Laboratório de Ensino de Matemática

CAPÍTULO 6 – TAXAS JUSTAS (JUNG SHU)

Neste capítulo foram apresentados problemas que tratam de transportes de cereais depositados num entreposto, como taxas. Estas taxas, ou impostos, são calculados de acordo com a distância ao entreposto e o custo do trabalho. Tem também problemas que dizem respeito à perseguição de caça. Este último tipo de problema foi introduzido pelos árabes na Europa, onde veio a adquirir bastante popularidade entre os seculos XII e XV.

Os 28 problemas deste capítulo proporcionam um desenvolvimento posterior da teoria de proporção dos capitulos 2 e 3. São classificados em 4 grupos.

1) proporções diretas e inversas .

a) Envolvendo adição e subtração como no capítulo 3 (problemas 15 e 17).

b) Problemas sobre relações entre distância, velocidade e tempo (Problemas 12 - 14 e 16). O método usado é simples, mas interessante.

2) Distribuição proporcional.

a) Somente os 4 primeiros problemas deste capítulo se referem a taxas justas. (Problemas 1 - 4).

b) Problemas de trabalho cooperativo (problemas 9, 20 - 26).

c) Progressões aritméticas. Em alguns problemas são dados o primeiro e o último termos, (problema 17), em outros a soma dos primeiros ou dos últimos termos (problemas 18 e 19). Nestes casos os problemas são reduzidos a distribuição proporcional.

3) Proporções compostas (problemas 7, 9) (incluindo o vigésimo do capitulo 3, só existem 3 problemas deste tipo no Nine Chapters).

4) Proporções contínuas (problemas 10, 11, 27, 28) .

Fizemos uma escolha de alguns problemas que julgamos interessantes. Nos problemas apresentamos a resposta e o método ou regra, como no Nine Chapter. Em alguns problemas apresentamos uma solução atual.

Unidades de medidas que ocorrem neste capítulo:

Medidas de comprimento: Somente ocorrem 3 unidades: zhang, chi e cun , bu e li.
1 zhang = 10 chi e 1 chi = 10 cun, 1 li = 300 bu = 6 chi x 300 = 1800 chi. Podemos ver algumas equivalências destas medidas, no livro Une histoire des matématiques chinoises Kiyosi Yabuuti, 1 cun = 2,304 cm. 1 chi = 23,04 cm. 1 bu = 6 chi = 1,3824 m, 1 zhang = 2,304 m. 1 li = 300 bu = 414,72 m.
Medidas de Capacidade: Somente três unidades: hu, dou e sheng.
10 sheng = 1 dou, 1 hu = 100 sheng.
Medidas de peso: dan, jun, jin, liang e zhu. 1 dan = 4 jun; 1 jun = 30 jin; 1 jin = 16 liang, 1 liang = 24 zhu.

Regra das taxas justas para regular as diferentes despesas para distância e serviços, etc no transporte.

Problema 1 - A tarefa dada é transportar o painço do entreposto às 4 cidades, A, B, C e D. A cidade A se encontra a 8 dias do entreposto, e tem 10.000 casas; a cidade B se encontra a 10 dias do entreposto e compreende 9.500 casas; a cidade C se encontra a 13 dias do entreposto e comprende 12.350 casas; a cidade D se encontra a 20 dias do entreposto e compreende 12.200 casas. Se deve repartir entre as 4 cidades, 250.000 hu de painço em 10.000 carrinhos. É assumido que a divisão seja proporcional à distância do entreposto e ao número de casas. Q**uais são as quantidades de painço e o número de carrinhos?**
Resposta: Cidade A transporta 83.100 hu de painço, empregando 3.324 carrinhos, a cidade B, 63.175 hu de painço, 2.527 carrinhos, cidade C, 63.175 hu de painço, 2.527 carrinhos, cidade D, 40.550 hu de painço, 1.622 carrinhos.
Regra das taxas justas (junshu): Divida o número de casas em cada cidade pelo número de dias de viagem de cada cidade ao entreposto, para ter a taxa de distribuição: A, 1.250, B, 950, C, 950 e D, 610. Soma-as como divisor. Multiplique o total de número de carrinhos por cada uma das razões como dividendo. Divida, dando o número de carrinhos usados para cada cidade. Se existem frações, arredonde-as

