JORNAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

JPM

Laboratório de Ensino de Matemática

No. 08 Julho 2008

Versão eletrônica em www.ime.unicamp.br/lem

Editorial

É com muita satisfação que reiniciamos a publicação do JPM. Nesta edição apresentamos sugestões de atividades cujos autores obtiveram êxito ao aplicá-las em suas aulas, desafios matemáticos, passatempo, etc. A seção de cursos traz a programação das atividades que serão oferecidas pelo LEM durante o próximo semestre. Esperamos que tenham um momento agradável de leitura, e aguardamos suas sugestões, opiniões ou críticas tendo como objetivo sempre a melhoria desse meio de comunicação e proximidade dos interesses de nossos leitores.

Para Usar em Sala de Aula

Aritmética do Amor

Os professores estão sempre se perguntando sobre o que devem fazer para que os alunos realmente aprendam. Motivá-los seria uma resposta. Entendendo como motivação o ato de expor as causas, a animação e o entusiasmo. Desta definição, pode-se concluir que estar motivado é estar animado, entusiasmado. Para isso, é necessário ter motivos para se chegar a esse estado. Para qualquer coisa que se faça na vida, é necessário primeiro a vontade de realizá-la, senão nada acontece. Isso também ocorre na educação. Deve existir a **vontade**, nesse caso, a vontade de aprender. O professor deve fornecer estímulos para que o aluno se sinta entusiasmado a aprender. Daí apresentamos uma proposta lúdica de trabalharmos conceitos como: operações básicas, aritmética dos restos e Triângulo de Pascal. Para p natural, denotaremos por $p \mod 10$ o resto da divisão de p por 10 (congruência módulo 10).

Uma pergunta que por vezes acomete o coração dos apaixonados é: *quantas horas por dia a pessoa que gosto pensa em mim ?* A resposta pode ser dada pelo teste da aritmética do amor, seguindo os passos abaixo:

Passo 1: Escreva seu nome seguido da letra "E" e do nome da outra pessoa.

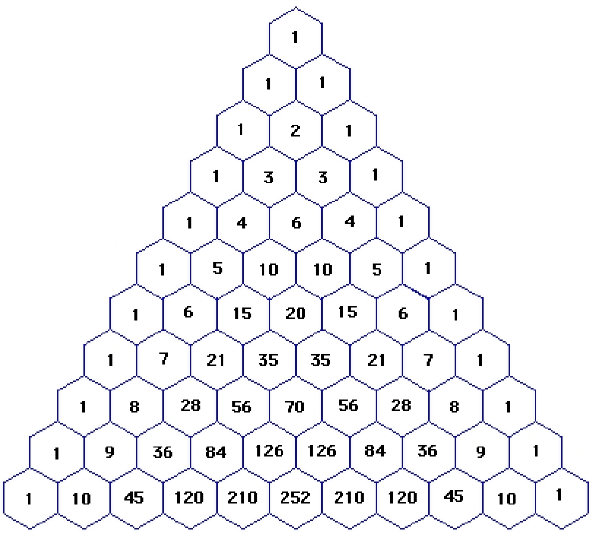
Passo 2: Ignore as consoantes e substitua as vogais seguindo as correspondências: $a \to 1$, $e \to 2$, $i \to 3$, $o \to 4$, $u \to 5$; complete essa disposição numérica acrescentando a data do dia em que se encontra na forma *ddmmaaaa*.

Passo 3: Escreva uma nova linha usando os números obtidos no resto da divisão por 10 da soma de cada termo da linha inicial com seu vizinho da direita.

Passo 4: Repita o passo 3 até restar apenas um número. Este número, entre 0 e 9, é a quantidade de horas que a pessoa está pensando na outra naquele dia.

