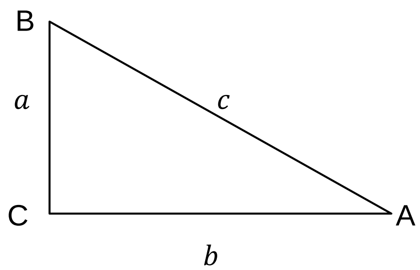
CAPÍTULO 9 - TRIÂNGULOS RETÂNGULOS (GOUGU)

O nono capítulo deste livro trata de problemas relacionados com triângulos retângulos e proporções entre triângulos retângulos semelhantes, com muita proximidade do que se conhece no ocidente como Teorema de Pitágoras.
Os 24 problemas podem ser divididos em três grupos.

I- Regra Gougu (teorema de Pitágoras)

Na figura abaixo, ABC denota um triângulo retângulo, sendo $\hat{C}$ o ângulo reto, a = gou (normalmente o cateto menor), b = gu (normalmente o cateto maior) e c = xian (a hipotenusa). Dois entre $a,\ b,\ c,\ a+b,\ b+c,$ $a+c,\ b-a,\ c-a,\ c-b$ são dados, sendo solicitado que sejam encontradas as variáveis desconhecidas $a,\ b$ ou c. Há 36 possibilidades, mas quando eliminamos as redundantes, sobram 9 tipos. Os seis principais estudados no "Os Nove Capítulos da Arte Matemática" são:

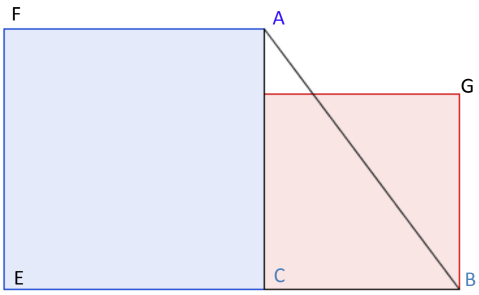


1- dados a e b, encontrar c (problemas 1 e 5).
2- dados b e c, encontrar a (problemas 2, 3 e 4).
3- dados a e $c - b$, encontrar b e c (problemas 6 a 10).
4- dados c e $b - a$, encontrar a e b (problema 11).
5- dados $c - a$ e $c - b$, encontrar $a,\ b$ e c (problema 12).
6- dados a e $b + c$, encontrar b e c (problema 13).

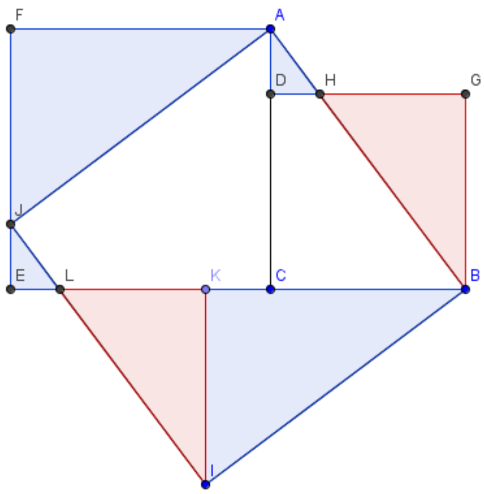
Comentários de Liu Hui sobre a Regra Gougu:

a) O lado menor (entre os lados ortogonais) é chamado gou e o maior lado é o gu. O lado oposto ao ângulo reto é chamado xian. Gou é menor que gu. Gou é menor que xian.

b) Faça em vermelho o quadrado sobre gou e em azul, o quadrado sobre gu. Faça as faltas e os excessos mutuamente substituídos nas posições correspondentes, deixando as outras partes inalteradas. Elas são combinadas para formar o quadrado sobre xian. Extraia a raiz quadrada para obter xian. Na figura abaixo, AFEC é o quadrado (vermelho) sobre gu de ΔABC e DCBG é o quadrado (azul) sobre gou. Estas duas áreas são iguais à área do quadrado ABIJ sobre xian, porque o ΔHGB (vermelho) é retirado e adicionado a LKI, e o ΔFJA (azul) e o ΔJEL (azul) são movidos para ΔKBI e ΔADH, respectivamente.



ΔHGB para ΔLKI (vermelhos)
ΔFJA para ΔKBI (azuis)
ΔJEL para ΔADH (azuis)



II- Relações proporcionais entre lados de triângulos retângulos semelhantes

1- Problemas relacionados a um quadrado inscrito (problema 15) ou a um círculo inscrito (problema 16).

2- Problemas relacionados à agrimensura (problemas 17 a 20 e 22 a 24).

A Matemática tradicional chinesa deu enorme importância no estudo dos dois tipos de problemas acima.

III- Números Gougu (ternas pitagóricas)

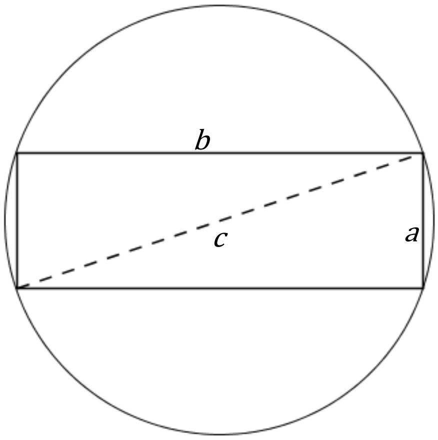
Constantes nos problemas 14 e 21, esses envolvem as ternas $a,\ b,\ c$, onde $c^2 = a^2 + b^2$ e $a,\ b,\ c$ são números naturais. Esses dois problemas (14 e 21) especificamente usam as regras gerais das ternas pitagóricas enquanto que outros problemas usam exemplos de ternas pitagóricas.

