Capitulo 8 . Matrizes retangulares.

Os 18 problemas deste capítulo tratam de sistemas de equações lineares. Se m é o número de equações e n o de incógnitas, existem dois tipos de tais sistemas tratados neste capítulo:

1) determinado, quando n = m. Para n = 2, problemas 2, 4, 7, 9 e 11.
2) indeterminado, onde m < n, problema 13, o do poço.(6 incógnitas e 5 equações).

A técnica empregada é remarcavelmente moderna. Os coeficientes são colocados numa matriz, e então esta matriz é reduzida a uma forma triangular, usando operações elementares de matrizes. Os números negativos são operados de acordo com a regra dos sinais.

Liu explicita o método de triangular uma matriz (chamada de "Regra da matriz") exatamente o que chamamos hoje de método de eliminação de Gauss. C.F. Gauss publicou sua solução em 1826, 2000 anos depois.

Os vários métodos de resolução de equações no Nine Chapters com os comentários de Liu, são:

Método 1, da simples proporção, isto é regra de três, no capítulo 2.

Método 2, a regra de Qilu, no capítulo 2, página 152 (do livro americano).

Método 3, por determinantes, no capítulo 7.

Método 4, da Dupla falsa posição. Resolvendo os problemas 9 - 20 do capítulo 7, um par de números é assumido para criar excesso e falta e assim o método 3 é aplicado.

Método 5, da eliminação, isto é a "Regra da matriz".

Fizemos a escolha de dois problemas (8 e 13) que julgamos interessantes.

Problema 8 – Foram vendidos 2 bois e 5 carneiros, para comprar 13 porcos. Sobraram 1000 moedas . Venderam 3 bois e 3 porcos e compraram 9 carneiros. Eles têm exatamente o dinheiro para isto. Venderam 6 carneiros e 8 porcos. Então compraram 5 bois. (Existem 600 moedas em deficit.). Pergunta: Qual o preço de cada boi, carneiro e porco, respectivamente?

Resposta: O preço de cada boi, 1200. De cada carneiro, 500 e de cada porco 300.

Método: Use a "regra da matriz", coloque 2 bois, 5 carneiros, positivos, 13 porcos, negativo, dando 1000 moedas positivo, na coluna da direita R; na coluna do meio (M) 3 bois, positivo, 9 carneiros, negativo, 3 porcos positivo; na coluna da esquerda (L), coloque 5 bois, negativo, 6 carneiros positivo, 8 porcos positivo. Déficit de moedas, negativo. Calcule usando a regra dos sinais. Na matriz temos o seguinte: (como consta na página 409 do livro americano).

$$
\text{(i)}\quad \begin{array}{r c}
 & \begin{array}{ccc} \text{L} & \text{M} & \text{R} \end{array} \\
\begin{array}{r} \textbf{Gado} \\ \textbf{Carneiro} \\ \textbf{Porco} \\ \textbf{moedas} \end{array} &
\begin{bmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 6 & -9 & 5 \\ 8 & 3 & -13 \\ -600 & 0 & 1000 \end{bmatrix}
\end{array}
\ \xrightarrow{2M}\
\text{(ii)}\quad \begin{bmatrix} -5 & 6 & 2 \\ 6 & -18 & 5 \\ 8 & 6 & -13 \\ -600 & 0 & 1000 \end{bmatrix}
\ M - 3R \times 3
$$

$$
\text{(iii)}\quad \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 6 & -33 & 5 \\ 8 & 45 & -13 \\ -600 & -3000 & 1000 \end{bmatrix}
\ \xrightarrow{2L + 5R}
$$

$$
\text{(iv)}\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 37 & -33 & 5 \\ -49 & 45 & -13 \\ 3800 & -3000 & 1000 \end{bmatrix}
$$

$$
\text{(v)}\quad \xrightarrow{37M + 33L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 37 & 0 & 5 \\ -49 & 48 & -13 \\ 3800 & 14\,400 & 1000 \end{bmatrix}
$$

Assim temos 48 porcos custando 14 400 moedas, ou seja um porco custa 300 moedas. Os outros preços são encontrados por substituição recíproca.