Suponha que MARIA esteja gostando de JOÃO. Para decidir se investe em uma proposta de namoro, ela deve seguir os procedimentos (suponha que o dia corrente seja 01/05/2008): *J O A O E M A R I A 0 1 0 5 2 0 0 8*. Fazendo a substituição obtemos a linha $L1$: 4 1 4 2 1 3 1 0 1 0 5 2 0 0 8. Considerando a_i^1 o i-ésimo elemento de $L1$, obtemos o primeiro elemento da segunda linha ($L2$) resolvendo a operação $a_1^2 = [a_1^1 + a_2^1] \mod 10$, sendo a_1^2 um número entre 0 e 9. Repetimos o procedimento, $a_i^2 = [a_i^1 + a_{i+1}^1] \mod 10$, para i variando entre 2 e $n-1$, onde n refere-se ao número total de termos em $L1$. Para o exemplo dado temos $a_1^2 = [4+1] \mod 10 = 5$, $a_2^2 = [1+4] \mod 10 = 5$, $a_3^2 = [4+2] \mod 10 = 6$, ..., $a_{14}^2 = [0+8] \mod 10 = 8$. Portanto, $L2$ é dada por: 5 5 6 3 4 4 1 1 1 5 7 2 0 8. Aplicando novamente o mesmo raciocínio para $L2$, obteremos $L3$: 0 1 9 7 8 5 2 2 6 2 9 2 8. Com esse procedimento aplicado recursivamente, temos ao final que JOÃO passa 4 horas do seu dia pensando em MARIA, o que é um indício para que ela considere a possibilidade de propô-lo namoro com grandes chances de uma resposta positiva.

É fácil perceber que essa brincadeira pode levar o aluno a um número relativamente grande de operações. O exemplo anterior possui 7 vogais mais 8 algarismos referentes à data, o que dá um total de 15 algarismos que somados 2 a 2 geram uma linha de 14 algarismos e essa por sua vez se somada gera uma linha de 13 algarismos. Como para cada linha de n números realizamos $2(n-1)$ operações, sendo $n-1$ somas e $n-1$ divisões; a quantidade final de operações é obtida ao somarmos $2 \times (15-1) + 2 \times (14-1) + 2 \times (13-1) + \cdots + 2 \times (2-1)$. Para o exemplo dado temos uma progressão aritmética de razão -2, com o primeiro termo igual a 28 e um total de 14 termos. Totalizando nosso enfardo algébrico em $(28+2) \times 14/2 = 210$ operações. Percebe-se então, após algum tempo se exaurindo em contas, a necessidade da construção de um método menos desgastante. Daí vem o resultado verdadeiramente valioso dessa proposta.



Um tratamento investigativo pode resultar em diversas metodologias para reduzir o esforço de cálculo. A idéia principal neste ponto é o aprimoramento da capacidade analítica do aluno. Uma sugestão de um método desenvolvido na parceria aluno e professor é a obtenção da soma final pela utilização do Triângulo de Pascal (veja a figura acima). Pode-se usar a linha correspondente do triângulo de Pascal (em congruência módulo 10) obtendo o resultado final de forma muito mais direta. Vejamos, a linha 15 do triângulo de Pascal é dada por: 1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1. Colocando-se cada elemento dessa linha em congruência módulo 10 obtemos $\ell 15$: 1 4 1 4 1 2 3 2 3 2 1 4 1 4 1. Daí, aplicando a multiplicação dos termos em posições correspondentes de $L1$ com $\ell 15$ e somando os valores obtidos, temos: $[(1\times4)+(4\times1)+(1\times4)+(4\times2)+(1\times1)+(2\times3)+(3\times1)+(2\times0)+(3\times1)+(2\times0)+(1\times5)+(4\times2)+(1\times0)+(4\times0)+(1\times8)] \mod 10 = [4+4+4+8+1+6+3+0+3+0+5+8+0+0+8] \mod 10 = 4$.

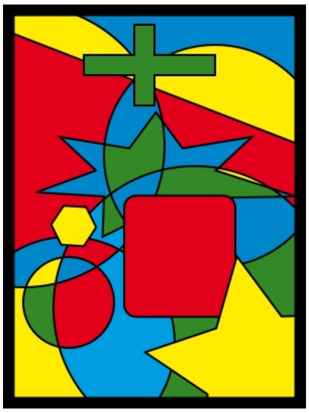
Aqui foi descrito objetivamente um resultado que decorreu de algumas poucas operações. Mas o método desenvolvido ainda é relativamente custoso, dado que decorar o triângulo de Pascal e realizar multiplicações diversas, por vezes, se torna uma tarefa tão árdua quanto a soma recursiva. Entretanto, é aí que reside a verdadeira beleza dessa proposta. Pode-se sugerir que os alunos façam uma abordagem estatística para descobrir, em seu espaço amostral, qual a quantidade mais freqüente das vogais levando-se em conta as combinações possíveis dos nomes de meninos e meninas em sua sala. Determinada a quantidade que mais ocorre, escolhe-se a linha correspondente do Triângulo de Pascal.

