Parábola – Texto de apoio ao professor.

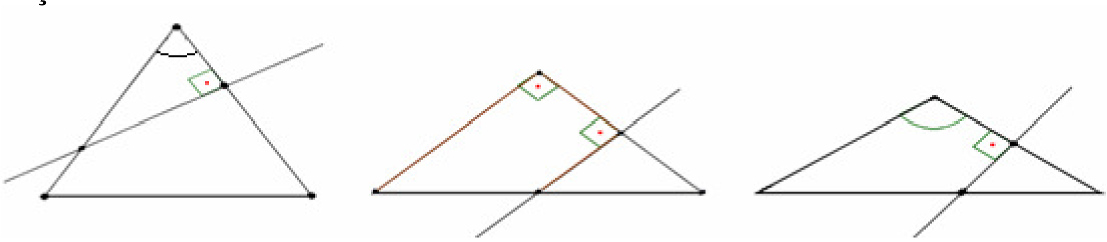
1) Parte histórica
2) Estudo analítico da parábola
   a) Parábolas com eixo em y
   b) Parábolas com eixo em x
   c) Relacionando o coeficiente da equação reduzida e o gráfico da parábola
3) Justificando a construção geometria que determina o foco da parábola

1. História - relacionando a parábola com as cônicas -

Os termos elipse, hipérbole e parábola foram utilizados por Pitágoras, e seus seguidores, por volta de 540 a.C, porém, com um enfoque diferente do uso atual.

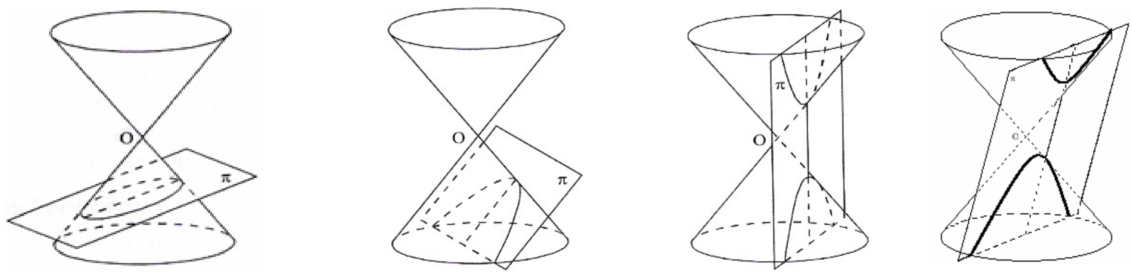
Foi Menaecmus, cerca de 350 a.C., o primeiro a tratar das secções cônicas, seccionando cones com planos perpendiculares à geratriz. Se este ângulo do vértice da secção meridiana do cone fosse agudo denominava-se a curva obtida de elipse, se fosse reto, de parábola e se fosse obtuso de hipérbole.

Secções meridiana nos cones:



(a) Cone agudo **(b) Cone reto** **(c) Cone obtuso**

Apolônio de Perga, 225 a.C, introduziu o estudo dessas curvas das secções cônicas a partir de superfícies cônicas duplas e retas, como se faz atualmente.



(a) Elipse **(b) Parábola** **(c) Hipérboles**

Embora as cônicas fossem conhecidas desde a antiguidade, seu estudo ganhou importância especial no século XVII com Gérard Desargues (1593-1661), Blaise Pascal (1623-1662), Johannes Kepler (1571-1630) e Galileu Galilei. (1564-1642).

Baseado nas observações do astrônomo dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601), publicadas em 1609, Kepler descobriu que a órbita de Marte é elíptica. Essa descoberta possibilitou estabelecer uma relação do estudo das cônicas, com algo relativo à natureza como é o caso da órbita dos planetas e de alguns cometas no sistema solar. Assim, o interesse pelo estudo das curvas cônicas ultrapassou as fronteiras da Matemática, passando a interessar também a outras ciências, particularmente à astronomia.

