O RELÓGIO CICLOIDAL DE HUYGENS

Eduardo Sebastiani Ferreira
esebastiani@uol.com.br

LEM-IMECC-UNICAMP

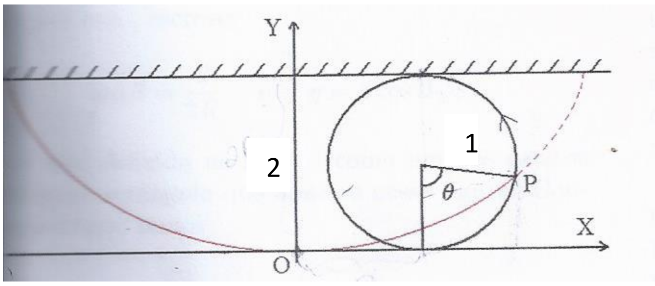
Antes de estudarmos o relógio de Huygens, uma das suas mais importantes invenções, vejamos algumas propriedades da curva Cicloide, que levou Huygens a construir seu relógio de pêndulo(ou cicloidal):

CICLÓIDE

Vamos estudar ciclóide com a concavidade voltada para cima, diferentemente como aparece nos textos, isso para facilitar o estudo do pêndulo de Huygens, que é nosso intuito nesse trabalho.

Supomos, então, um disco de raio 1 rolando sobre uma superfície plana e rígida. A curva descrita por um ponto localizado na periferia do disco é, por definição, uma ciclóide.

Escolhemos os eixos cartesianos de modo que a superfície plana está localizada em Y=2, a origem no ponto mais baixo da ciclóide e o eixo dos Y como eixo de simetria da ciclóide. O disco de raio 1 será o disco gerador.



O ponto P é então descrito como o ponto no disco gerador, depois que este rolou sem deslizar do ponto O, de um ângulo Θ. Assim quando o ângulo Θ=0, o ponto P estará na origem. As coordenadas de um ponto qualquer será dada por:

$$(x(\theta) = \theta + sen(\theta), y(\theta) = 1 - cos(\theta)) \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

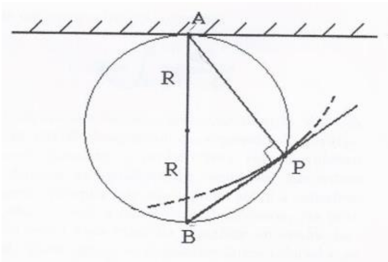
Algumas propriedades importantes dessa curva:

Se traçarmos uma tangente à ciclóide pelo ponto P, ela vai passar pelo ponto B e sua perpendicular pelo ponto A. De fato, a equação da reta tangente pelo ponto P será:

O coeficiente angular dessa reta $\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{sen(\theta)}{1+\cos(\theta)}$, a reta tangente terá a forma de:

$$y = \frac{sen(\theta)}{1+\cos(\theta)}x + k$$

Calculando o k, quando a reta passa pelo ponto P, $k = -\frac{\theta sen(\theta)}{1+\cos(\theta)}$. Logo a equação da tangente será: $y = \frac{sen(\theta)}{1+\cos(\theta)}(x-\theta)$. Ela vai cortar o eixo x, isso é, quando y=0, e $\theta \neq 0$, em x=B. Por outro lado, a perpendicular a essa reta tangente no ponto P encontra a circulo no ponto A, por uma propriedade desse.(figura 2)



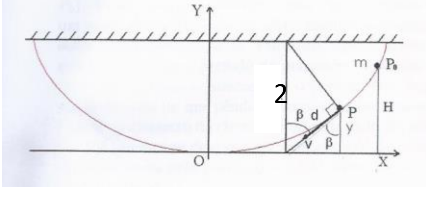
Outra propriedade importante dessa curva, que vai ser essencial nesse texto, é sua isocronacidade.