(como abaixo) a inteiros. Multiplique o número de carrinhos por 25 hu para ter a quantidade de painço transportado por cada cidade.
No caso, temos: o divisor é $1.250 + 950 + 950 + 610 = 3.760$. O total de carrinhos é 10.000.
Tome $10.000\ x\ 1.250$ que será o dividendo. Então para a cidade A, o número de carrinhos é $10.000\ x\ \frac{1.250}{3.760} = 3.324\ \frac{176}{376}$.
Da cidade B, $10.000\ x\ \frac{950}{3.760} = 2.526\ \frac{224}{376}$,
Da cidade C, $10.000\ x\ \frac{950}{3.760} = 2.526\ \frac{224}{376}$,
Da cidade D, $10.000\ x\ \frac{610}{3.760} = 1.622\ \frac{128}{376}$.
A regra de Liu para arredondamento era a seguinte: (o número de carrinhos não pode ser fracionário, assim eles devem ser arredondados, e é razoável combinar a fração menor com a maior).
Tome a parte fracionária de B, que é a maior, $\frac{224}{376}$ e a de A, $\frac{176}{376}$. Some–as dando $1\ \frac{24}{376}$. Some 1 a B e mantenha o resto $\frac{24}{376}$. Assim A fica com 3.324 e B com 2.527 carrinhos. Agora tome a menor fração, que é a de D, $\frac{128}{376}$ e some com $\frac{24}{376}$. E finalmente some com a maior parte fracionária, que é a de C, $\frac{224}{376}$, obtendo exatamente 1, que é adicionado a C. Assim C fica com 2.527.
Ou seja, A com 3.324, B com 2.527, C com 2.527 e D com 1.622.
Para encontrar a quantidade de painço: para a cidade A, $3.324\ x\ 25 = 83.100$ hu, para a B, $2.527\ x\ 25 = 63.175$, para C, $2.527\ x\ 25 = 63.175$ e para a D, $1.622\ x\ 25 = 40.550$ hu.

Observação de Liu Hui: Junshu significa a distribuição justa do serviço de transporte. Para distribuir de acordo com o número de casas e o número de dias para chegar ao entreposto é chamado de jun. O serviço, transportar o painço é chamado de shu.

Problema 7 - Um trabalhador é contratado para carregar 2 hu de sal numa distância de 100 li. Por esse serviço ele ganha 40 moedas. Supondo que ele carregou 1 hu, 7 dou 3 $\frac{1}{3}$ sheng de sal por 80 li, quanto ele deve receber?
Resposta: $27\ \frac{11}{15}$ moedas.

Método: Multiplique o número de sheng em 2 hu de sal, por 100 li, como divisor. Multiplique 40 moedas pelo número de sheng da tarefa presente e por 80 li, como dividendo. Divida dando o número de moedas.

Solução atual: sabemos que 1 hu 7 dou $3\ \frac{1}{3}$ sheng = $\frac{520}{3}$ sheng.

Para resolver, usamos a regra de três composta, chamando de x o número de moedas a encontrar,

$\frac{520}{3}$ sheng --------- 80 li ------------ x moedas

200 sheng ------------ 100 li ------------- 40 moedas.

$x = \frac{40 \cdot 80 \cdot \frac{520}{3}}{200 \cdot 100} = 27\ \frac{11}{15}$.

É a mesma solução dada pelo Método, contudo numa outra linguagem.

Problema 10 - (de regra de três combinada). Um jin de seda crua faz 12 liang de seda fervida, e um jin de seda fervida faz 1 jin 12 zhu de seda seca. Quanto de seda crua precisamos para fazer 1 jin de seda seca?

Resposta: 1 jin 4 liang 16 $\frac{16}{33}$ zhu.

Método: Multiplique 12 liang de seda fervida por 1 jin 12 zhu de seda seca, como divisor. Multiplique o número de liang em 1 jin de seda crua pelo número de zhu em 1 jin de seda fervida, então multiplique por 1 jin de seda seca, como dividendo. Divida, dando o número pedido de jin de seda crua.