Fizemos a escolha de alguns problemas que julgamos interessantes e não repetitivos e mantivemos a numeração original.

Problema 4 - É dado um tronco circular de 2 chi e 5 cun de diâmetro. Deve ser transformado em uma prancha retangular de espessura igual a 7 cun. Qual é a largura da prancha?

Resposta: 2 chi 4 cun

Método: Eleve o diâmetro, 2 chi 5 cun ao quadrado, subtraia o quadrado de 7 cun e extraia a raiz quadrada dessa diferença. Esta é a largura da prancha.



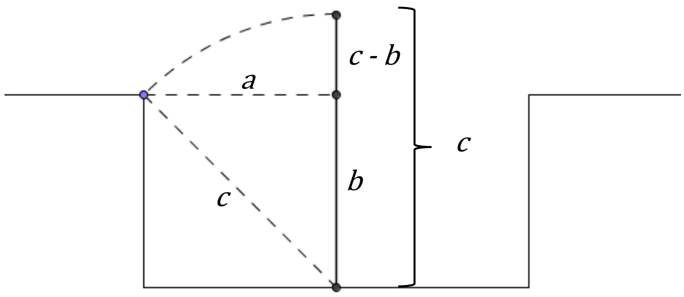
Ou seja, se a, b e c são como acima e sabendo que 1 chi = 10 cun, temos c = 25 cun e a = 7 cun. Pelo teorema de Pitágoras b^2 = 576 e assim, b = 24 cun ou 2 chi 4 cun.

Problema 6 - Dado um bambu no centro de uma lagoa de 1 zhang quadrado, é sabido que 1 chi de seu comprimento está acima da água. Quando o bambu é curvado para a margem, alcança-a com sua extremidade. Qual é a profundidade da lagoa e qual o comprimento do bambu?

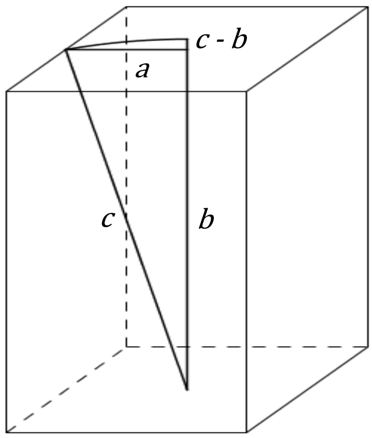
Resposta: A profundidade da lagoa é 1 zhang e 2 chi e o bambu mede 1 zhang e 3 chi.

Método: Quadre metade do lado da lagoa. Disso subtraia o quadrado de 1 chi que é o comprimento acima da água. Divida o resto por duas vezes o comprimento acima da água para obter a profundidade da lagoa. A soma desse resultado e da altura acima da água é o comprimento do bambu.

Ou, sejam a, a metade do lado da lagoa, b a profundidade da lagoa e c o comprimento do bambu, como na figura abaixo:



Nesse caso, a e $c - b$ são conhecidos. O método dá a altura da lagoa, como na figura por $b = \frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)}$ (*) e o comprimento do bambu por $c = b + (c - b)$.

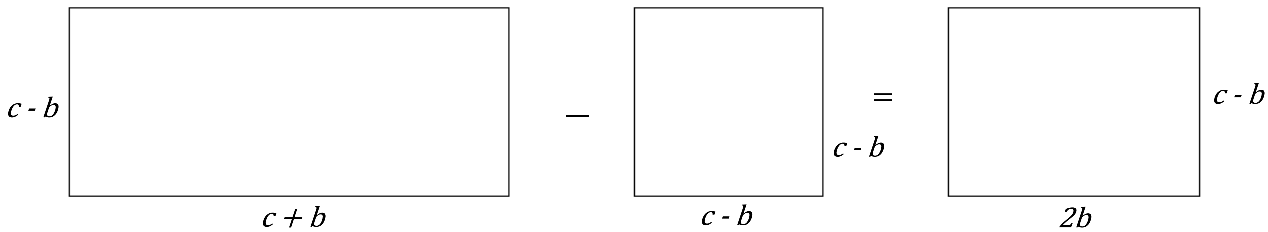


Representação tridimensional da lagoa.

Pela Regra Gougu $c^2 = a^2 + b^2$ ou $a^2 = (c - b)(c + b)$
Liu prova a fórmula acima (*) usando a equação

$$a^2 - (c - b)^2 = (c - b)(c + b) - (c - b)^2 = 2b(c - b)$$

que foi interpretada geometricamente pela figura abaixo (segundo Os Elementos de Euclides proposições 5 e 6 Livro II).



Atualmente podemos resolver o problema usando o teorema de Pitágoras, como segue:

Para a = 5 chi, c - b = 1 chi

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 5^2 + (c - 1)^2$$
$$c = 13\ chi$$

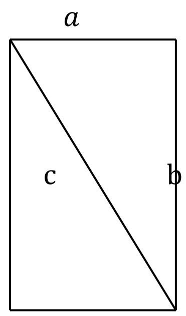
O bambu (c) mede 13 chi = 1 zhang 3 chi e a profundidade da lagoa (b) é 12 chi = 1 zhang 2 chi.