Supomos que uma partícula seja abandonada em um ponto P_0 da superfície da ciclóide. Denotando por H a altura desse ponto em relação ao eixo dos x, isto é, y=H quando t(tempo)=0, e usando a lei da conservação da energia mecânica, podemos calcular o módulo da velocidade (v) dessa partícula na sua descida, quando ela atinge o ponto P,cuja altura vamos denotar por y:

$\frac{1}{2}mv^2 = mg(H-y)$, então $v = \sqrt{2g(H-y)}$

Como a velocidade é sempre tangente à curva, sua componente vertical será:

$\frac{dy}{dt} = v_y = -\sqrt{2g(H-y)}\cos(\beta)\,(*)$,onde o ângulo β está definido como na figura abaixo e o sinal negativo porque estamos considerando a partícula descendo.



Pela propriedade da ciclóide vista anteriormente podemos escrever a seguinte igualdade:

$cos(\beta) = \frac{d}{2}$ e $y = dcos(\beta)$, onde d é o comprimento definido pela figura acima, logo $d = \frac{y}{\cos(\beta)}$, $cos^2(\beta) = \frac{y}{2}$, ou seja $cos(\beta) = \sqrt{\frac{y}{2}}$. Substituído na equação (*) vamos obter: $\frac{dy}{dt} = -\sqrt{g}\sqrt{(H-y)y}$.

O RELOGIO DE HUYGENS

Em primeiro lugar vejamos as propriedades importantes dos pêndulos cicloidais:

Chamando de τ o período de oscilação, isto é o tempo que a partícula leva para percorrer o trecho da ciclóide e voltar ao ponto de partida H, então o tempo que vai levar para ir de H até a parte mais baixa será de $\frac{\tau}{4}$.

Integrando a última equação acima: $\int_H^0 \frac{dy}{\sqrt{(H-y)y}} = -\sqrt{g}\int_0^{\tau/4} dt$,ou então

$$\tau = 4\sqrt{\frac{1}{g}}\int_o^H \frac{dy}{\sqrt{(H-y)y}}.$$

Fazendo uma mudança de variável, ou seja chamando de $\xi = \frac{y}{H}$, então $dy = Hd\xi$ e substituindo na equação anterior: $\tau = 4\sqrt{\frac{1}{g}}\, x\Gamma$. onde $\Gamma = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi)\xi}}$ (**)

Com isso o H desaparece das duas últimas fórmulas da expressão do período. Logo o período para esse movimento não depende da amplitude das oscilações, isto é, qualquer que seja o ponto sobre a superfície de onde a partícula é abandonada, ela atinge o ponto mais baixo da superfície no mesmo instante.

Vamos resolver a integral acima, para obter o período, que não depende de H.

Completando o quadrado do denominador $\Gamma = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(\frac{1}{4}-(\xi-\frac{1}{2})^2}}$ e com outra mudança de variável, $\xi - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{sen}(\theta)$, então $d\xi = \frac{1}{2}\cos(\theta)$; a equação se reduz a:

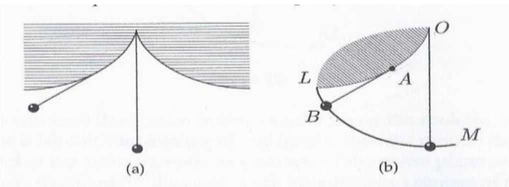
$\Gamma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta)d\theta}{\sqrt{1-sen^2(\theta)}} = \pi$. Substituindo na equação (**) $\tau = 4\pi\sqrt{\frac{1}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{4}{g}}$,

que é o resultado conhecido para o período das oscilações de uma partícula deslizando sem atrito em uma ciclóide gerada por um círculo de raio 1.

Voltemos, então, a tratar do relógio de pêndulo, criado por Huygens(1629-1695). Depois de estudar as obras mecânicas de Galileo e produzir vários artigos completando o que Galileo escreveu, Huygens voltou-se para o estudo da natureza isocrônica das oscilações de um pêndulo, matematicamente. Provavelmente foi a primeira descoberta mecânica de Galileo e Huygens foi hábil para completar o que Galileo havia feito.

Huygens usando as ideias de Galileo nos seus últimos anos, construiu o relógio de pêndulo utilizando o isocronismo. Ele trabalhou nisso entre 1656 e 1693. Em suas memórias, que apareceu em 1673, contém seus resultados mecânicos num parágrafo intitulado Horologium oscillatorium (Pendulum Clocks, or Geometric Proofs Relating to the Motin of Pendula Adapted to Clocks-Oeuvres Complètes, vol.18).