Uma forma alternativa de se usar esse método é aplicá-lo não só para obter a soma final, mas também para obter alguma linha subseqüente. Considere a disposição numérica dada por $a_1^1 \ a_2^1 \ \cdots \ a_{12}^1$. Poderíamos aplicar a resolução usando $\ell 12$ do triângulo de Pascal, 1 1 5 5 0 2 2 0 5 5 1 1. Entretanto, podemos montar dois blocos a partir dos números de nossa disposição numérica e usar $\ell 11$: 1 0 5 0 0 2 0 0 5 0 1. Para isso determina-se o bloco $B1$ com os onze primeiros termos de $L1$: $a_1^1 \cdots a_{11}^1$ e o bloco $B2$ com os últimos onze termos, $a_2^1 \cdots a_{12}^1$. Aplicamos então o método usando $\ell 11$ em $B1$ e $B2$. Esse procedimento nos dá dois números: a_1^{11} e a_2^{11}, que são exatamente os termos da penúltima linha do processo de soma recursiva. Daí, para o resultado final basta computar $[a_1^{11} + a_2^{11}] \mod 10$. Essa abordagem alternativa é interessante dado a freqüência de zeros presentes em $\ell 11$. Para o cálculo de a_1^{11}, soma-se $a_1^1 + a_{11}^1 + 2 \times a_6^1$, e a esse número, dado que nosso interesse é no resto da divisão por 10, somamos 5 caso a soma $a_3^1 + a_9^1$ seja ímpar. Isso decorre do fato que para todo $a \in \{0, 1, ..., 9\}$, $[5 \times a] \mod 10 = 0$ ou 5, o valor dependendo apenas de a ser par ou ímpar. O mesmo se aplica para o cálculo de a_2^{11}.

A análise detalhada de todas as etapas deste processo se mostrou uma ferramenta didática valiosa. Competições de velocidade podem validar o interesse, mas deve-se evitar que os alunos se preocupem demais em memorizar os procedimentos e percam o foco sobre a análise. A intenção é de que eles sejam capazes de refinar o método de forma a obter o resultado final em um tempo menor com esforço algébrico reduzido. Os conceitos teóricos envolvidos podem ser apresentados na medida que se tornem necessários e deve-se permitir aos alunos que tentem por si só chegarem a conclusões próprias.

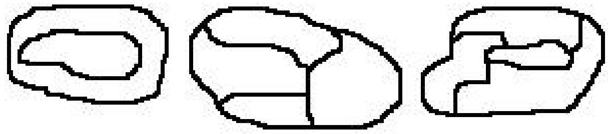
Wanderson L. Silva, Pós-Graduação em Matemática Aplicada – IMECC – UNICAMP & Lucas M. Avelleda, Escola Comunitária de Campinas

Colorindo Mapas: Quatro Cores São Suficientes



Entre os problemas famosos em Matemática encontra-se aquele que é conhecido como o Problema das Quatro Cores. O estudo deste problema é responsável por importante desenvolvimento na Teoria dos Grafos. Tudo teve início quando, em meados do século XIX, um jovem inglês, Francis Guthrie, que foi botânico, advogado e matemático, ao constatar que necessitava de apenas quatro cores para colorir o mapa da Inglaterra, de forma que distritos adjacentes tivessem sempre cores distintas, formulou a seguinte conjectura: "é possível colorir qualquer mapa, plano ou sobre a superfície de uma esfera, com apenas quatro cores, de modo que regiões vizinhas recebam cores diferentes". Observamos que regiões com um único ponto como fronteira não são admitidas.

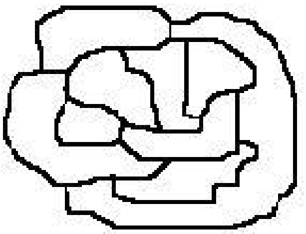
Um problema aparentemente simples, mas ocupou as mentes de matemáticos profissionais e amadores por mais de um século. Somente em 1976 o problema foi realmente resolvido, com a ajuda de um computador, por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, da Universidade de Illinois (EUA), que apresentaram uma demonstração extremamente complicada daquele que ficou conhecido como o Teorema da Quatro Cores. Agora sabemos que quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa, mas isto não significa que sejam todas necessárias para cada mapa. A figura abaixo exibe exemplos em que duas cores são suficientes, em que se necessita de três cores e em que três cores não bastam.