Problema 11 - Dada uma porta cuja altura é 6 chi 8 cun maior que sua largura. A diagonal é 1 zhang. Calcule sua altura e sua largura.

Resposta: a largura é 2 chi 8 cun e a altura é 9 chi 6 cun.

Método: Tome o quadrado de um zhang em cun (1 zhang ao quadrado = 100 cun ao quadrado = 10000 cun quadrados). Subtraia disso duas vezes o quadrado da metade da diferença dada. Tome metade do resto e extraia sua raiz quadrada. Disso subtraia metade da diferença dada para obter a largura da porta. Somando metade da diferença dada à raiz quadrada dá a altura da porta.

Ou: sejam a largura da porta a, a altura, b e a diagonal, c.



A largura da porta é:

$a = \sqrt{\frac{c^2 - 2\,(\frac{1}{2}\,(b-a))^2}{2}} - \frac{1}{2}\,(b-a)$ e a altura da porta é:

$b = \sqrt{\frac{c^2 - 2\,(\frac{1}{2}\,(b-a))^2}{2}} + \frac{1}{2}\,(b-a)$.

c = 1 zhang = 100 cun e $(b - a) =$ 6 chi 8 cun = 68 cun.

Logo $b =$ 9 chi 6 cun e $a =$ 2 chi 8 cun.

Solução atual: pode-se resolver este problema usando o teorema de Pitágoras

$$\mathrm{c = 100\ cun \quad e \quad b - a = 68\ cun, sendo} \quad c^2 = a^2 + b^2$$
$$100^2 = a^2 + (a + 68)^2$$
$$10000 = a^2 + a^2 + 136a + 4624$$

$$a^2 + 68a - 2688 = 0$$
$$\mathrm{a} = 28 \text{ cun} \quad \text{e} \quad \mathrm{b} = 96 \text{ cun}$$

Problema 12 - São dadas uma porta, de altura e largura desconhecidas, e uma vara de bambu de comprimento desconhecido. A vara de bambu é 4 chi maior que a largura da porta e 2 chi maior do que a altura, e mede o mesmo que a diagonal. Quais são a altura, largura e diagonal da porta?

Resposta: a largura é 6 chi, a altura é 8 chi e a diagonal 1 zhang.

Método: Dobre o produto dos dois excessos (da vara de bambu) e extraia sua raiz quadrada. O resultado mais o excesso (da vara) sobre a altura é a largura. O resultado mais o excesso (da vara) sobre a largura é a altura. O resultado mais ambos excessos é a diagonal da porta.

Método de Liu Hui: Considere largura, altura e diagonal da porta respectivamente como sendo gou, gu e xian de um triângulo retângulo. Os quadrados sobre gou e gu podem ser postos dentro do quadrado do xian. O quadrado sobre gou é parcialmente coberto pelo gnômom azul, deixando um quadrado amarelo. A soma das áreas dos dois retângulos sobrepostos entre os dois gnômons (o azul e o branco) é igual à área do quadrado amarelo. Cada um dos retângulos apresenta comprimento igual à diferença entre xian e gou. Então, o dobro do produto dessas duas diferenças é a área do quadrado amarelo. Extraia a raiz quadrada para obter o lado. A largura do gnômom azul externo é igual à diferença entre xian e gu, a cada um adicionado (o lado do quadrado amarelo) para obter gou.

Ou: a) São conhecidos $c - a$ e $c - b$ e devemos encontrar $a,\ b$ e c, sendo gou (a), a altura, gu (b) e a diagonal, xian (c).

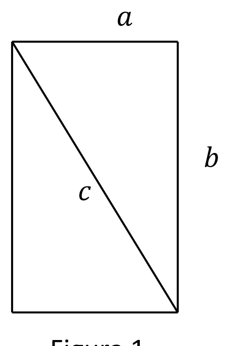


Figura 1

Pelo Método e de acordo com a figura 1, temos:

$$a = \sqrt{2(c-a)(c-b)} + (c-b)$$
$$b = \sqrt{2(c-a)(c-b)} + (c-a)$$
$$c = \sqrt{2(c-a)(c-b)} + (c-a) + (c-b)$$