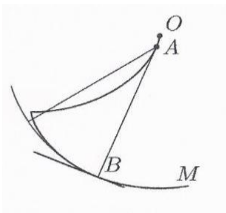
Pelos seus experimentos Huygnes usou delimitações para a amplitude usando aparatos. Quando ficou, para ele, claro que a ciclóide era tautônica, concluiu que ela era perfeita para esses aparatos, onde o final do movimento do pêndulo seria ao longo de uma ciclóide.



(Gindikin,p.105)

Supondo um obstáculo limitado pela curva L e um pêndulo de comprimento l preso no ponto O. Balançando o pêndulo ao redor do obstáculo, mantendo seu comprimento, observamos a curva descrita pelo peso B. Huygens, a *desenvolvida* de L, assim chamada por Pascal, hoje denominada de *involuta*, *envolvente* de L ou *evoluta* de L a curva M. Existem várias envolventes dependendo do comprimento l.

Vamos encontrar, então, a evoluta da ciclóide. Essa curva M é determinada pelos pontos B tais que, a soma dos comprimentos da tangente BA à L em A, mais o arco de curva AO, seja l . Huygens supõe primeiramente que a tangente de M em B seja perpendicular a AB, ou seja, AB é tangente a L em A, ou ainda normal a M em B. Assim o vetor velocidade é tangente à trajetória e como a ação da força muda, a velocidade também muda a todo instante. E o movimento contínuo do pêndulo, supondo que a cada instante o peso B descreve um círculo de centro em A, o vetor velocidade em B não muda, então a curva M e o círculo em B tem a mesma tangente, que é perpendicular ao raio AB.

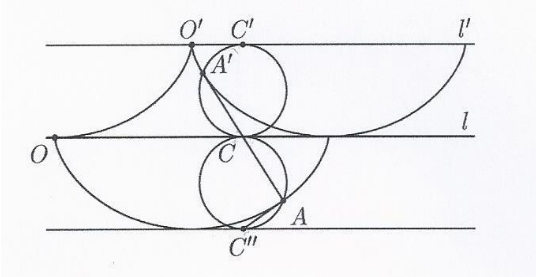


(Gindikin,p.106)

Então, para Huygens a evoluta pode ser considerada como uma poligonal construída pelas tangentes em cada ponto, que será uma "boa" aproximação para essa evoluta (dizemos que a curva evoluta é o conjunto das tangentes).

Temos então que encontrar a curva cujas tangentes são normais a ciclóide dada.Huygens conjecturou que seria uma ciclóide translada da anterior e gerada por um círculo de raio 2r (sendo r o raio da primeira) e de vértice sendo o cúspide da primeira.(figura a baixo).

De fato, supondo r=1, sejam l e l´ as retas diretrizes das ciclóides. Os pontos O e O´suas origens (l´está duas unidades de l e O´ está π unidades a direita de O). Considerando o ponto C de l e tomando os dois círculos geradores das duas ciclóides serão tangentes a l em C.



(Gindikin,p.107)

Sejam C´e C´´ pontos diametralmente opostos a C nos dois círculos respectivamente e sejam A e A´os correspondentes pontos das ciclóides. O arco C C´´A é igual em comprimento ao segmento OC , ou seja π unidades de comprimento do arco C´A´, que, por usa vez, tem o mesmo comprimento do segmento O´C´. Então o ângulo C´CA=ânguloC´´CA e os pontos A´,C e A são colineares. Logo, como CA´ é tangente a ciclóide superior e CA é normal a inferior (AC´´ é sua tangente), então a trajetória do peso do pêndulo descreve a evoluta da ciclóide usada como aparato do pêndulo. (Gindikin, ps.106-107)

BIBLIOGRAFIA:

Burrowes,M. e Farina,C.-(2005) Sobre o pêndulo isócrono de Christiaan Huygens – Revista Brasileira de Ensino da Física, v.27, n.2 p.175-179

Gindikin, S.-(2007)-(tradução do russo por Alan Shuchat)Tales of Mathematicians and Physicists - Spring -Boston

Huygens,C.-(1938) Oeuvres Complètes, vol.18 -Nijhoff.- The Hanglue