Atividade 1: Incentivar os alunos a colorir diversos tipos de mapas ou bandeiras, propostos pelo professor ou inventados por eles, com a finalidade de descobrirem a quantidade de cores necessárias para colori-los. Investigar em que condições é possível colorir com apenas duas cores, com apenas três cores e assim, sucessivamente, conduzir para a sistematização dos processos encontrados com o objetivo de determinar o menor número de cores necessárias para cada mapa.

Atividade 2: De quantas maneiras diferentes podemos colorir o mapa da região sudeste do Brasil (figura ao lado) usando apenas as quatro cores indicadas?

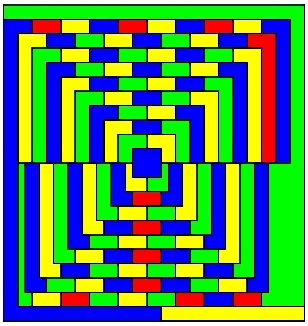
Atividade 3: Pinte o mapa abaixo com apenas quatro cores. Você seria capaz de dizer



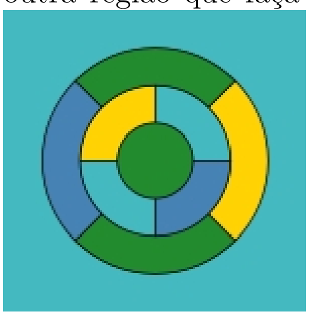
de quantas maneiras diferentes pode-se colorir esse mapa usando apenas as quatro cores utilizadas?

Jogo 1: Dois jogadores, A e B, têm quatro lápis de cores diferentes e um mapa para colorir de forma que regiões limítrofes tenham cores distintas. Cada um dos jogadores, na sua vez, pinta uma região do mapa. Perde o primeiro que não conseguir colorir adequadamente nenhuma das regiões ainda sem cor.

O texto a seguir é uma tradução livre e adaptada de Benarroch et al.: "Ainda que as coisas sejam possíveis, nem sempre são fáceis de conseguir. Prova disto é o jogo proposto há alguns anos por Stephen Barr e apresentado por Martin Gardner em um de seus livros de Matemática Recreativa como método mais rápido ... para apreciar as complicações que aparecem ao se tentar demonstrar o Teorema das Quatro Cores."



Jogo 2: Dois jogadores, A e B, têm quatro lápis de cores diferentes e uma folha em branco. O jogador A desenha uma região fechada e conexa. O jogador B deve colori-la e desenhar outra região que faça fronteira com a anterior e que deve ser colorida por A. E assim sucessivamente. Observando-se que: (i) um só ponto de contato entre duas regiões não é considerado fronteira; (ii) não se permite região totalmente rodeada por outra; (iii) duas regiões limítrofes não podem ter a mesma cor. Perde o jogador que não for capaz de colorir adequadamente a região desenhada por seu adversário.



Referências: M. C. Benarroch et al., Nudos e Nexos: Redes En La Escuela, Editorial Sintesis, 1989 • H. Eves, *Introdução à História da Matemática*, Editora da UNICAMP, 1995 • M. Guzman, *Contos com Contas*, Gradiva, 1991 • O. Ore, *The Four-Color Problem*, Academic Press, 1967 • Sítio na internet: www.ipv.pt/millenium/Millenium24/12.pdf.

M. Carmelina Fernandes, LEM – UNICAMP

Humor

Numerologia da Besta

666	Número da Besta
DCLXVI	Número da Besta romana
666,0000	Número da Besta em alta precisão
0,666	Número da Milibesta
1010011010	Número da Besta binária
666 + 666 i	Número da Besta complexa
00.666–666	Código Postal da Besta
0–900–666–666	Fale com a Besta! Apenas R$ 6,66 o minuto
R$ 665,95	Preço de liquidação da Besta
BR–666	Rodovia da Besta
6,66%	Taxa de juros Bestial

