão direito do mouse e selecione *Propriedades*. Aparecerá uma caixa de diálogo. Em *Básico* selecione em *Exibir Rótulo* a opção *Nome & Valor*. Em *Controle Deslizante*, verifique se a variação do ângulo está entre 0° e 360° e em *Incremento* coloque 1° . Além disso, selecione em *Repetir* a opção *Crescente*. (ver figura 27 da página 118) Depois, clique no \times no topo à direita da caixa de diálogo para fechá-la.

- (c) Inserir controle deslizante para α na *Janela de Visualização* e configurá-lo para que o ângulo varie de -45° a 45° , com incrementos de 1° e variação oscilando. (ver figuras 28 e 29 nas páginas 118 e 119.)

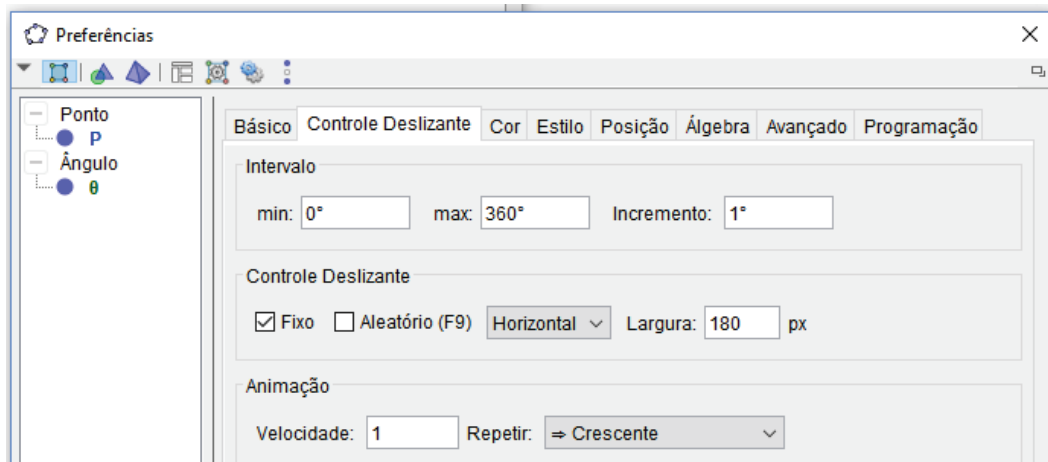


Figura 27: Configurando o *Controle Deslizante* para θ : características do controle

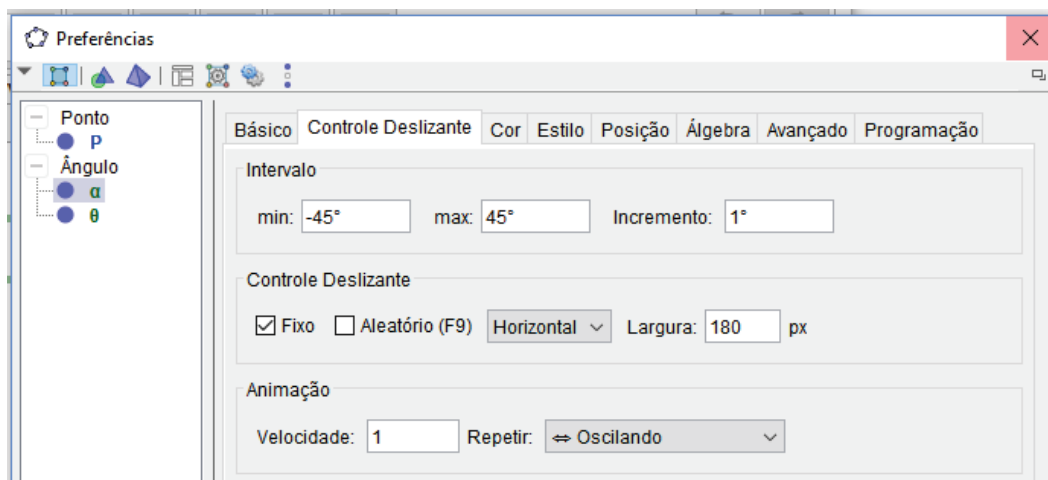


Figura 28: Configurando o controle deslizante de α

- (d) Inserir a matriz A de rotação em torno do eixo z de um ângulo θ na *Janela de Álgebra*.