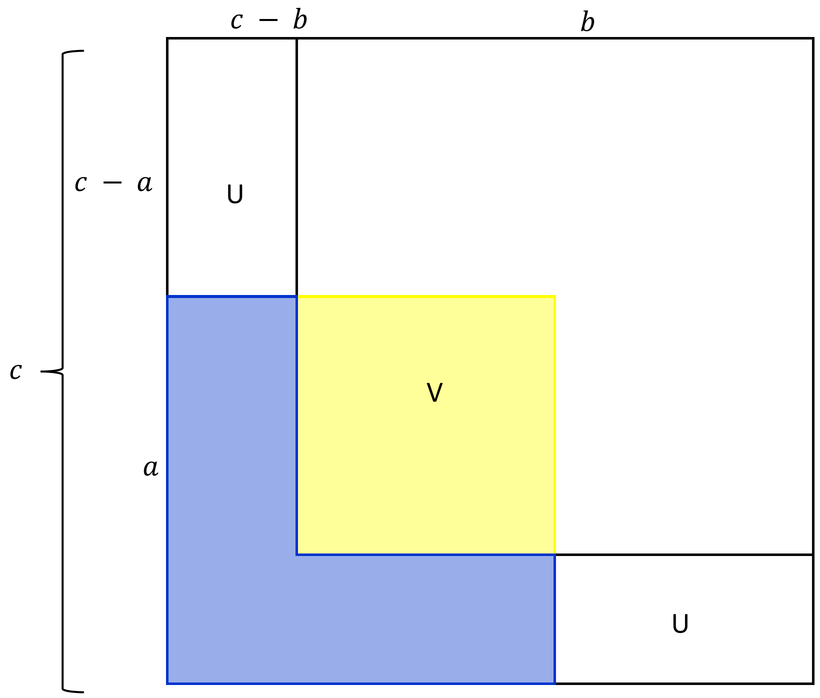


Figura 2
Diagrama para a fórmula 2U = V

b) Os dois gnômons (completos) ocupam área de a^2 e b^2, respectivamente. No diagrama acima (Figura 2). De fato, Liu Hui afirma que 2U = V, de fato,

$2U = 2(c-b)(c-a) = (a-(c-b))^2 = (a+b-c)^2 = V$.

c) Então a largura da porta é

$a = (a+b-c)+(c-b) = \sqrt{2(c-a)(c-b)} + (c-b)$.

Solução atual:

Sejam x (comprimento do bambu), a (largura da porta), b (altura da porta) e c (diagonal da porta).

$$x = c \ , \ x = b + 2 \text{ e } x = a + 4,$$

$$a = x - 4 \text{ e } b = x - 2$$

Pelo teorema de Pitágoras $c^2 = a^2 + b^2$

$$x^2 = (x-4)^2 + (x-2)^2$$
$$x^2 = x^2 - 8x + 16 = x^2 - 4x + 4$$
$$x^2 - 12x + 20 = 0$$

$x = 10$, uma vez que, se $x = 2$, acarreta $a = -2$, logo
$c = 10$ chi ou 1 zhang, $b = 8$ chi e $a = 6$ chi.

Problema 13 - É dado um bambu cuja altura é 1 zhang. Partindo-se em um determinado ponto, sua extremidade mais alta toca o solo à distância de 3 chi da base. Em que altura ele foi quebrado?

Resposta: $4\frac{11}{20}$ chi

Método: Quadre a distância da base e divida isto pela sua altura. Subtraia o resultado da altura e divida por dois a diferença encontrada para obter a altura da parte quebrada.

Método de Liu Hui:

a) Consideremos 3 chi, a distância entre o topo do bambu e a sua base, como sendo o gou; a altura da parte remanescente do bambu, como o gu e o comprimento da parte caída como xian. Encontre o gu usando o gou e a soma entre o gu e xian. Daí calcule o quadrado do gu para obter a área do gnômom que contém o quadrado do gou.

b) A altura total do bambu, 1 zhang é a soma do gu com xian. Divida o quadrado do gou por esta soma para obter a diferença entre gu e xian.

   Ou seja, conforme figura 3

$$\frac{a^2}{c+b} = c - b$$

c) Eleve a altura ao quadrado, ou seja, a soma das áreas dos quadrados sobre gu mais xian. Subtraia o quadrado da distância entre o topo caído e a base do quadrado da altura. Considere o resto como dividendo e o dobro da altura como divisor. O resultado da divisão será a altura do bambu onde ocorreu a quebra.

   Ou seja: $b = \frac{(c+b)^2 - a^2}{2(c+b)}$

   No caso como 1 zhang = 10 chi, $b = \frac{10^2 - 3^2}{2.10} = \frac{91}{20} = 4\frac{11}{20}$ chi

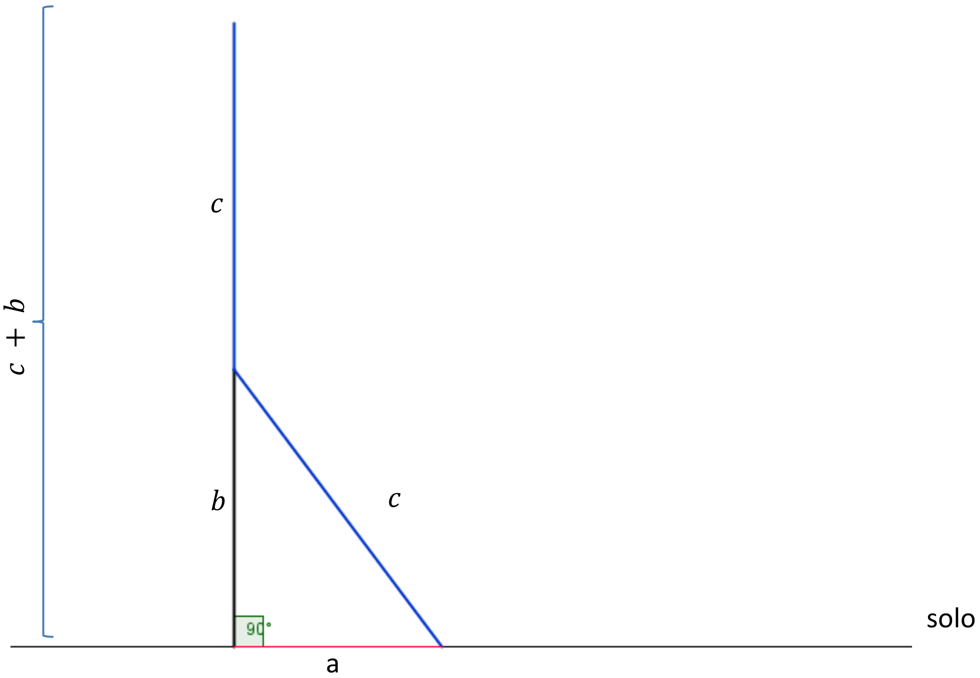


Figura 3

Página 487 do livro KANGSHEN, S. - CROSSLEY, J. - LUN, A, W, C, - (1999) *The Nine Chapters on the*