Adaptado da revista "The College Mathematics Journal" **31** *(2000)*

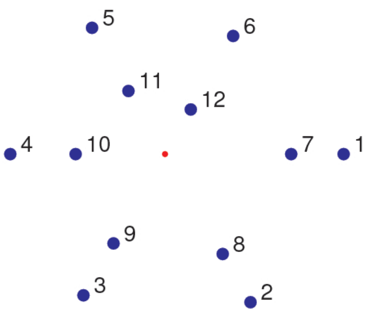
Artigo

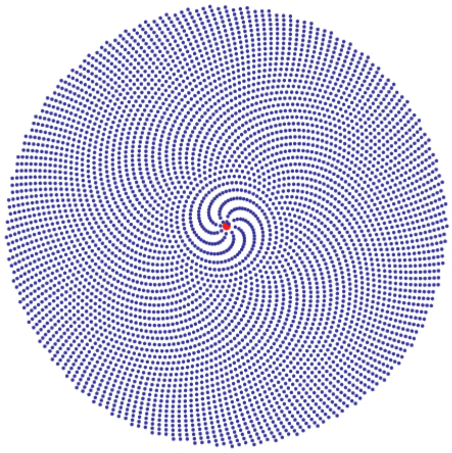
Flores, o Número de Ouro e as Frações Contínuas

Os números de Fibonacci e a proporção áurea são onipresentes na natureza. O número de ouro $\phi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.6180$ aparece em quase todos os arranjos de folhas, sementes e espirais em plantas das mais diferentes origens. O número $\pi \approx 3.1416$, razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, é outro número muito conhecido da humanidade, mas não comum na natureza como o ϕ. Ainda assim, desperta a curiosidade e a imaginação de cientistas e leigos.

Quando uma planta como, por exemplo, o girassol, cresce, ela produz novas sementes no centro da flor que empurram as outras sementes para fora. A posição de cada nova semente é tal que o ângulo de rotação em relação à semente anterior é constante. Devido a esse processo de rotação aparecem padrões espiralados no núcleo da flor. Veja as figuras abaixo. A natureza escolhe o ângulo de rotação de forma que os arranjos de folhas, sementes e espirais em plantas fiquem distribuidos uniformemente.

Dadas k sementes ao redor do centro da espiral, a semente mais recente será a denotada por 1, a semente anterior por 2, e assim por diante, de maneira que a semente mais longe do centro é a semente de número k. Aproximando a área de cada semente por 1, a área da espiral será k, e o raio será $\sqrt{k/\pi}$. Assim, a distância do centro da flor a cada semente varia proporcionalmente à raiz quadrada do número da semente. Se denominarmos o ângulo de rotação de β, assumindo que β seja constante, o ângulo de rotação da semente k será $k\beta$. Se β for um múltiplo racional de uma volta completa (revolução), isto é, $\beta = r \cdot 360^o$, com r racional, após algumas voltas o ângulo de uma n-ésima semente coincidirá com o da primeira semente, o da $(n+1)$-ésima com a segunda e assim por diante. Por exemplo, se $\beta = 60^o$, ou $1/6$ de uma volta completa, a sétima semente estará alinhada com a primeira, a oitava com a segunda, etc. Veja na figura ao lado um exemplo desse caso com 12 sementes. Na ilustração a seguir exibimos o padrão da espiral que surge no caso em que $r = 0.123$. Note o aparecimento inicial de uma espiral que gradualmente se torna um padrão periódico.





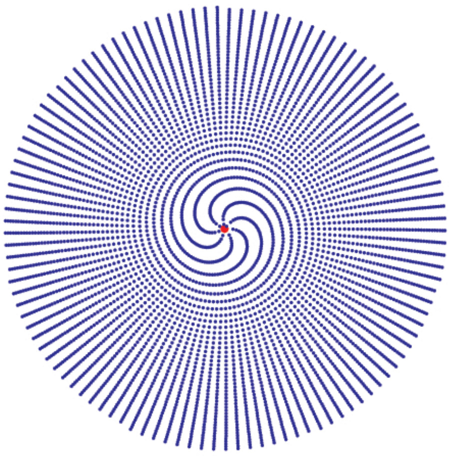
Esse tipo de padrão não preenche uniformemente. Para que isso não ocorra, r deve ser escolhido irracional. Podemos então nos perguntar o que acontece se r for ϕ, π ou mesmo $\sqrt{2}$. Estas questões podem ser respondidas observando a representação dos números irracionais em frações contínuas. Uma **fração contínua** é uma expressão da forma

$$f = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}} = [a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots],$$