No *Campo de Entrada*, digite:

$$A = \{\{\cos(\theta), -\sin(\theta), 0\}, \{\sin(\theta), \cos(\theta), 0\}, \{0, 0, 1\}\}$$

e pressione *Enter*.

- (e) Inserir a matriz B de rotação em torno do eixo x de um ângulo α na *Janela de Álgebra*.

No *Campo de Entrada*, digite:

$$B = \{\{1, 0, 0\}, \{0, \cos(\alpha), -\sin(\alpha)\}, \{0, \sin(\alpha), \cos(\alpha)\}\}$$

e pressione *Enter*. (ver figura 30 na página 120.)

- (f) Movimentar os cursores de θ e α deixando-os em valores distintos de 1° . Colocar, por exemplo, $\theta = 52^\circ$ e $\alpha = 17^\circ$. Isto facilitará a visualização dos pontos, que serão construídos a seguir, na *Janela de Visualização 3D*.

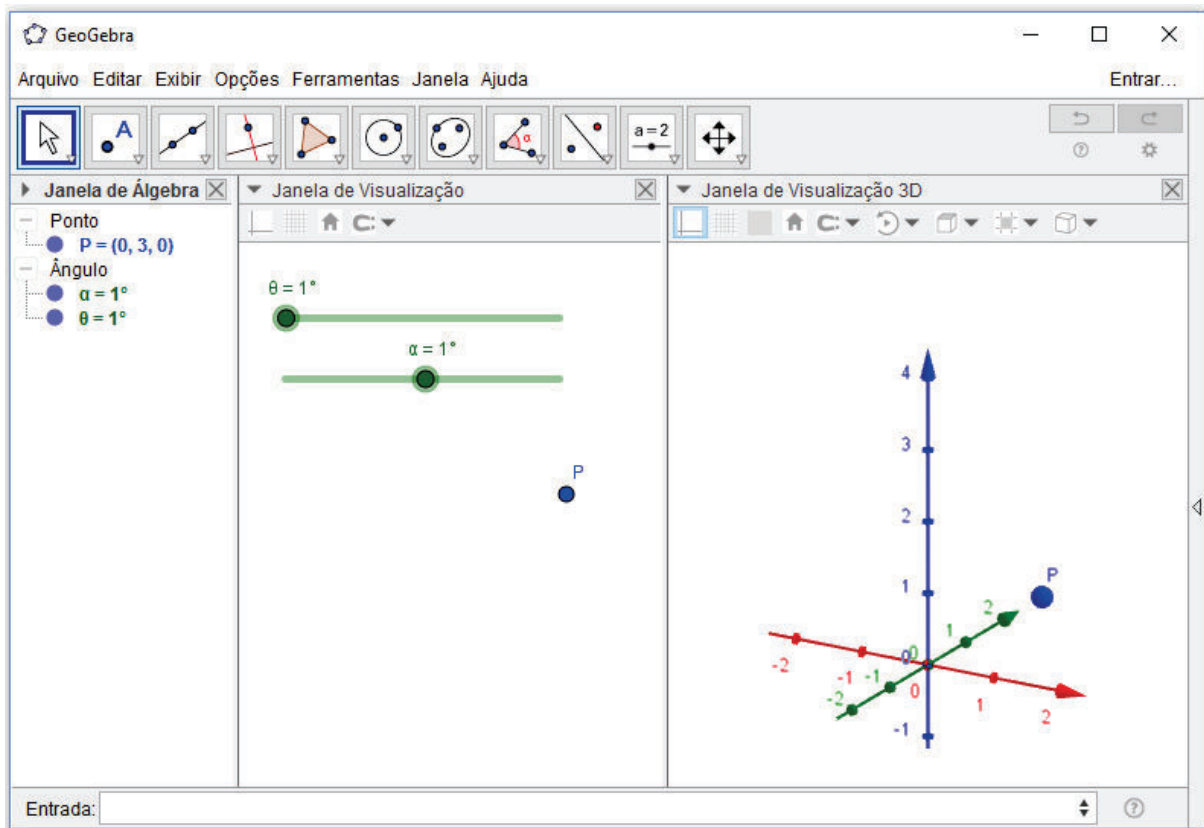


Figura 29: Elementos na interface gráfica

- (g) Inserir na *Janela de Álgebra* e na *Janela de Visualização 3D* o ponto Q obtido pela rotação do ponto P em torno do eixo z de um ângulo θ .

