FUNÇÕES: CORRIDA DE OBSTÁCULOS

Ariane da Silva Paiva aripaiva91@gmail.com
José Felipe Blasco, josefelipeblasco@gmail.com
Maria Inês Sparrapan Muniz, sparrapanmuniz@gmail.com
Maria Miriam Sampieri Santinho, msantinho@uol.com.br

OBJETIVOS:

- Promover a compreensão da linguagem formal algébrica no estudo de funções.
- Rever as noções de domínio, contradomínio e imagem.

RESUMO: A compreensão do conceito de função, segundo Bergeron e Herscovics[1], se dá em quatro níveis: compreensão intuitiva, matematização inicial, abstração e formalização. Esta atividade se propõe a trabalhar no nível de formalização, promovendo o uso da linguagem simbólica e da notação de função. Como recurso didático utilizaremos inicialmente um jogo denominado Corrida de Obstáculos. Este jogo possibilitará a escolha de uma expressão algébrica como ponto de partida para formalizar a linguagem matemática relativa ao estudo de funções. Além disto, se for do interesse do professor, uma avalição diagnóstica sobre as operações em Z e em Q, poderá ser realizada a partir de registros das jogadas dos alunos que solicitamos serem feitos no desenvolvimento do jogo.

MATERIAL NECESSÁRIO PARA O JOGO CORRIDA DE OBSTÁCULOS:

Figura 1: Tabuleiro
Fonte: http://educando.net.br/wp-content/uploads/2012/09/tabuleiro2.jpg

01Tabuleiro (ver ampliado na página 7);
01 marcador ou peão para cada jogador;
01 dado;
18 cartas de número positivo (três de cada um dos seguintes valores: +1,+2,+3,+4,+5,+6);
18 cartas de números negativos (três de cada um dos seguintes valores -1, -2, -3, -4, -5,-6);
04 cartas com zero;
03 ou 04 jogadores;

Algumas sugestões aos alunos para o bom andamento do jogo:

- Preservar o material utilizado;
- Respeitar a vez do outro e a ordem do jogo;
- Conferir se o colega andou a quantidade correta de casas;

[1] Bergron e Hercovicz citados em TINOCO, Lucia A. *Construindo o conceito de função no 1º grau*. Projeto Fundão Matemática – Instituto de Matemática – UFRJ.2002.

- Ajudar o colega quando ele tiver dificuldade com os cálculos.

PARTE 1 : O jogo

Através de um jogo será possível fazer uma avalição diagnóstica, a partir de registros das jogadas dos alunos, sobre as operações em Z e em Q.

DESENVOLVIMENTO:
1 - Organizar a sala em grupos de quatro alunos.

2 - Regras do jogo:
- As cartas são embaralhadas e colocadas nos respectivos lugares no tabuleiro, formando três montes, virados para baixo.
- Na primeira rodada, cada jogador com sua vez lança o dado e avança o número de casas igual ao obtido no dado; recolhe uma carta de um dos montes, à sua escolha.
- O valor da carta deve substituir a variável da expressão algébrica da casa onde seu peão está.
- Efetuam-se os cálculos e o resultado obtido indica o valor e o sentido do movimento; se for positivo, o peão do jogador avança o número correspondente de casas; se for negativo, recua o correspondente número de casas; se for zero, o peão não se desloca e o jogador passa a vez ao adversário.
- Se o peão cair numa casa que contém uma instrução, o jogador deverá executá-la nessa mesma jogada.
- A partir da primeira rodada não se usa mais o dado: cada jogador movimenta seu peão escolhendo uma carta executando a instrução da casa onde se encontra o peão segundo as regras acima.
- Vence o jogador que completar primeiro uma volta no tabuleiro.
- Caso um dos três montes de cartas se esgote antes do final do jogo, então as respectivas cartas devem ser embaralhadas e recolocadas no tabuleiro.