Galileu Galilei

Pouco depois, Galileu mostra que a trajetória de um projétil lançado no espaço é uma parábola. Em 1680, Newton confirma e unifica as afirmações de Galileu pela lei de gravitação universal. Hoje sabemos que muitos cometas têm órbitas aproximadamente parabólicas e que alguns cometas têm órbitas hiperbólicas.

Atualmente podemos observar muitas aplicações das curvas cônicas, pois essas formas têm propriedades especiais de reflexão de luz ou do som que permitem empregar em telescópios, antenas parabólicas, refletores além de permitirem aos arquitetos conceberem ambientes com condições acústicas apropriadas para auditórios, teatros ou igrejas.

Em engenharia, as formas cônicas, principalmente a parabólica, aparecem em pontes, cúpulas ou arcos, por apresentarem a propriedade de distribuir os esforços convenientemente. A forma hiperbólica, em particular, é utilizada na construção de usinas nucleares.

O estudo inicial das cônicas teve um caráter puramente matemático, a descoberta de Kepler possibilitou estabelecer uma relação do estudo das cônicas com algo relativo à natureza (a órbita dos planetas e alguns cometas no sistema solar). E pouco depois, Galileu mostra que a trajetória de um projétil lançado no espaço é uma parábola.Em 1680, Newton confirma e unifica as afirmações de Galileu pela lei de gravitação universal.

Hoje sabemos que muitos cometas têm órbitas aproximadamente parabólicas e que alguns têm órbitas hiperbólicas.

Da duplicação do cubo às cônicas

As secções cônicas foram descobertas na tentativa de resolver um dos três famosos problemas da antiguidade, o problema da duplicação do cubo, ou seja, a construção de um cubo com o dobro do volume de um outro.

Hipócrates no século V AC foi o primeiro a reduzir o problema da duplicação do cubo ao da inserção de duas médias proporcionais *x* e y, entre dois segmentos conhecidos *a* e *b*.

Na linguagem moderna da geometria analítica, considere um cubo de aresta *a*, queremos obter segmentos de comprimentos *x* e *y* (que são as duas médias proporcionais) tais que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

quando $b = 2a$,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

que é equivalente a resolver simultaneamente as equações:

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ y^2 = 2ax \\ xy = 2a^2 \end{cases}$$

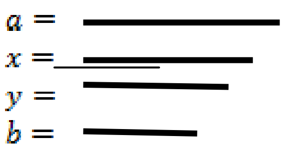
a primeira e a última equação implicam que $x^3 = 2(a^3)$. E, portanto um cubo de aresta x tem o dobro do volume de um cubo de aresta a.

Menaechmus no século IV AC foi quem primeiro construiu as curvas que satisfazem as propriedades algébricas acima. Vejamos como ele resolveu esse problema.

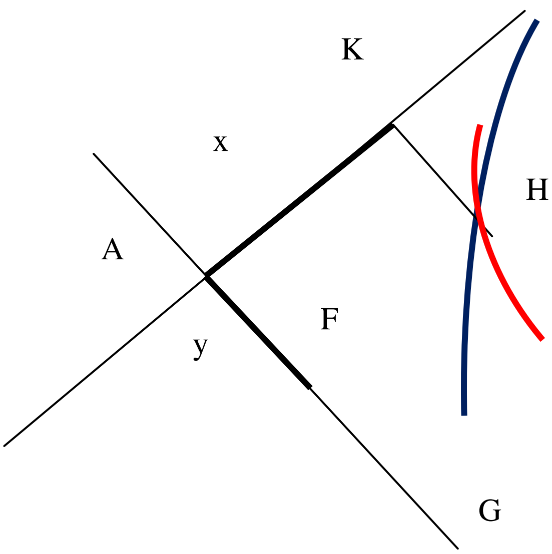
1. De $\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$ deduzimos que $x^2 = ay$. A área do quadrado de lado x é igual a área do retângulo de lados a e y, sendo a o segmento dado.

2. De $\frac{a}{x} = \frac{y}{b}$ deduzimos que $xy = ab$. A área do retângulo de lados x e y é igual à área do retângulo de lados a e b conhecidos.