No *Campo de Entrada*, digite:

$$Q = A * P$$

e pressione *Enter*.

- (h) Inserir na *Janela de Álgebra* e na *Janela de Visualização 3D* o ponto R obtido pela rotação do ponto Q em torno do eixo x de um ângulo α .

No *Campo de Entrada*, digite:

$$R = B * Q$$

e pressione *Enter*.

- (i) Inserir na *Janela de Álgebra* e na *Janela de Visualização 3D* o ponto T obtido pela translação de 6 unidades do ponto R na direção do eixo z e sentido positivo.

No *Campo de Entrada*, digite:

$$T = R + (0, 0, 6)$$

e pressione *Enter*. (Veja a figura 31 na página 121.)

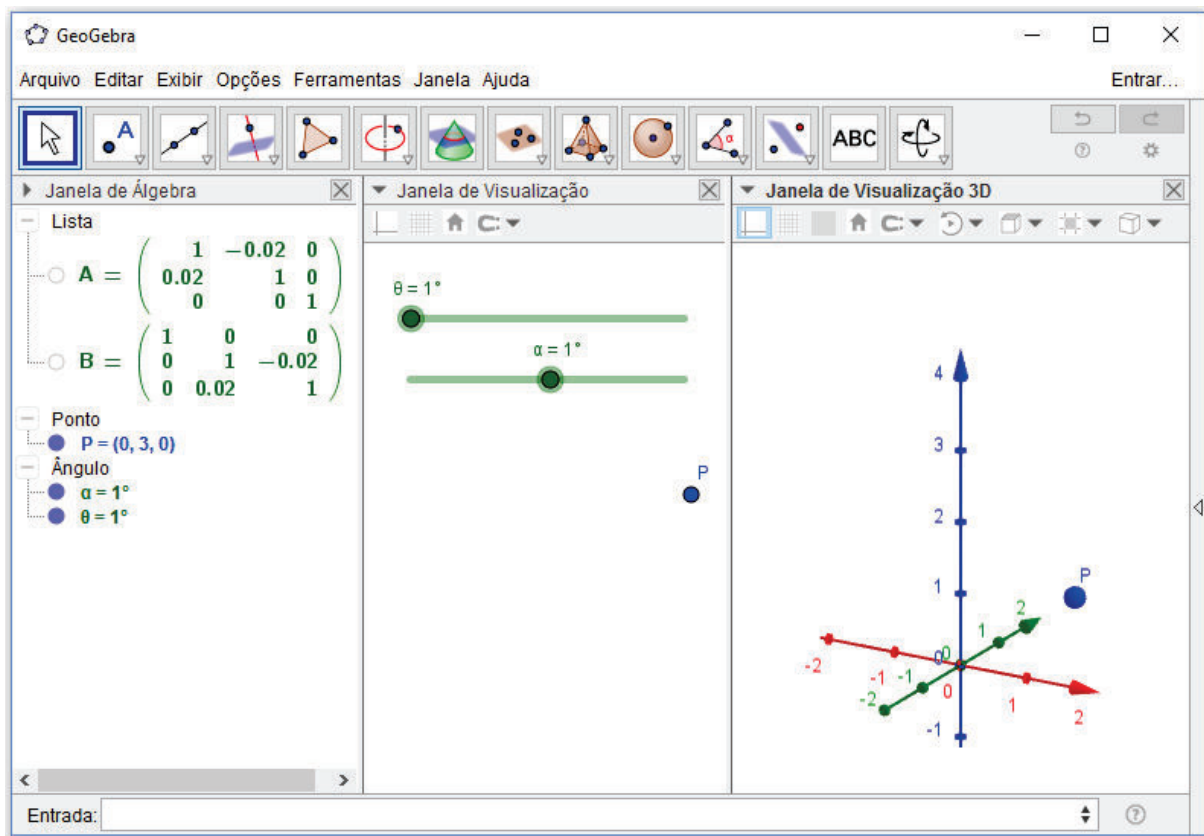


Figura 30: Elementos na interface gráfica