Solução atual:

Dados: $b + c = 10$ e $a = 3$

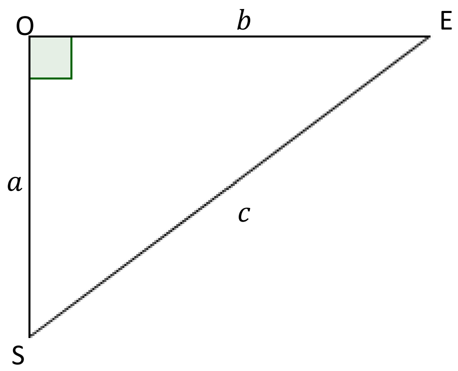
$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 3^2 + b^2$$
$$b = \sqrt{c^2 - 9}$$
$$b = \sqrt{10^2 - 20b + b^2 - 9}$$
$$b^2 = 91 - 20b + b^2$$
$$20b = 91$$
$$b = 4\frac{11}{20}\ \text{chi}$$

Problema 14 - Dois homens estão no mesmo local. A e B caminham à razão de 7 para 3, respectivamente. B caminha para leste. A caminha 10 bu sul, e depois caminha na direção nordeste até encontrar-se com B. Qual é a distância percorrida por cada um deles?

Resposta: B caminha $10\frac{1}{2}$ bu na direção leste e A caminha $14\ \frac{1}{2}$ bu diagonalmente para encontrá-lo.

Método: Divida pela metade a soma do quadrado de 7 e o quadrado de 3 que dá a razão de A caminhando diagonalmente. Subtraia isso do quadrado de 7. O resto é a razão de A caminhando para o Sul. A razão de B caminhando na direção Leste é 3 . 7. Mantenha o 10 bu na direção Sul. Multiplique isso pela razão de A, caminhando diagonalmente e novamente pela razão de B caminhando a Leste como dividendos. Divida cada um pela razão de A caminhando para o Sul e obtenha as distâncias pedidas.

Método Liu Hui: Use a distância caminhada ao sul como gou (a), a distância caminhada a leste como gu (b) e a diagonal como xian (c).



No esquema O é a origem da caminhada dos dois homens, E é o ponto a Leste alcançado e S é o ponto ao Sul, de onde o segundo homem parte em diagonal.

A taxa para gu é 3. A taxa para a soma de gu com xian é 7. A fim de obter a taxa para xian dividir o quadrado sobre gu pela soma de gou e xian para obter a diferença entre gou e xian.

Ou seja: $\frac{b^2}{a+c} = c - a$

Adicione este resultado à soma (gou + xian) e divida por dois para encontrar xian.

Ou seja: $\frac{\frac{b^2}{a+c}+a+c}{2} = c$

Subtraia a diferença entre xian e gou de xian para obter gou.

Ou seja: $c - \frac{b^2}{a+c} = a$

Se resultar em frações, devem ser reduzidas a um denominador comum, e simplificadas antes de as taxas exigidas serem determinadas.

Solução atual:

A e B caminham à razão de 7 para 3. A caminha $10 + c$, enquanto B caminha b.

$$\frac{10 + c}{b} = \frac{7}{3}$$
$$30 + 3c = 7b$$
$$b = \frac{30 + 3c}{7}$$

Pelo teorema de Pitágoras:

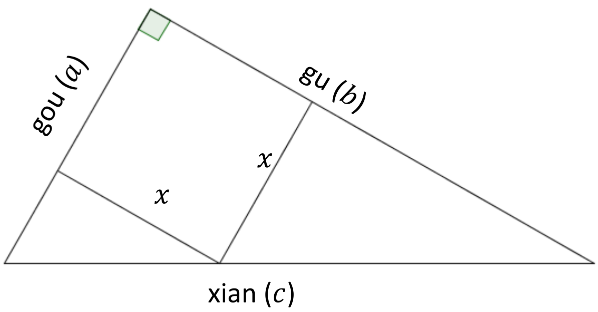
$$c^2 = 10^2 + \left(\frac{3\,(10+c)}{7}\right)^2$$
$$49c^2 - 180c - 5800 = 0$$

$$2c^2 - 9c - 290 = 0$$

$c = 14{,}5$ bu. Então, A caminha $24{,}5$ bu enquanto que B caminha $10{,}5$ bu, o que coincide com a terna pitagórica $20, 21, 29$, para os valores de $2a$, $2b$ e $2c$, respectivamente.

Problema 15 - É dado um quadrado inscrito em um triângulo retângulo em que gou mede 5 bu e gu mede 12 bu. Qual é a medida do lado do quadrado inscrito?