3 - Instruir para que os alunos anotem cada jogada como na tabela 1

Casa	Carta	Resolução	Resultado
2a + 3	4	2(4) + 3	11

Tabela 1: Registro das jogadas
Fonte: Própria

4- Orientar aos alunos para entregarem a sua tabela 1 preenchida com as jogadas efetuadas.

5 - A partir dos registros na tabela 1, poderá avaliar se o aluno tem domínio sobre:

- Operações com expressões numéricas

- Propriedade distributiva: $a(-3+2)$

- Simplificação: $\frac{2m}{m}$

- Divisão com frações: $\frac{1}{{}^{1}/_{n}}$

- Divisão por zero: $\frac{(b^2-1)}{(b-1)}$

É interessante discutir em sala, a partir da resolução dos registros, as dificuldades dos alunos, formalizando cada tópico destacado anteriormente.

Parte 2: Formalizando a linguagem matemática

DESENVOLVIMENTO

Na tabela constituída ao jogar, devemos enfatizar dois aspectos:

- A **relação de dependência** da carta retirada com o resultado obtido e com a casa em que se está.
- A **noção de variável** ou seja, à medida que retiramos uma carta, conforme a expressão que aparece na casa, obtemos um valor do resultado.

Assim fica explícita a relação de dependência entre variáveis, a partir de uma dada equação.

Casa	Carta	Resolução	Resultado
2a + 3	4	2(4) + 3	11

Tabela 1: Registro das jogadas
Fonte: Própria

1 – Iniciar escolhendo uma expressão algébrica do jogo, por exemplo: ***b – 4*** (figura 2)

Casa	Carta	Resultado
b-4	-6	-10
b-4	2	-2

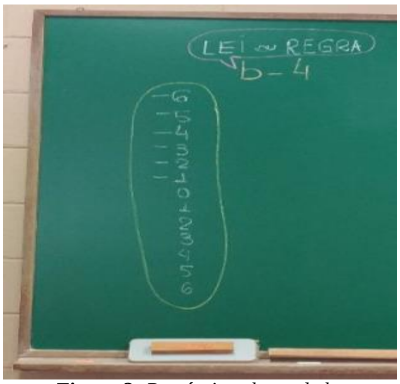


Figura 2: *Possíveis valores de b*
Fonte: Própria

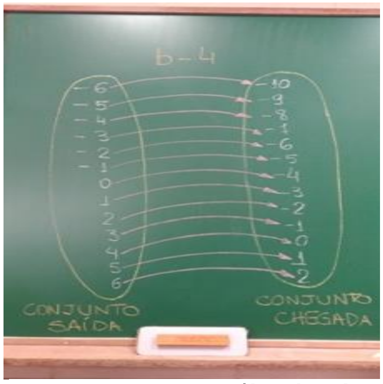


Figura 3: Conjuntos saída e chegada
Fonte: Própria

2- Analisar todas as possibilidades para os valores que ***b*** pode assumir (figura 2). Chamaremos estas possibilidades de conjunto de saída. (Figura 3)

3 – Substituir o valor de cada carta do jogo na expressão $\boldsymbol{b-4}$ (que se torna uma **regra ou lei**), obtendo resultados que compõem o conjunto de chegada. (Figura 3). Desta forma fica estabelecida uma relação entre o conjunto de saída, do item 2, com o conjunto de chegada.

Chamaremos os elementos do conjunto de saída genericamente, de x e os do conjunto de chegada de y e teremos $\boldsymbol{x-4=y}$, constituindo a **lei ou a regra** que determina esta relação.

Por exemplo, se a carta é -6 $(b=-6)$, aplicando a regra ***b – 4*** teremos $(-6)-4=-10$.
Chamando -6 de x e -10 de y, teremos $\boldsymbol{x-4=y}$ **.**

4 – Assim começamos a formalizar a linguagem matemática escrita, relativa às variáveis.