- (j) Desenhar a superfície cilíndrica de eixo o segmento de extremidades os pontos $(0, 0, 0)$ e $(0, 0, 0.6)$ e raio 2.

No *Campo de Entrada*, digite

$$\text{Cilindro}[(0, 0, 0), (0, 0, 0.6), 2]$$

e pressione *Enter*.

- (k) Desenhar a superfície cilíndrica de eixo o segmento de extremidades os pontos $(0, 0, 0.6)$ e $(0, 0, 7)$ e raio 0.4.

No *Campo de Entrada*, digite

$$\text{Cilindro}[(0, 0, 0.6), (0, 0, 7), 0.4]$$

e pressione *Enter*.

- (l) Desenhar a superfície cilíndrica de eixo o segmento de extremidades os pontos $(0, 0, 6)$ e T e raio 0.3.

No *Campo de Entrada*, digite

$$\text{Cilindro}[(0, 0, 6), T, 0.3]$$

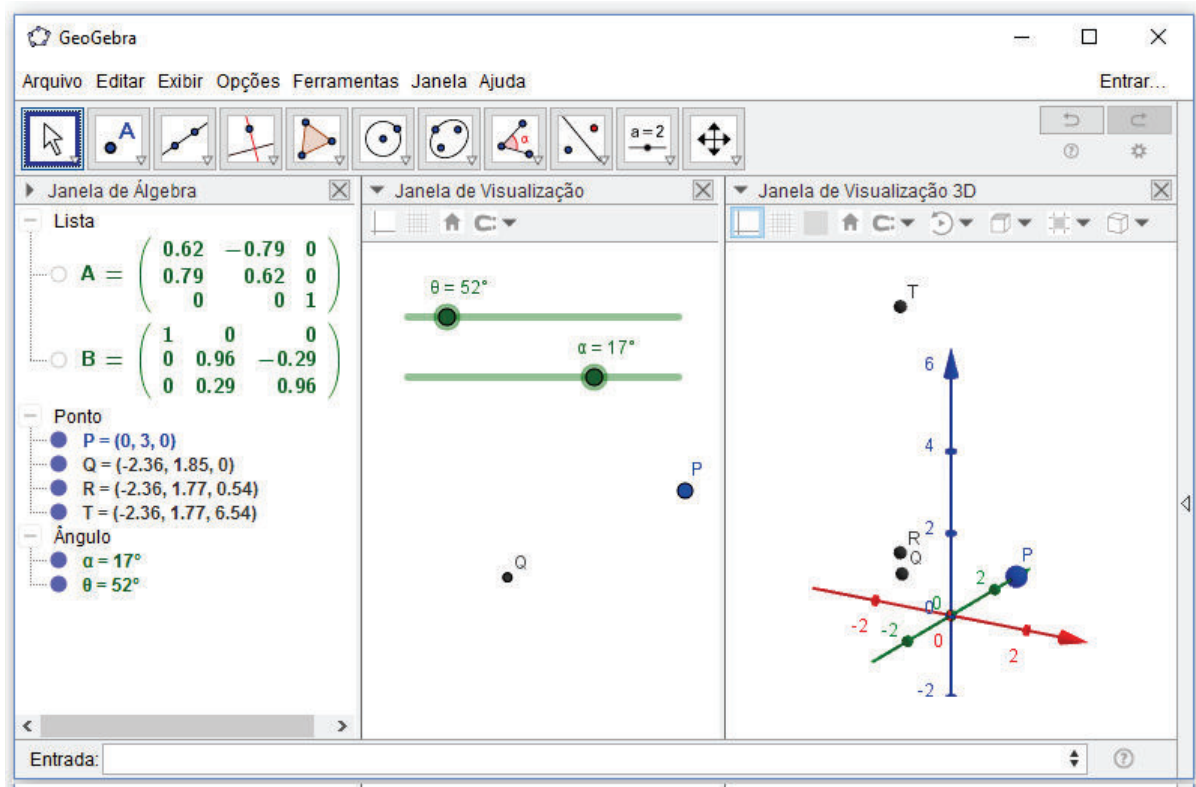


Figura 31: Rotações e translação do ponto P

e pressione *Enter*.