   Se



Tomemos um ponto A e, sobre uma reta passando por A, marquemos o segmento AF de comprimento y. Por F tracemos uma perpendicular a AF e marquemos FH de comprimento x.



A relação $\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$ significa que o ponto H pertence a uma parábola $x^2 = ay$ de vértice A. E a relação $\frac{a}{x} = \frac{y}{b}$ estabelece que o ponto H pertence à hipérbole eqüilátera $xy = ab$, com assíntotas AF e AK, e que AK é paralela à FH que passa por A.

Em resumo, ao supor o problema resolvido, o ponto H é a intersecção de duas curvas, uma parábola e uma hipérbole, e as duas médias procuradas, *x* e *y* são os segmentos HF e FD (=HK).

Para resolver o problema, é necessário saber construir uma parábola e uma hipérbole, com certas características que são dadas. Para a parábola, conhece-se o vértice A e o fator *a* , $x^2 = ay$; para a hipérbole, $xy = ab$; as duas assíntotas AF e AK e área delimitada por cada um dos seus pontos com as retas AG e AK, sempre igual à área do retângulo delimitado por *a* e *b.* O ponto de intersecção H entre as duas curvas determinará a solução do problema.

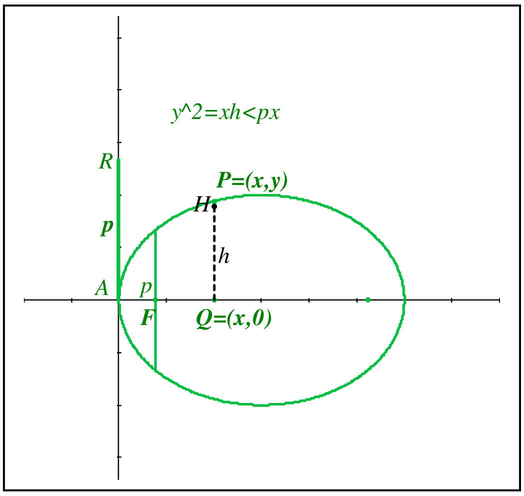
Embora seja evidente que ele tenha utilizado o que mais tarde ficou conhecido como as secções cônicas, não se sabe se ele tinha em mente uma construção envolvendo um cone. Menaechmus não utiliza os termos parábola e hipérbole que são devido a Apolônio. Em vez disso, ele chamou uma parábola de uma secção de um cone de ângulo reto e uma hipérbole de uma secção de um cone de ângulo obtuso.

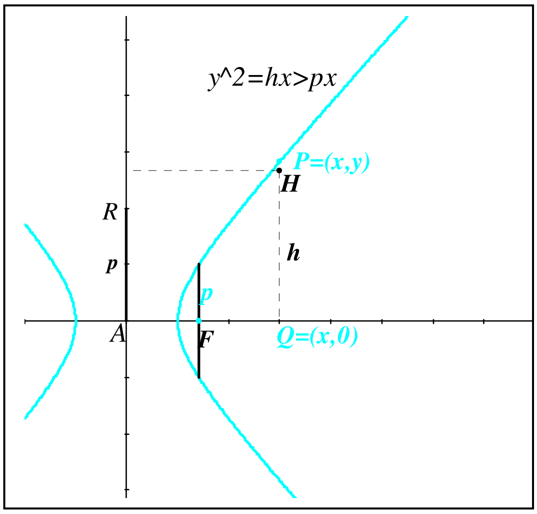
Junto com Euclides e Arquimedes, Apolônio é o terceiro elemento do trio de geômetras da Grécia antiga, século III aC. Os termos elipse, parábola e hipérbole foram adotados por Apolônio e tomados da terminologia pitagórica antiga referente a aplicação de áreas. Quando os pitagóricos aplicavam um retângulo a um segmento de reta isto significava que a base do retângulo ao longo do segmento de reta, com um vértice do retângulo sobre uma extremidade do segmento, eles diziam que se tinha um caso de "elleipsis" – que significa falta, "parabole" - que significa comparação ou "hyperbole" - excesso, conforme a base do retângulo ficava aquém do segmento de reta, coincidia com ele ou o excedia.