Trocamos o $\boldsymbol{b}$ por $\boldsymbol{x}$; a expressão $b - 4$ por $x - 4$ e obtemos $\boldsymbol{y = x - 4}$ (LEI OU REGRA).
Considerando a regra $\boldsymbol{y = x - 4}$ temos uma **relação** entre dois conjuntos.
O conjunto de saída receberá o nome de ***domínio (D)*** e o conjunto de chegada de ***imagem (I)*** (Figura 4). Neste caso o **domínio (D) e o contradomínio (CD)** que é igual ao conjunto **imagem (I)**, são discretos e finitos.

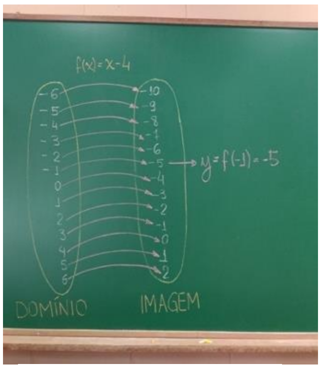


Figura 4: Domínio e Imagem
Fonte: Própria

5- Tomemos outras expressões do jogo,

A expressão $2m/m$ (Figura 5 e 6)

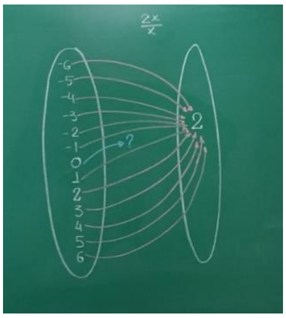


Figura 5: Relação algébrica
Fonte: Própria

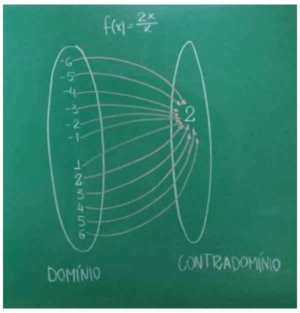


Figura 6: Função
Fonte: Própria

5 – Podemos verificar que cada elemento x do domínio é associado a um único elemento y do conjunto imagem por uma regra, desta forma, esta relação é uma ***função***. Denominamos x e y as **variáveis** da função; sendo x denominada a variável livre e y a variável dependente.

Neste caso a lei $\boldsymbol{x - 4}$ é **função**. Para obtermos o y aplicamos a função ao x.

Portanto o y é igual a função aplicada ao x, que se escreve matematicamente desta forma: $\boldsymbol{y = f(x) = x - 4}$.

Por exemplo se $x = -1$ então para obtermos o y faremos $y = -1 - 4 = -5$.

Assim $y = f(-1) = -5$. Ou, para obtermos -5 aplicamos a função no -1.

6 – Dado um valor para y, encontrar o correspondente valor de x. (Figura 7)
Se $y = -8$ então a função aplicada ao x é igual a -8.
Assim $f(x) = -8$ ou $x - 4 = -8$ então $x = -4$.

Comentário: É importante para o aprendizado do aluno trabalhar também com outras expressões do jogo, explorando o fato de que podemos determinar uma variável a partir do conhecimento de outra.

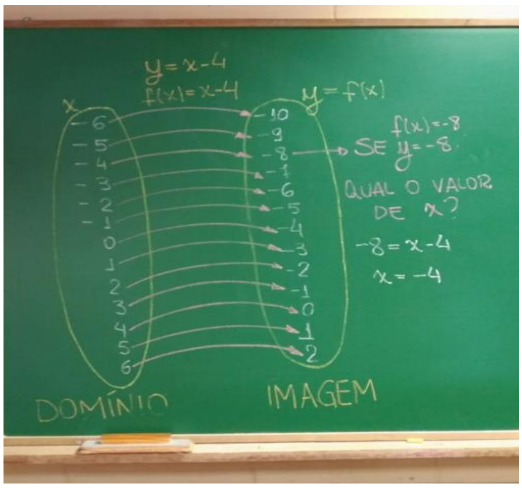


Figura 7: Função
Fonte: Própria

Explicar a diferença entre o conjunto contradomínio e o conjunto imagem, pois a partir da construção feita a partir do jogo, é trabalhado apenas o contradomínio igual a imagem.