- (m) Desenhar a esfera de centro no ponto $(0, 0, 7)$ e raio 0.4.

No *Campo de Entrada*, digite

$$\text{Esfera}[(0, 0, 7), 0.4]$$

e pressione *Enter*.

- (n) Desenhar a esfera de centro no ponto T e raio 0.3. (ver figura 32 da página 122)

No *Campo de Entrada*, digite

$$\text{Esfera}[T, 0.3]$$

e pressione *Enter*.

- (o) Esconder os eixos coordenados.

Aponte o cursor para um local qualquer da *Janela de Visualização 3D* que não tenha algo desenhado, pressione o botão direito do mouse e desmarque a opção *Eixos* no menu que se abre.

- (p) Esconder os pontos P , Q , R e T

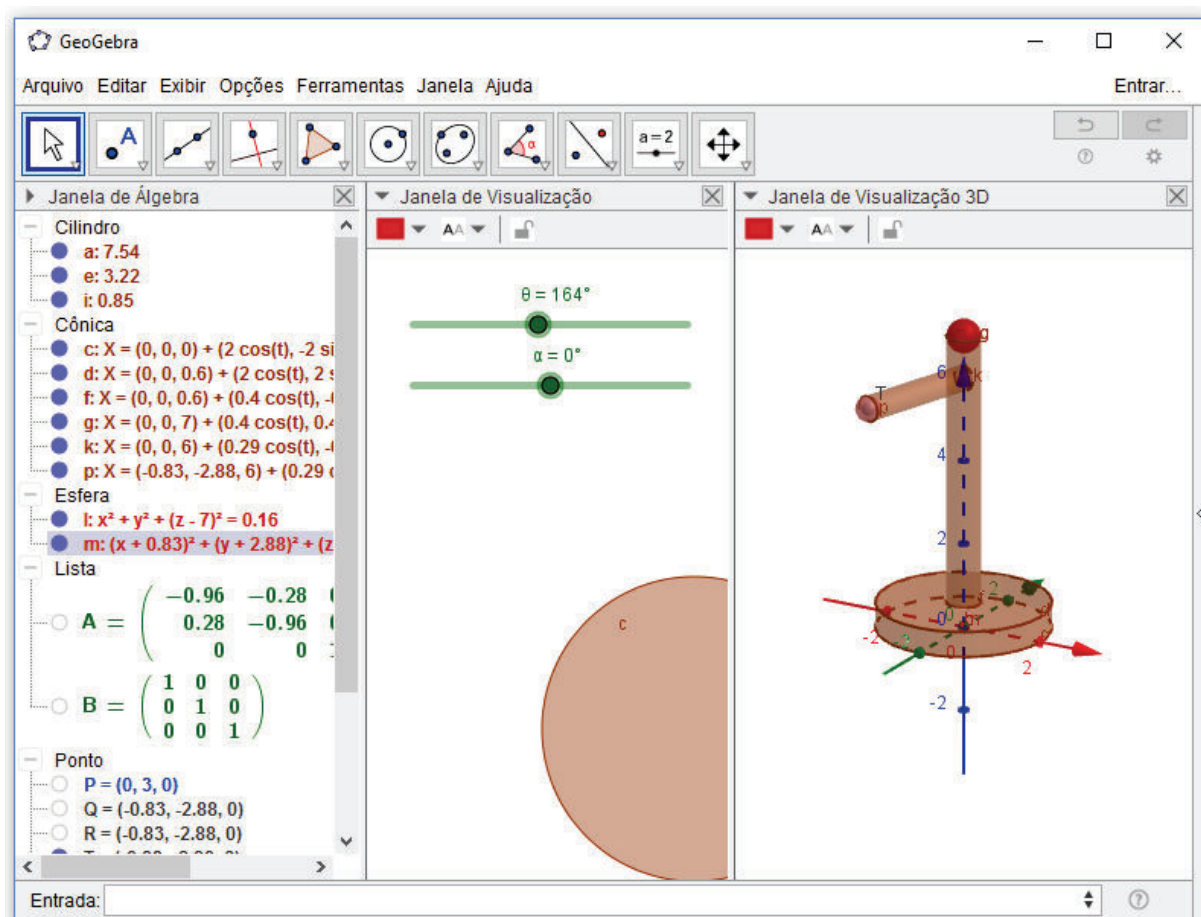


Figura 32: Desenho de um braço robótico estilizado

Na *Janela de Álgebra*, aponte o cursor para o pequeno círculo localizado na frente das coordenadas do ponto P para escondê-lo. Proceder de forma análoga com os demais pontos.

- (q) Alterar a cor dos cilindros da figura e esconder os seus rótulos.

Na *Janela de Álgebra*, selecione a lista dos cilindros, pressione o botão direito do mouse e escolha a opção *Propriedades* no menu que se abre. Na caixa de diálogo *Preferências* que se apresenta na tela, selecione a opção *Cor* e altere a cor para uma cor de sua escolha. Configure a transparência para 100. (ver figura 33 da página 123). A seguir, em *Básico*, nesta caixa de diálogo, desmarque a opção *Rótulo*. Finalmente feche esta caixa clicando no pequeno \times localizado no seu canto superior direito.

- (r) Alterar a cor das duas esferas e esconder os seus rótulos.

Proceda de modo análogo ao item anterior. (ver figura 34 da página 123)

- (s) Animar os cursores dos ângulos θ e α e observar o comportamento da figura construída.

Na *Janela de Álgebra*, selecione os ângulos, pressione o botão direito do mouse e escolha a opção *Animar* no menu que se abre.