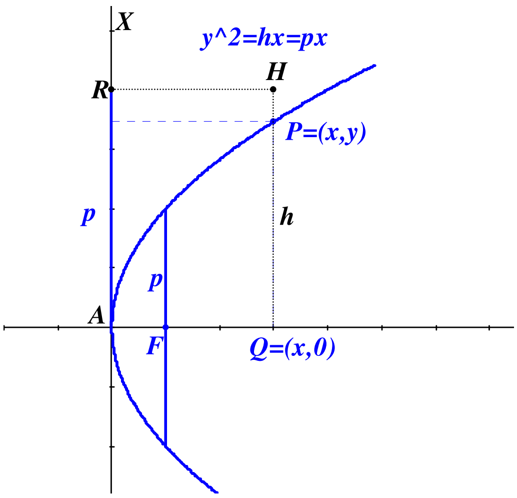
Na Figura ao lado:

- AB é o eixo principal de uma cônica de vértice A.
- por A trace AX uma perpendicular a AB
- $P = (x, y)$ é um ponto qualquer da cônica.
- $Q = (x, 0)$ é o pé da perpendicular de *P* sobre o eixo AB.
- F é um dos focos da cônica.
- $latus\ rectum$ é o segmento perpendicular ao eixo principal, passando por F, unindo dois pontos da cônica. O comprimento do latus rectum é *p*.
- marque em AX o ponto R de modo que o segmento AR tenha medida *p*.
- aplique a AR um retângulo tendo AQ como um dos lados e área $(\overline{PQ})^2$. O que significa que a altura h do retângulo procurado está em AX e a base é AQ e a área é $(\overline{PQ})^2$, $x \times h = y^2$.

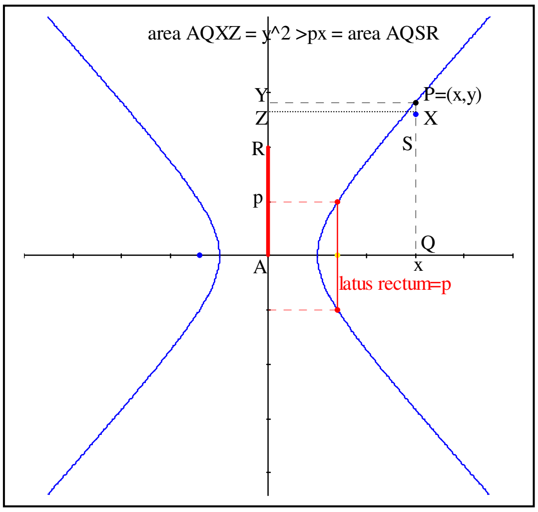
- se $h = p$, a cônica é uma parábola.
- se $h < p$, a cônica é uma elipse.
- se $h > p$, a cônica é uma hipérbole.

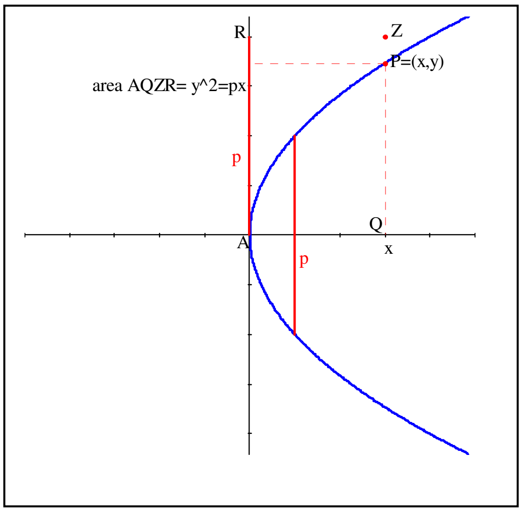

y^2=xh<px
R
P=(x,y)
H
p
h
A
p
F
Q=(x,0)