Resposta: o lado mede $3\frac{9}{17}$ bu



Método: o produto de gou e gu é o dividendo e a soma de gou e gu é o divisor. Divida dando o lado do quadrado.

Método Liu Hui: O produto entre gou e gu compreende três pares de figuras: vermelha, azul e amarela (conforme a figura 2). Rearranjando essas figuras obtemos a figura 3. A figura 3 é um retângulo de lados x e $(a + b)$, assim, $x\,(a + b) = ab$ ou $x = \frac{ab}{a+b}$:

$x : b = a : (a + b)$ e, também, $x : a = b : (a + b)$

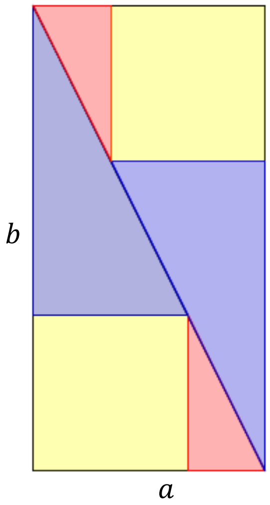


Figura 2

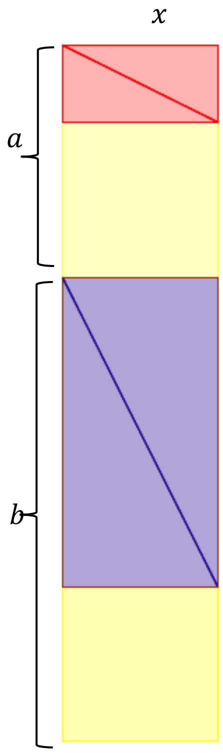
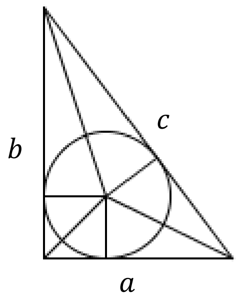
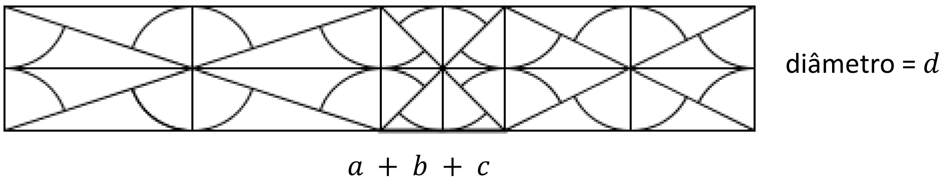


Figura 3

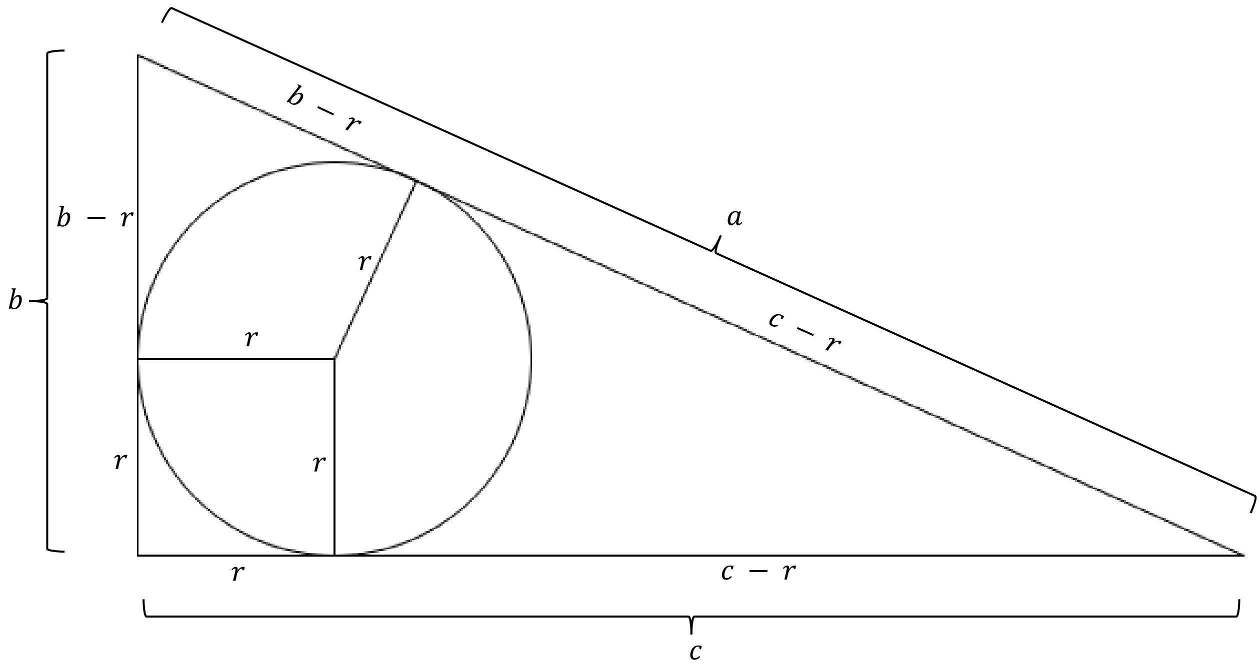
Solução atual: por semelhança de triângulos temos:
$\frac{12-x}{x} = \frac{x}{5-x}$, cuja solução é $x = \frac{60}{17}$.