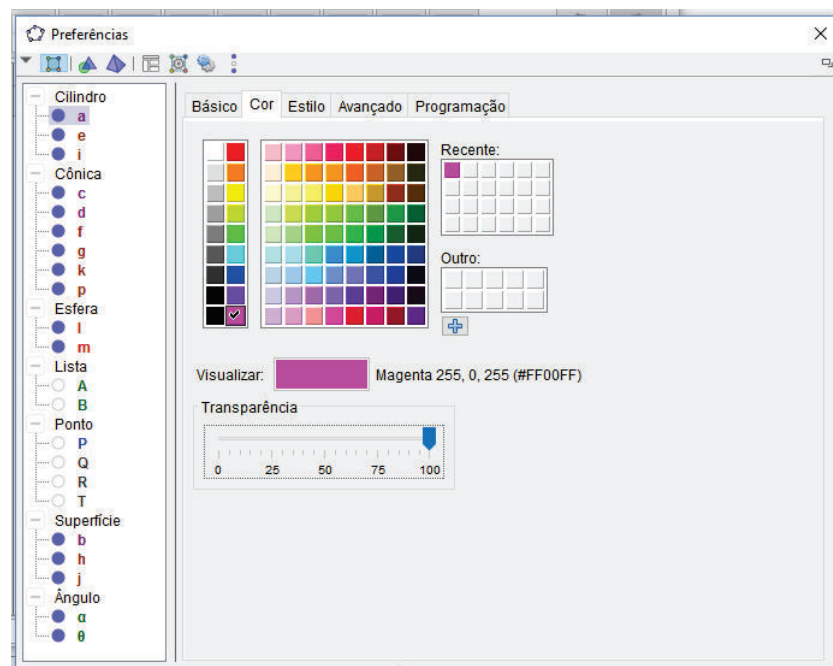


Figura 33: Preferências

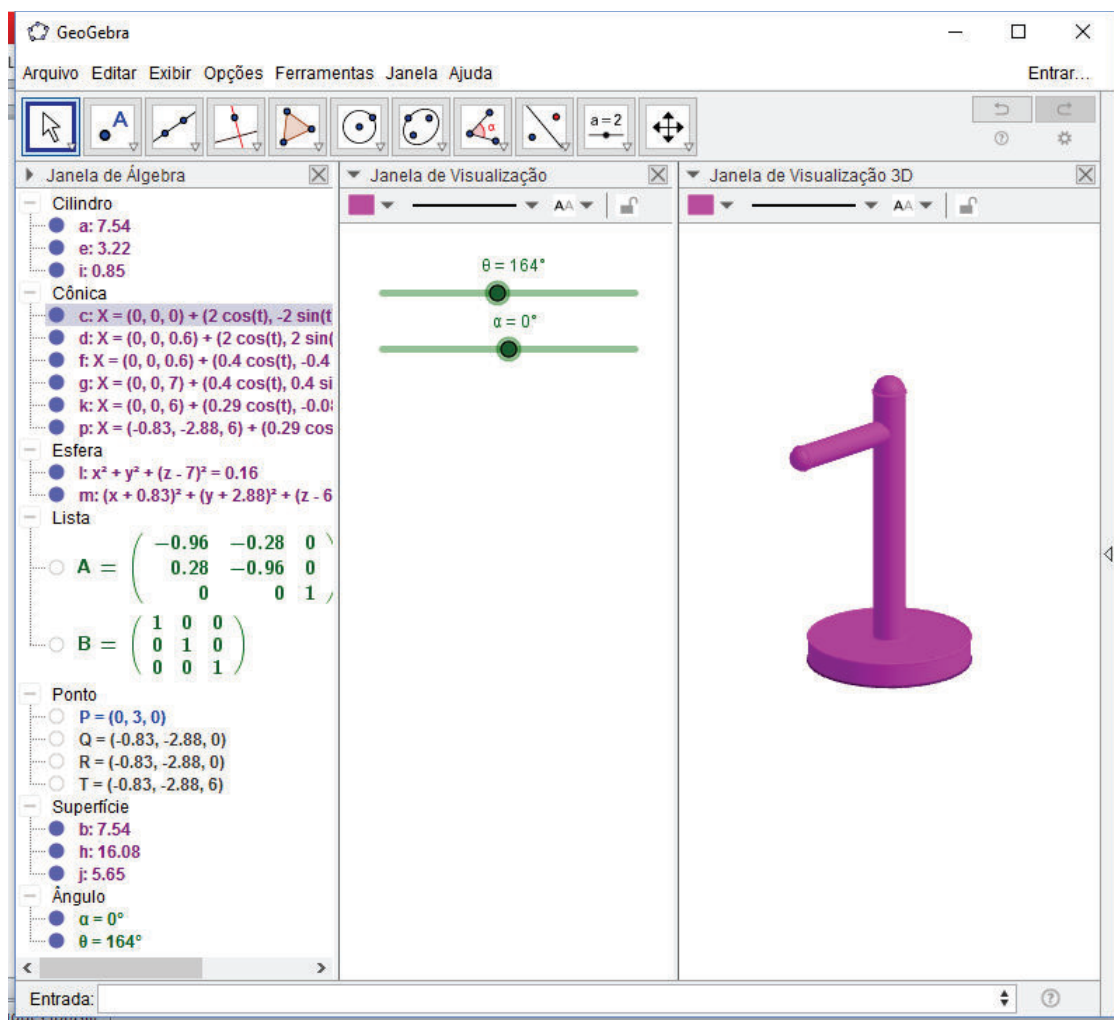


Figura 34: Desenho de um braço robótico estilizado

Apêndice

Seno e cosseno da soma de ângulos

Para os ângulos α e β valem as fórmulas:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha \cos\beta + \text{sen}\beta \cos\alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\alpha \text{sen}\beta.$$

Apresentaremos uma prova geométrica para a fórmula do seno da soma dos ângulos α e β para o caso particular em que α , β e $\alpha + \beta$ são ângulos entre 0° e 90° .