Hoje resolvemos da seguinte maneira: Chamando de x, y, p, o número de bois, carneiros e porcos respectivamente, temos as seguintes equações:

$2x + 5y = 13p + 1000$, $3x + 3p = 9y$, $6y + 8p = 5x – 600$.

Em geral resolvemos este sistema linear, pelo método de eliminação de Gauss que é exatamente o que foi desenvolvido acima. No Brasil usamos as informações dadas pelas equações, em linhas numa matriz, de cima para baixo, e não como o acima em colunas da direita para a esquerda.

Problema 13, o problema do poço: Este é indiscutivelmente o mais importante problema deste capítulo. São dadas 5 casas que usam em comum um poço. As casas foram denominadas por A, B, C, D, e E. Elas retiram a água do poço por canos. É claro que cada cano atinge a superficie da água do poço. É sabido que: duas vezes o cano de A somado com uma vez o cano de B dá a profundidade do poço. Três vezes o cano de B mais uma vez o cano de D é igual à profundidade do poço. Quatro vezes o cano de C mais uma vez o cano de D é igual à profundidade do poço. Cinco vezes o cano de D mais uma vez o cano de E é igual à profundidade do poço. Seis vezes o cano de E mais uma vez o cano de A é igual à profundidade do poço. Pergunta-se quanto mede o poço e quanto mede cada cano de cada casa?

Solução: poço: 7 zhang 2 chai 1 cun de profundidade. O cano de A, 2 zhang 6 chi 5 cun de comprimento. O cano de B, mede 1 zhang 9 chi 1 cun. O cano da C, mede 1 zhang 4 chi 8 cun. O cano da D, mede 1 zhang 2 chi 9 cun. Da E, mede 7 chi 6 cun.

Método: Resolver pela "Regra da matriz". Calcular pela "regra do sinal".

a) Liu: primeiro colocar na matriz as condições enunciadas, em colunas, da direita pra a esquerda. Subsequentemente tome 721 como divisor e 76 como dividendo. Isto vai dar que o comprimento total de 721 de E é igual a 76 da profundidade do poço. Logo a cano de E é 76/721 da profundidade do poço. Então o comprimento do cano de E será determinado se a profundidade do poço for de 721. Assim a cano de E é 76. Depois determine as outras.

$$
\begin{array}{r c l}
 & \begin{array}{ccccc} 5^{a} & 4^{a} & 3^{a} & 2^{a} & 1^{a} \end{array} & \textbf{Colunas} \\
\begin{array}{r} \textbf{Cano A} \\ \textbf{B} \\ \textbf{C} \\ \textbf{D} \\ \textbf{E} \\ \textbf{profundidade} \end{array} &
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &
\end{array}
$$

(i)

$$
\begin{array}{r c}
\begin{array}{r} \textbf{Cano A} \\ \textbf{B} \\ \textbf{C} \\ \textbf{D} \\ \textbf{E} \\ \textbf{profundidade} \end{array} &
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\xrightarrow{5^{a} \text{ vezes } 2 - 1^{a}}
$$

(ii)

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\xrightarrow{5^{a} \text{ vezes } 3 + 2^{a}}
$$

(iii)

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 36 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\xrightarrow{5^{a} \text{ vezes } 4 - 3^{a}}
$$

(iv)

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 144 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\xrightarrow{5^{a} \text{ vezes } 5 + 4^{a}}
$$

(v)

$$\begin{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 721 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 76 & 1 & 1 & 1 & 1 & \end{bmatrix}$$

Como resolver atualmente: este problema é de um sistema linear com 6 incognitas e 5 equações, tendo portanto um grau de liberdade. Este sistema tem infinitas soluções que podem ser escritas pelas equações $2x + y = t$, $3y + z = t$, $4z + u = t$, $5u + v = t$, $6v + x = t$.

Foi considerado na resolução acima uma solução particular deste sistema para $t = 721$.