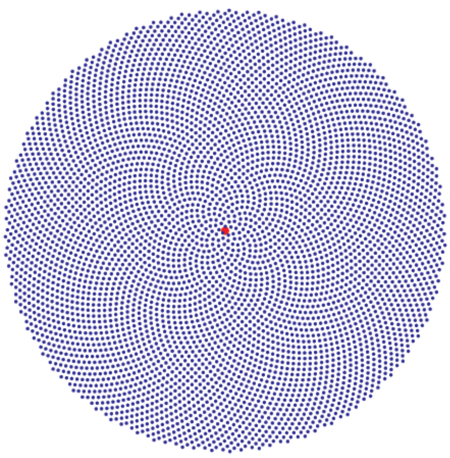
onde a_0 é um número inteiro e $a_1, a_2, \ldots$ são números inteiros positivos. Um resultado importante é que qualquer número real pode ser escrito como uma fração contínua e, se o número for racional a expansão é *finita*. Como exemplo, vamos calcular primeiramente a fração contínua do número racional $10/7$: $10/7 = 1.4185\ldots$ e, portanto, $10/7 = 1 + 0.4185\ldots = 1 + 1/(1/0.4185\ldots) = 1 + 1/2.3333\ldots$; agora, $2.3333\ldots = 2 + 0.3333\ldots = 2 + 1/(1/0.3333\ldots) = 2 + 1/3$, ou seja, $10/7 = 1 + 1/(2 + 1/3) = [1; 2, 3]$. Aplicando o mesmo procedimento para π temos: $\pi = 3.1415\ldots = 3 + 0.1415\ldots = 3 + 1/(1/0.1415\ldots) = 3 + 1/7.0625\ldots$; agora, $7.0625\ldots = 7 + 0.0625\ldots = 7 + 1/(1/0.0625) = 7 + 1/15.9965\ldots$; continuando, $15.9965\ldots = 15 + 0.9965\ldots = 15 + 1/(1/0.9965\ldots = 15 + 1/1.0034\ldots$, etc; portanto, $\pi = [3; 7, 15, 1, \ldots]$. Para o número de ouro ϕ e a raíz quadrada de 2 temos as seguintes frações contínuas: $\phi = [1; 1, 1, 1, \ldots]$ e $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$.

A partir das frações contínuas podemos obter aproximações racionais, chamadas de **frações re-**

duzidas. Para o caso de ϕ temos, $[1] = 1$, $[1,1] = 2$, $[1,1,1] = 3/2$, $[1,1,1,1] = 5/3$, $[1,1,1,1,1] = 8/5$, $[1,1,1,1,1,1] = 13/8$, $[1,1,1,1,1,1,1] = 21/13$, etc. Observe a ocorrência da seqüência de Fibonacci. Para π as primeiras frações reduzidas são, $[3] = 3$, $[3,7] = 22/7$, $[3,7,15] = 333/106$ e $[3,7,15,1] = 355/113$. Quando os números da expansão se tornam grandes, a fração reduzida se aproxima muito rápido de um número racional e assim, após algumas voltas, percebemos facilmente a formação de um ciclo, o que é indesejável para a natureza, pois não há preenchimento com as sementes. Portanto, o melhor r a ser escolhido deve ser ϕ, pois os termos da sua fração contínua, $[1,1,1,1,1,\ldots]$, são os menores possíveis, e consequentemente, os números das suas frações reduzidas são os menores também. Podemos observar esta análise a partir das figuras a seguir. Primeiramente, para $r = \pi$,



Observe o aprecimento de uma espiral, como previsto na discussão acima. O preenchimento não se torna uniforme. Já para $r = \phi$, o preenchimento é muito mais uniforme, como ilustrado abaixo.



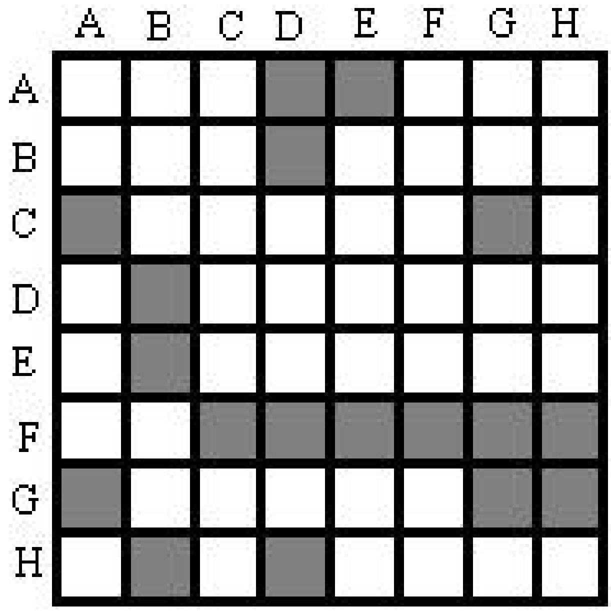
Compare a simulação acima com a foto exibida no início do artigo. Deixamos para o leitor a análise do caso $r = \sqrt{2} = [1,2,2,2,\ldots]$.