O conjunto de chegada pode ser ampliado para Z. Q ou R (mantendo o mesmo domínio), e a relação continuará sendo função. Este conjunto ampliado será denominado **contradomínio (CD)** e o conjunto imagem está contido nele.

7 – Ampliar o domínio e o contra domínio:

a) Se colocar o número 7 no conjunto saída, o que deve ser feito para a lei $(x - 4)$ continuar caracterizada como função?
Deve-se acrescentar o 3 no conjunto chegada, a partir disso o conjunto saída passa a ser o domínio (D) e o conjunto chegada $CD = I$.(Figura 8)

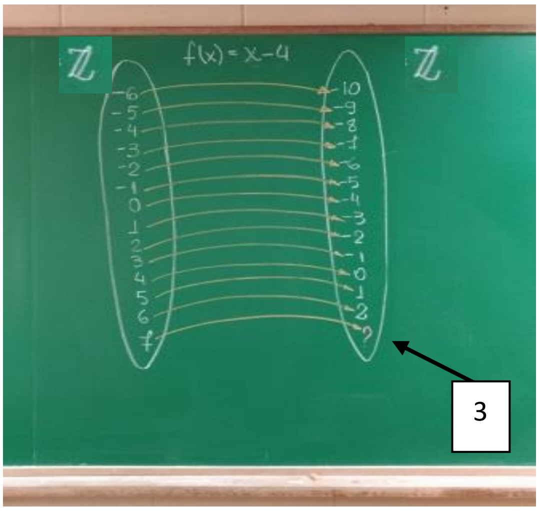


Figura 8: Novo Domínio
Fonte: Própria

b) E se expandir o conjunto de saída para o conjunto Z, considerando a mesma lei $x - 4$? *Deve-se considerar o conjunto de chegada como sendo Z para esta lei continuar a ser função.*

c) Seja a lei $\frac{b^2-1}{b-1}$ e o domínio Z, o que deve ser feito para esta lei ser caracterizada função? *Deve-se retirar o 1 do conjunto de saída.* $D = Z - \{1\}$

d) Se colocar -15 no conjunto "conjunto de chegada" sem alterar o conjunto de saída, o que deve ser feito para a lei $(x - 4)$ continuar sendo uma função? *A lei continuará sendo uma função, embora o elemento (-15) esteja sobrando no conjunto de chegada ou seja, não tenha correspondente no conjunto de saída. Neste caso o conjunto imagem é diferente do contradomínio.*

e) E se expandir o contradomínio para o conjunto Z?
A lei continuará sendo uma função, como explicado no item anterior.(Figura 9)

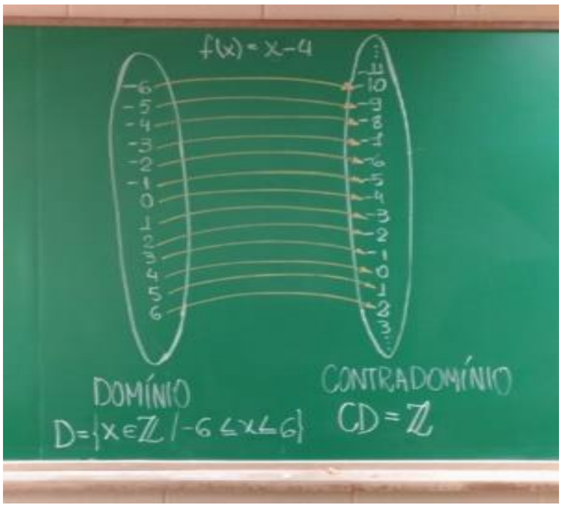


Figura 9: Expansão do CD
Fonte: Própria

8 - Analisar a função $f(x) = x - 4$, para $x = 4$.
Teremos o zero da função.