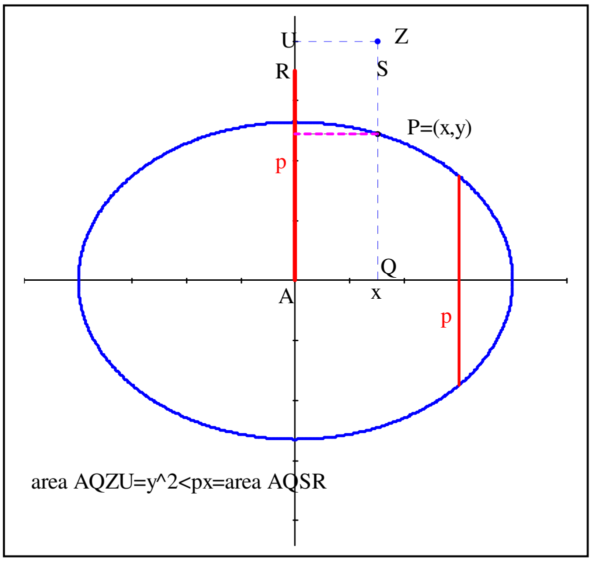

y^2=hx>px
P=(x,y)
H
R
h
p
p
A
F
Q=(x,0)


X
y^2=hx=px
H
R
P=(x,y)
p
h
p
A
F
Q=(x,0)

Em termos de área de retângulos temos os três casos: por falta (elipse), igualdade (parábola) e por excesso (hipérbole).

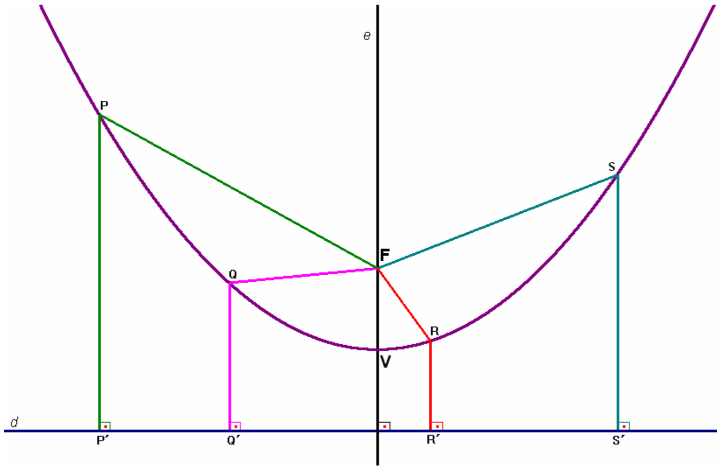






2) Estudo analítico da parábola

Sabemos que:
"Parábola é o conjunto de todos os pontos de um plano eqüidistantes de um ponto fixo e de uma reta fixa desse plano."



Na figura acima, podemos observar que:

d(P, P´) = d(P, F)   d(Q, Q´) = d(Q, F)   d(R, R´) = d(R, F)   d(S, S´) = d(S, F),

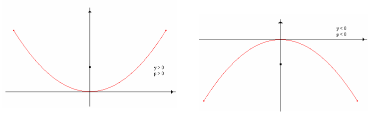
Assim, um ponto qualquer T=(h, k) está na parábola se e somente se d (T, F) = d (T, *d*), onde *d* é a diretriz.

Os **elementos** da parábola são:

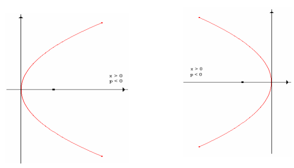
Foco: é o ponto fixo **F**
Diretriz: é a reta fixa ***d***.
Eixo principal: é a reta que passa pelo foco e é perpendicular a diretriz.
Vértice: é o ponto **V** de intersecção da parábola com o eixo principal.