Problema 16 - É dado um triângulo retângulo em que gou e gu são, respectivamente 8 bu e 15 bu. Qual é o diâmetro do círculo inscrito?
Resposta: 6 bu
Método: 8 bu é o gou, 15 bu é o gu. Encontre xian. Some esses três como divisor. Multiplique gou por gu. Tome duas vezes (o produto) como dividendo. Divida dando o diâmetro.
Método Liu Hui: O produto gou x gu bu (quadrado) é o dobro da área do triângulo retângulo. A segunda figura mostra esse triângulo recortado e duplicado. Rearranjando as seis partes do triângulo quatro vezes, aparece o retângulo, cuja altura é o diâmetro do círculo inscrito e a base é a soma gou mais gu mais xian (perímetro do triângulo) como na figura abaixo.
Logo 2 $(ab) = d\,(a+b+c)$



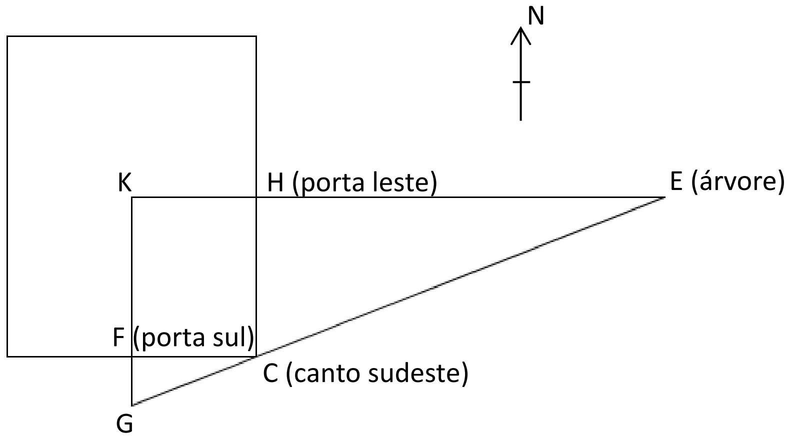


Solução atual:
O triângulo retângulo dado tem catetos medindo 8 bu e 15 bu, o que atende à terna pitagórica 8-15-17, então a hipotenusa é 17 bu.
O diâmetro de um círculo inscrito em um triângulo retângulo é igual à diferença entre a soma dos catetos e a hipotenusa (também conhecida por Liu Hui), conforme figura abaixo (http://www.dinamatica.com.br/search/label/C%C3%ADrculos%20inscritos%20no%20tri%C3%A2ngulo%20ret%C3%A2ngulo acesso em 01/02/2017) logo, $d = 15 + 8 – 17 = 6$ bu.



Problema 18 - Seja uma cidade que mede 7 li de leste a oeste, 9 li de sul ao norte, com portões abrindo no meio de cada lado. Há uma

árvore que dista 15 li do portão leste. Quantos bu a partir do portão sul uma pessoa pode enxergar a árvore?
Resposta: 315 bu.
Método: Tome a distância entre o portão leste e o canto sudeste e multiplique pela distância entre a porta sul e o canto sudeste como dividendo. A distância entre a árvore e a porta leste como divisor. Divida obtendo a distância procurada.
Método Liu Hui: Tome a distância entre o portão leste e o canto sudeste, que é 4 ½ li, como sendo a taxa gou, a distância, a partir do portão leste, 15 li, como a razão gu. A distância entre o portão sul e o canto sudeste, 3 ½ li, é o gu, dado. Com esses dados, encontre gou, isto é, o número pedido (em bu) a partir do portão sul.



Ou seja: $$distância\ pedida = \frac{gu\ dado\ x\ taxa\ gou}{razão\ gu}$$

$$distância\ pedida = \frac{\frac{lado\ leste}{2}\ x\ \frac{lado\ sul}{2}}{distância\ a\ partir\ do\ portão\ leste}$$

$$distância\ pedida = \frac{\frac{7}{2}\ x\ \frac{9}{2}}{15}$$

$$distância\ pedida = 315\ bu$$

Solução atual:

Pela figura nota-se a que ΔHCE e ΔFGC são retângulos e semelhantes, logo, sabendo que: $1\ li = 300\ bu;$

$$HC = \frac{7}{2} li = 1050\ bu; \quad FC = \frac{9}{2} li = 1350\ bu \quad e \quad HE = 15\ li = 4500\ bu$$