9 - Por fim e não menos importante destacamos que "*Função é uma relação estabelecida entre dois conjuntos, denominados domínio e contradomínio, que associa a cada elemento do domínio um único elemento do contradomínio*".

E espera-se que o aluno compreenda a definição escrita formalmente nos livros didáticos:

Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função de A em B é uma regra que diz como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

Usamos a seguinte notação:

$$f: A \rightarrow B \qquad \text{ou} \qquad A \xrightarrow{f} B$$
$$x \quad y = f(x) \qquad\qquad x \quad y = f(x)$$

Dizemos: f é uma função de A em B.

Considerações finais

A ideia de função e sua linguagem matemática, embora possa parecer simples, não é fácil de ser compreendida pelos alunos. Assim este passo a passo possibilita a eles a generalização (ou formalização) desta linguagem utilizada no estudo de função.

Veja no arquivo anexo "Funções – considerações" outros aspectos deste tema, para uma leitura complementar que pode ser bastante interessante para o professor.

Referências

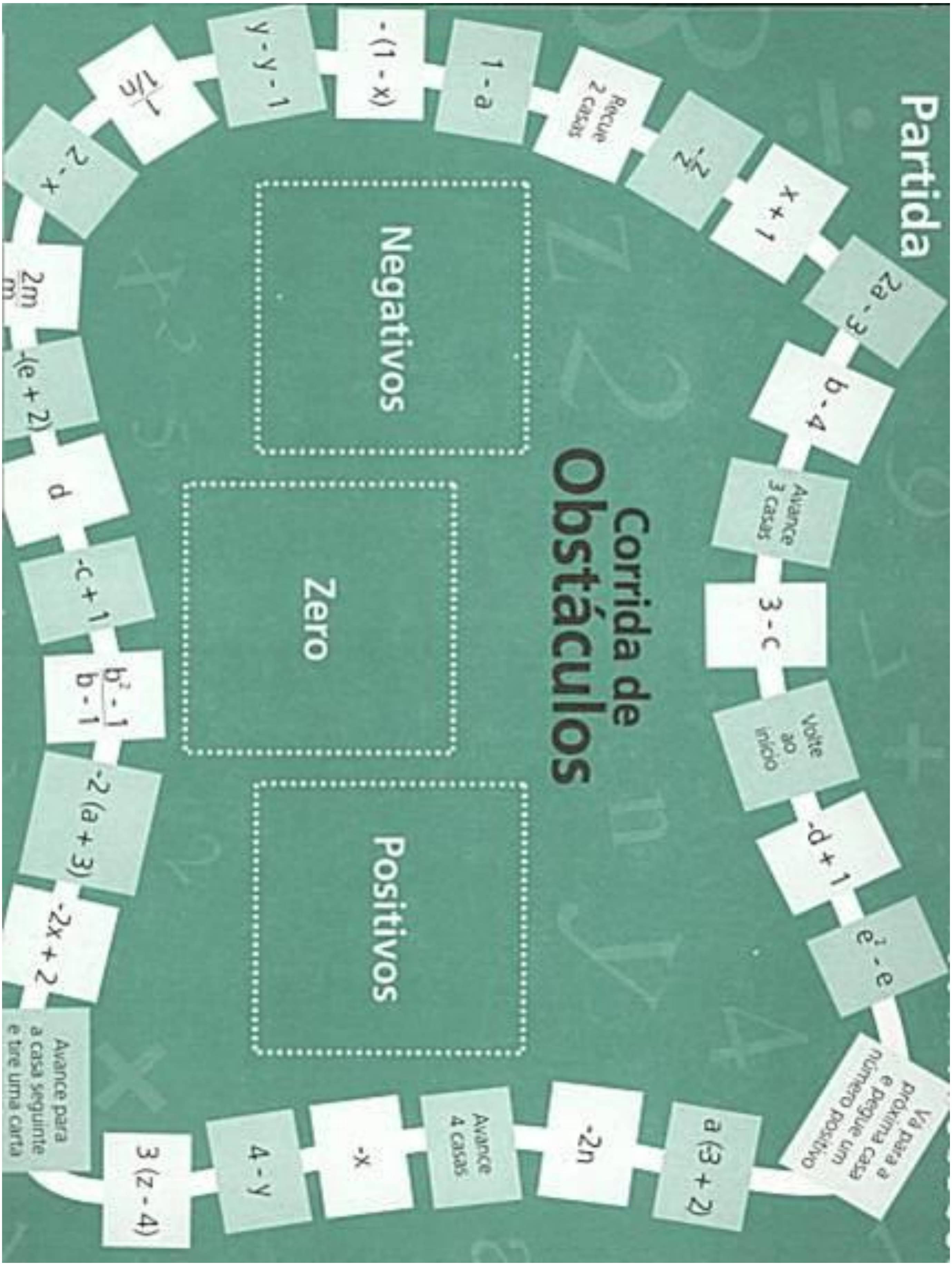
DANTE. Luiz Roberto. *Matemática contexto e aplicações*. Editora Parma LTDA. São Paulo 2003.