Referência: M. Naylor, Golden, $\sqrt{2}$, and π Flowers: A Spiral Story, *Mathematics Magazine*, **75**, 163–172, 2002.

Marcela Asato, Graduada em Matemática Aplicada – UNICAMP & Lúcio T. Santos, IMECC – UNICAMP

Passatempo Matemático

Cruzadas Naturais



Horizontais – A: Produto do número de dois algarismos uv pelo número de dois algarismos vu onde u e v são as raízes da equação $x^2 - 5x + 4 = 0$; o menor primo de três algarismos não nulos distintos. B: O maior quadrado perfeito de três algarismos; $2008 \cdot \sin 30^o$. C: O maior número palíndromo de cinco algarismos formado com três algarismos diferentes; o único número primo par. D: O menor número perfeito; o período da dízima que representa a fração $1/7$. E: O menor expoente na decomposição de 1400 em fatores primos; o produto do segundo número em D horizontal por 3. F: O número das dezenas de 709. G: O resultado da adição na base 3: $(10121)_3 + (2112)_3$. H: O número diferente de zero que se escreve do mesmo modo em qualquer sistema posicional de base b, qualquer que seja b; o menor múltiplo de todos os números naturais; o menor número formado pelos algarismos dos quatro menores divisores de 28.

Verticais – A: O maior primo menor que 60; o quadragésimo-segundo termo da progressão aritmética de razão 15 e primeiro termo igual a 2; o elemento neutro da multiplicação. B: A diferença entre a soma dos divisores de 769 e 1; os dois últimos algarismos da raiz quadrada de 492804. C: O número palíndromo de cinco algarismos que é múltiplo de 6969; os dois últimos algarismos de 10^2. D: O número em romanos $DCCXLII$ no sistema decimal; o algarismo das unidades de F horizontal. E: O número 1403 escrito na base 9; o menor primo de dois algarismos. F: O produto de 5 pelo cubo de 13; os dois últimos algarismos do número 100, quando escrito na base 7. G: Um quinto de 100; um número cuja soma de seus algarismos é 12; o quadrado do menor primo. H: O mínimo múltiplo comum de 43 e 797; o maior primo com apenas um algarismo.

M. Carmelina Fernandes & M. Lúcia B. Queiroz, LEM – UNICAMP

Desafio Matemático

Torneio de Tênis

Quatro casais participarão de um torneio de tênis em duplas mistas. Pelo regulamento do torneio as duplas devem ser formadas por um homem e uma mulher e cada participante não pode jogar com ou contra qualquer outro participante mais de uma vez. O torneio será realizado em três dias sucessivos com duas partidas diárias. Distribua os participantes nas seis partidas, seguindo as condições do regulamento.

Extraído do livro "Amusements in Mathematics" de H.E. Dudeney

Primos

Sabemos, desde criança, que um número natural $p > 1$ é um número primo se p tiver exatamente dois divisores positivos; caso contrário, o número p é chamado número composto. O Teorema Fundamental da Aritmética garante que todo número natural $n > 1$ pode ser representado, de modo único, como um produto de números primos. O príncipio multiplicativo permite concluir que se $n = p_1^{\alpha_1}\ p_2^{\alpha_2}\ \cdots\ p_r^{\alpha_r}$, onde $p_1, p_2, \ldots, p_r$ são números primos, então o número de divisores de n é dado por $(\alpha_1 + 1)\ (\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$.

Desafio 1: Um número natural n possui exatamente três divisores se e somente se $n = p^2$, onde p é um número primo. Estes números são chamados primos em segundo grau.