$$\frac{FG}{HC} = \frac{FC}{HE}$$

$$FG = \frac{FC \cdot HC}{HE}$$

$$FG = \frac{\frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2}}{15}$$

$$FG = \frac{21}{20}\ li = \frac{21}{20}.300\ bu$$

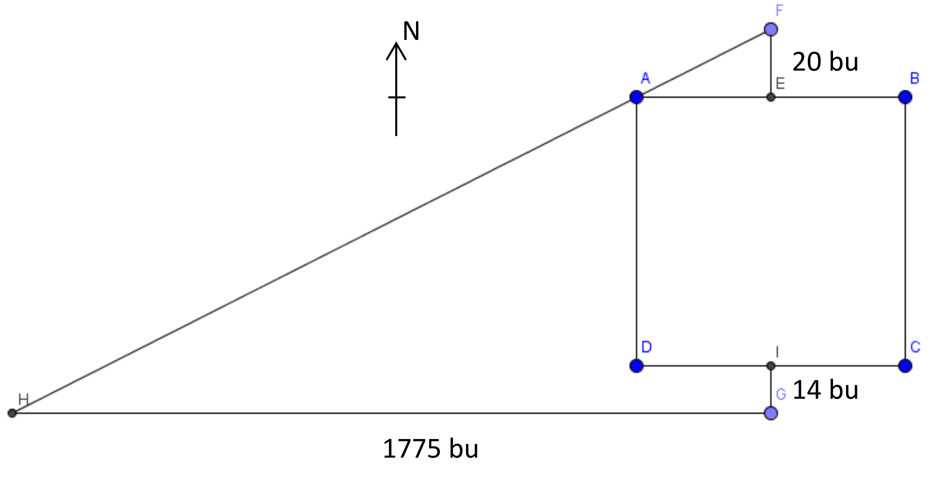
$$FG = 315\ bu$$

Problema 20 – É dada uma cidade em forma de quadrado cujo lado é desconhecido e portões instalados no centro de cada lado. 20 bu a partir do portão norte há uma árvore, que fica visível quando se anda 14 bu a partir do portão sul e 1775 bu na direção oeste. Qual é a dimensão de cada lado?

Resposta: 250 bu.

Método: Tome a distância até o portão norte e multiplique pela distância na direção oeste. Dobre o produto como o shi. Tome a soma da distância até os portões norte e sul como o coeficiente linear (congfa). Extraia a raiz para obter o lado da cidade.

Método Liu Hui: Tome a distância na direção oeste (1775 bu) como o gu, a distância da árvore ao portal sul (14 bu) como o gou. Tome a distância a partir do portão norte (20 bu) como a taxa gou, a distância a partir do portão norte até o canto oeste como a taxa gu, isto é, metade do lado da cidade. Tome, então, a taxa gou, a distância do portão norte e multiplique por gu, a distância oeste. O produto é a área do retângulo cujos comprimento e largura são a taxa gu (metade do lado da cidade) e o gou, respectivamente.



Solução atual:

Os triângulos HFG e AFE são semelhantes.

Se o lado do quadrado $ABCD$ mede x, então AE (sua metade) mede $\frac{x}{2}$.

$$\frac{HG}{FG} = \frac{AE}{FE}$$

$$\frac{1775}{x + 34} = \frac{\frac{x}{2}}{20}$$

$$20 \cdot 1775 = \frac{x}{2}(x + 34)$$

$$2 \cdot 20 \cdot 1775 = x^2 + 34x$$

$$71000 = x^2 + 34x$$

$$x^2 + 34x - 71000 = 0$$

$$x = 250 \text{ bu}$$

(34 é o coeficiente linear e 71000 é o shi do método).

Problema 22 - Seja uma árvore situada a uma distância não conhecida de uma pessoa. Fixar quatro postes, igualmente espaçados de 1 zhang, fazendo os dois da esquerda alinhados à árvore. Considere que a linha de visão, a partir do poste traseiro direito, intersecta a linha que liga os postes dianteiros 3 cun à esquerda do poste dianteiro direito. Qual é a distância entre a árvore e a pessoa?

Resposta: 33 zhang, 3 chi 3 $\frac{1}{3}$ cun.

Método: Considere 1 zhang quadrado como o dividendo, 3 cun como o divisor e divida.

Método Liu Hui: Tome 3 cun, o comprimento cortado pela linha de visão à esquerda do poste dianteiro direito como a taxa gou;
a distância entre os dois postes direitos como a taxa gu = 100 cun;
a distância entre os postes esquerdo e direito como o gou dado.

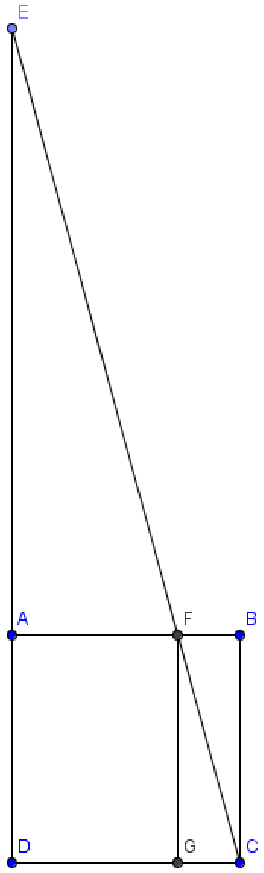
gou dado = 1 zhang = 100 cun

Daí a distância entre a árvore e a pessoa é gu, correspondendo ao gou dado. A taxa gu é multiplicada pelo gou dado, sendo ambos de medida 1 zhang, assim, o Método aponta um quadrado. Divida por 3 cun para obter a quantidade de cun.

Ou seja $$distância = \frac{100 \cdot 100}{3}\, cun$$

$$distância = 33\ zhang, \quad 3\ chi \quad e \quad 3\frac{1}{3}\ cun$$

Solução atual:



Temos que $\Delta BCF \equiv \Delta GFC$ e $\Delta DEC \sim \Delta GFC \equiv \Delta BCF$, assim:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{DC}{BF}$$

$$\frac{DE}{100} = \frac{100}{3}$$

$$DE = \frac{10000}{3}\ cun$$

$$DE = 3333\ \frac{1}{3}\ cun = 33\ zhang\ \ 3\ chi\ \ 3\ \frac{1}{3}\ cun$$

que é a distância procurada.