ELON. Lages L. Meu professor de Matemática.

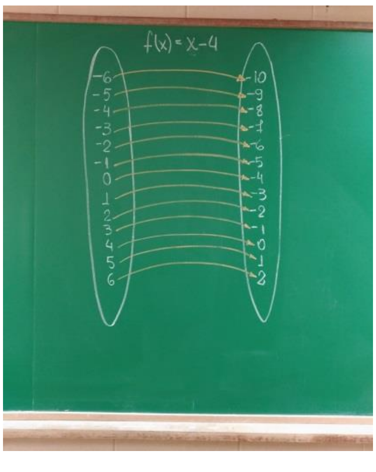
TINOCO, Lucia A. *Construindo o conceito de função no 1° grau*. Projeto Fundão Matemática – Instituto de Matemática – UFRJ.2002.

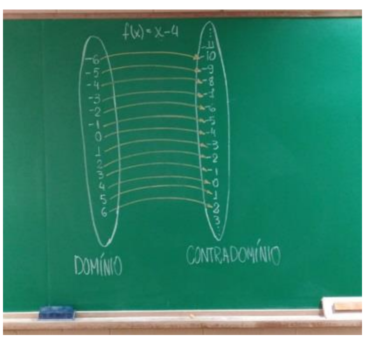
Autores:

Ariane da Silva Paiva aripaiva91@gmail.com Licencianda em Matemática/Unicamp e aluna colaboradora do LEM
José Felipe Blasco, josefelipeblasco@gmail.com Licenciando em Matemática/Unicamp e aluna colaboradora do LEM
Maria Inês Sparrapan Muniz, sparrapanmuniz@gmail.com Professora colaboradora do LEM
Maria Miriam Sampieri Santinho, msantinho@uol.com.br Professora colaboradora do LEM



Partida
Corrida de
Obstáculos
Negativos
Zero
Positivos
x + 1
Recue 2 casas
1 - a
- (1 - x)
y - y - 1
-(e + 2)
d
-c + 1
-2 (a + 3)
-2x + 2
Avance para a casa seguinte e tire uma carta
3 (z - 4)
4 - y
-x
Avance 4 casas
-2n
a (-3 + 2)
Vá para a próxima casa e pegue um número positivo
-d + 1
Volte ao início
3 - c
Avance 3 casas
b - 4
2a - 3


f(x) = x-4
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
-10
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2


f(x) = x-4
DOMÍNIO
CONTRADOMÍNIO