Sejam $\alpha = \widehat{BAC}$ e $\beta = \widehat{CAD}$, como mostra a figura 35 da página 124. Consideremos os pontos:

- E : interseção da perpendicular ao segmento AB passando por D
- F : interseção da perpendicular ao segmento AC passando por D
- G : interseção da perpendicular ao segmento AB passando por F
- H : interseção da perpendicular ao segmento DE passando por F
- I : interseção dos segmentos AC e DE

Note que o ângulo IDF também é igual a α , pois nos triângulos retângulos IAE e IDF os ângulos em I são congruentes já que são opostos pelo vértice. Assim, lembrando-se de que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a 180° , concluímos que $\widehat{IDF} = \alpha$.

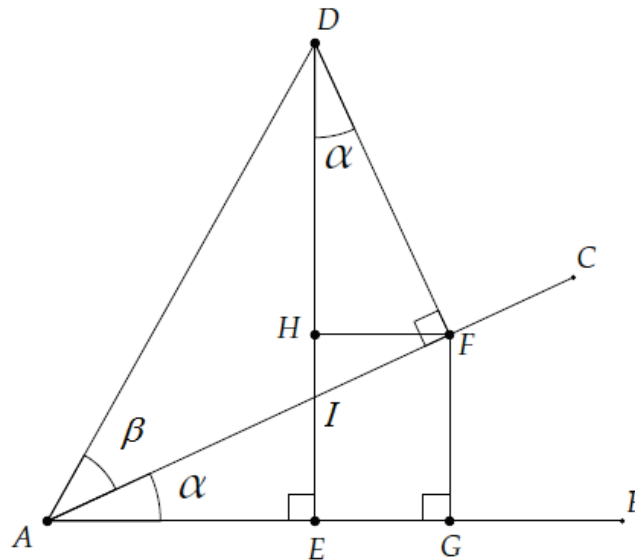


Figura 35: Seno da soma de ângulos

No triângulo AED retângulo em E temos $\text{sen}(\alpha + \beta) = \frac{ED}{DA}$. Além disso, vemos que

$ED = GF + HD$. Assim,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \frac{GF + HD}{DA} \\ &= \frac{GF}{DA} + \frac{HD}{DA} \\ &= \frac{GF}{AF} \frac{AF}{DA} + \frac{HD}{FD} \frac{FD}{DA} \end{aligned} \quad (1)$$

Agora, considerando os triângulos retângulos AGF , AFD , DHF , temos $\frac{GF}{AF} = \operatorname{sen}(\alpha)$, $\frac{AF}{DA} = \cos(\beta)$, $\frac{HD}{FD} = \cos(\alpha)$ e $\frac{FD}{DA} = \operatorname{sen}(\beta)$.

Portanto, substituindo em (1),

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$

A justificativa geométrica para a fórmula do cosseno da soma, também no caso particular em que os ângulos são menores do que o ângulo reto, pode ser feita de modo análogo ao seno da soma.

Referências

- [1] Petronio Pulino, Claudina Izepe Rodrigues. *Transformações Geométricas: aplicação nos movimentos de braços robóticos*. Ciência & Arte nas Férias, de 04 de janeiro a 03 de fevereiro de 2017. Universidade Estadual de Campinas, Campinas - SP, 60 pp., (2017).
- [2] Judith Hohenwarter. *GeoGebra Quickstart - Evolution of interactive Tutorials*. Disponível em <https://www.geogebra.org/m/j6CyXckZ#>, (Acessado em 17/10/2016).
- [3] GeoGebra Docu Team. *GeoGebra Geometry Quickstart*. Disponível em <https://www.geogebra.org/m/JV45hyEh#>, (Acessado em 17/10/2016).
- [4] GeoGebra Docu Team. *GeoGebra 3D Geometry Quickstart*. Disponível em <https://www.geogebra.org/m/FN8Dev7T#>, (Acessado em 17/10/2016).
- [5] GeoGebra Docu Team. *GeoGebra CAS Quickstart*. Disponível em <https://www.geogebra.org/m/ogeMbIiF#>, (Acessado em 17/10/2016).