Em geral, é bem complicado saber se um dado número natural é primo ou não, especialmente se sua representação na base 10 exigir centenas de algarismos. Um problema antigo mas interessante (não sei se está completamente resolvido) é o seguinte: entre os números naturais que se escrevem na base 10, usando um único díigito, quais são primos? É claro que se este dígito for diferente de 1, o tal número é composto. E, entre os que se escrevem usando apenas o dígito 1, vale o seguinte: se $A = 111\ldots1$, com $n > 1$ algarismos iguais ao dígito 1 e n composto, então A também é composto. De fato, se $n = a.b$ com $a, b \geq 2$ então: $A = 10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10 + 1 = [10^{a(b-1)} + 10^{a(b-2)} + .. + 10 + 1] \times [10^{a-1} + 10^{a-2} + \cdots + 10 + 1]$. Verifique com cuidado tal fatoração, escreva alguns exemplos e constate que A é composto. Para $n > 1$, primo, pelo que me consta, existem muitas respostas parciais, mas o problema continua aberto.

Desafio 2: Quais são os valores de n primo, para os quais A é composto? É claro que o computador pode ajudar, mas e a reposta completa? E, para teminar, deixo o seguinte problema (também antigo), dividido em duas partes:

Desafio 3: (i) Encontre o menor múltiplo de 84 que se escreve na base 10 usando apenas os dígitos 6 e 7; (ii) Mostre que todo número natural, que não é múltiplo de 5, tem um múltiplo que se escreve na base 10 usando apenas os dígitos 6 e 7. Não conheço a demonstração, se é que ela existe!

Antonio C. Patrocínio, LEM – UNICAMP

Cursos no LEM

MAT 0148: Atividades com Blocos Lógicos na Educação Infantil e Séries Iniciais

Professora: Renata F. S. Bosso, CEFEM, Americana.
Horário: 16/Agosto/2008, 8h30min – 17h30min.
Inscrições: 07/Julho a 01/Agosto/2008.

MAT 0037: Trigonometria do Triângulo Retângulo, Funções Trigonométricas e Problemas de Aplicação

Professora: Dra. Maria Lúcia B. Queiroz, LEM – UNICAMP.
Horário: 16/Agosto/2008, 8h30min – 17h30min.
Inscrições: 07/Julho a 01/Agosto/2008.

MAT 0093: A Matemática nas Séries Iniciais por Meio de Atividades Interdisciplinares

Professor: Luiz Augusto Arlindo, E.E. Prof. Carlos F. de Paula, Campinas.
Horário: 27/Setembro/2008, 8h30min – 17h30min.
Inscrições: 01/Agosto a 05/Setembro/2008.

MAT 0166: Atividades Interdisciplinares Envolvendo Matemática e Física

Professor: Dr. Andre K. T. Assis, IF – UNICAMP.
Horário: 27/Setembro/2008, 8h30min – 17h30min.
Inscrições: 01/Agosto a 05/Setembro/2008.

MAT 0018: Atividades com Material Dourado

Professora: Miriam S. Santinho, LEM – UNICAMP.
Horário: 18/Outubro/2008, 8h30min – 17h30min.
Inscrições: 05/Setembro a 07/Outubro/2008.

MAT 0163: A Matemática nos Esportes: Um Recurso de Apoio a Aprendizagem nas Aulas de Matemática

Professoras: Marília F. Souza, NIPEC – UNICAMP & Dra. Otília T. W. Paques, LEM – UNICAMP.
Horário: 18/Outubro/2008, 8h30min – 17h30min.
Inscrições: 05/Setembro a 07/Outubro/2008.

MAT 0168: Trabalho em Grupo: Vivência e Reflexões sobre sua Influência na Aprendizagem

Professora: Dra. Raquel N. M. Brumatti, PUC – Campinas.
Horário: 29/Novembro/2008, 8h30min – 17h30min.
Inscrições: 07/Outubro a 07/Novembro/2008.

MAT 100: Curso de Especialização em Matemática para Professores do Ensino Fundamental e Médio

Carga Horária: 360 horas.
Previsão de Início: Fevereiro/2009.
Previsão de Inscrição:. Novembro/2008.
Acompanhe as informações no sítio: `www.ime.unicamp.br/lem`

UNICAMP

Jornal do Professor de Matemática

Elaborado pelo Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Correspondência e Sugestões: LEM – IMECC – UNICAMP, Caixa Postal 6065, 13083–970, Campinas (SP). Telefone: (0**19) 3521–6017. E-mail: jpm@ime.unicamp.br. Editores: Lúcio T. Santos, M. Carmelina Fernandes, Claudina I. Rodrigues e Miriam S. Santinho. Os artigos assinados são de responsabilidade dos autores. É permitida a reprodução de artigos, desde que seja citada a fonte.