Deduziremos agora as **equações reduzidas da parábola,** considerando duas situações:

- quando o eixo da parábola é o eixo y



- quando o eixo da parábola é o eixo dos x



a) Parábolas com eixo em y

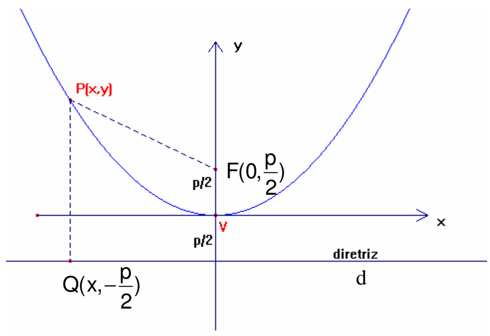
Seja **P (x,y)** um ponto qualquer de uma parábola. Consideremos o foco $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$

A diretriz desta parábola será a reta representada pela equação $y = -\frac{p}{2}$.

Já sabemos que se P pertence à parábola, então

d (P, F) = d (P, *d*), ou seja, d(P, F)=d(P, Q)

Que resultará em



$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-\frac{p}{2})^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+\frac{p}{2})^2}$$

$$\sqrt{x^2 - (y-\frac{p}{2})^2} = \sqrt{(y+\frac{p}{2})^2}$$

Elevando os dois membros ao quadrado e desenvolvendo:

$$x^2 - (y^2 - py + \frac{p^2}{4}) = y^2 + py + \frac{p^2}{4}$$

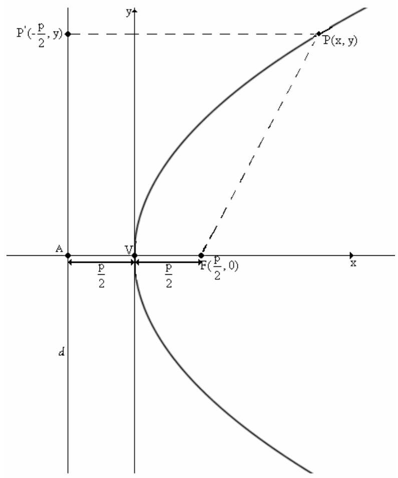
simplificando, obtemos a **equação reduzida quando o eixo da parábola é o eixo y** :

$$\mathbf{x^2 = 2py}$$

b) Parábolas com eixo em x

Quando o eixo da parábola é o eixo x , consideramos a figura ao lado e de modo análogo ao item a) obteremos a equação reduzida:

$$\mathbf{y^2 = 2px}$$



O número real $p \neq 0$ é chamado parâmetro da parábola.

c) Relacionando o coeficiente da equação reduzida e o gráfico da parábola

Partindo da equação obtida no item a) $x^2 = 2py$ e isolando a variável y, obtemos

$$y = \frac{1}{2p}x^2$$

Destacamos que, para um dado x

- quanto **MAIOR** o parâmetro **p** , MENOR será o coeficiente de x^2 e ainda, **MENOR** será o valor de **y**.

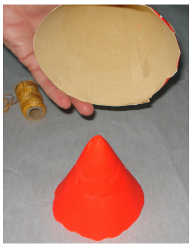
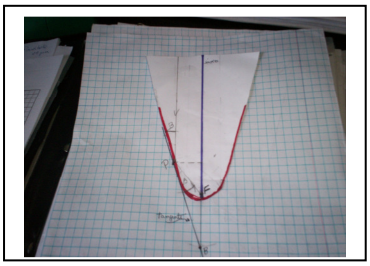
Assim,

- **a parábola ficará mais aberta**.

Podemos concluir que:

Quanto maior a parâmetro, mais aberta será a parábola.

No caso do experimento, se utilizarmos um cone de massa muito fechado (o ângulo do vértice na planificação for agudo) , obteremos com o corte, uma parábola também muito fechada, como a da figura abaixo.

Nessa parábola o parâmetro deverá ser pequeno, e consequentemente o foco ficará muito próximo do vértice. Nesse tipo de parábola, haverá dificuldade na determinação da diretriz e do foco, utilizando a régua e o compasso.

É importante fazer a relação do gráfico da função $y = ax^2$, já estudado no Ensino Fundamental, como uma das parábolas que podem ser obtidas deste experimento, considerando-a no plano cartesiano, com o eixo de simetria em y e o vértice V na origem.

Ver na folha do aluno o caso de $y = 1/8\ x^2$

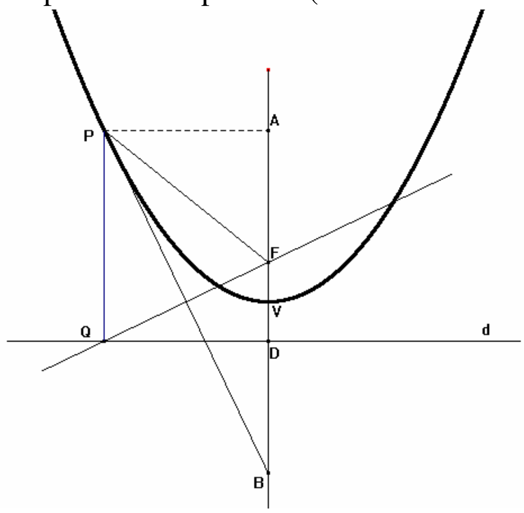
$1/8 = 1/2p$ tem-se $p = 4$

3) Justificando a construção geometria que determina o foco da parábola

Na etapa 2 do experimento é proposta uma construção para obter o foco do arco de parábola.
Observando os passos ali descritos, pode-se constatar que foi utilizada a seguinte seqüência:

Se
- P é um ponto de uma parábola com foco F e vértice V;
- A é o pé da perpendicular ao eixo, por P;
- B é um ponto do eixo tal que VA = VB.

Então, a mediatriz do segmento PB intercepta o eixo da parábola no ponto F (foco da parábola)



Seja **Q** o pé da perpendicular traçada por P sobre a diretriz **d**.
Como P pertence a parábola então PQ=PF.
PQAD é um retângulo então AD=PQ.
Seja p a medida de FD, o parâmetro da parábola, assim, VF=VD=p/2.

Precisamos verificar que **AD = FB**, vejamos:

Pela construção temos que:
VA = VB e VF = VD
ainda,

$$\begin{cases} VA = AF + VF \\ \text{e} \\ VB = DB + VD \end{cases} \qquad \text{assim, } AF = DB \quad (2)$$

Mais ainda: AD = AF + p (p é a distância do foco à diretriz)
FB = DB + p
e AF = DB de (2)

assim **AD = FB**

Como AD=PQ e PQ=PF então PQ=PF=FB.

Como PQ=FB e PQ//FB então PFBQ é um losango.
Assim, PB e QF são as diagonais do losango e portanto, QF é a mediatriz de PB, como queríamos verificar.

Bibliografia:

VELOSO, Eduardo. Geometria, temas atuais: materiais para professores. Instituto de Inovação Educacional. Lisboa. 2000

EVES, Howard. História da Geometria; trad. Hygino H Domingues – São Paulo: Atual,1992. (Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: v.3).

WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica, Makron Books do Brasil Editora Ltda, São Paulo, 2000.

Ficha técnica

Autores:

Maria Zoraide M C. Soares. ***mzsoares@uol.com.br***

Miriam Sampieri Santinho ***msantinho@uol.com.br***

Rosa Maria machado ***rmm@vivax.com.br***

Wilson Roberto Rodrigues ***wrodrigues@mpc.com.br***

Colaboradores:

Maria Lúcia B. Queiroz

Otilia T. W. Paques

Eliane Quelho F. Rezende

Claudina I. Rodrigues

Maria Ines S Muniz

Ilustrador

Fotografo

Augusto

Revisores

Matemática:

Língua Portuguesa:

Pedagogia:

Avaliadores

Avaliadores Externos

Professores

Cristiane Aparecida da Cruz

Miriam Sampieri Santinho

Rosa Maria Machado

Alunos