Solução atual:

Seda crua	Seda fervida	Seda seca
1 jin = 16 liang = $16 \cdot 24$ zhu	12 liang = $12\ \cdot 24$ zhu	
	1 jin = 16 liang = $16 \cdot 24$ zhu	1 jin 12 zhu = $\frac{33}{2}$ liang = $\frac{33}{2}.24$ zhu
y	x	1 jin = 16 liang = $16 \cdot 24$ zhu

Logo $x = \frac{16.24.16.24}{\frac{33}{2}.24}$ e $y = \frac{16.24.\ x}{12.24}$.

$y = \frac{16.\ 16.\ 16.24}{\frac{33}{2}.\ 12}$ zhu $= \frac{2048.24}{99} = \frac{16384}{33}$ zhu.

$y = 496\ \frac{16}{33}$ zhu $= 20\ liang\ 16\ \frac{16}{33}$ zhu $= = 1\ jin\ 4\ liang\ 16\ \frac{16}{33}$ zhu

Problema 14 - (de perseguição a caça). Uma lebre corre 100 bu à frente de um cão. O cão persegue a lebre durante 250 bu, mas a lebre ainda está a 30 bu adiante dele. Quanto tem ainda o cão de correr para apanhar a lebre?

Resposta: $107\ \frac{1}{7}$ bu.

Método: Tome 100 bu da lebre que está na frente e subtraia 30 bu que o cão está atrás. O resto é o divisor. Multiplique 30 bu que o cão está atrás pelo número de bu que o cão está perseguindo a lebre. Divida e tenha o número de bu pedido.

Ou seja tome $\frac{250 \cdot 30}{100-30} = \frac{7500}{70} = 107\ \frac{1}{7}$ bu.

Solução atual :

$100 - 30 = 70$ é a razão da lebre andar na frente e 250 é a razão de perseguição do cão . Reduza a 7 e 25. De acordo com a regra de três, $\frac{25}{7} = \frac{x}{30}$. Logo $x = \frac{25}{7} \cdot 30 = 107\ \frac{1}{7}$ bu.

Problema 16 - (foi considerado o problema mais difícil do capítulo). Existem dois senhores, um possui uma hospedaria e o outro é seu convidado. Certo dia o convidado vai embora a cavalo numa velocidade de 300 li por dia. Depois de $\frac{1}{3}$ de dia, o hospedeiro descobre que o convidado esqueceu sua mala na hospedaria e sai para encontrá-lo. O hospedeiro encontra o convidado e retorna para a sua hospedaria em $\frac{3}{4}$ de dia. Qual foi a velocidade do hospedeiro?

Resposta: 780 li.

Método: Mantenha $\frac{3}{4}$ dia e subtraia $\frac{1}{3}$ dia. Divida ao meio e tome isto como divisor. Some este resultado a $\frac{1}{3}$ dia. Multiplique esta soma por 300 li como dividendo. Divida e obtenha a distância que o hospedeiro percorre num dia.

Solução atual: Subtraindo $\frac{3}{4}$ dia de $\frac{1}{3}$ dia temos o tempo do hospedeiro para ir e voltar ao lugar onde encontrará o convidado. Dividindo por 2, temos o tempo de um percurso. Ou seja $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$ e $\frac{5}{12} : 2 = \frac{5}{24}$.

Assim para o convidado temos

300 li-------------- 1 dia

x li------------ $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}$ dia

ou seja x = $62{,}5$ li. Assim o convidado está a 100 li + $62{,}5$ li, = $162{,}5$ li quando se encontra com o hospedeiro. Logo a velocidade do hospedeiro $v = \frac{162{,}5}{\frac{5}{24}} =$ 780 li ao dia.

Problema 18 – de progressão aritmética. (aqui é conhecido o número de termos e a soma de alguns primeiros termos). Cinco pessoas A, B, C, D e E, querem compartilhar cinco moedas proporcionalmente. Suponhamos que A e B ganham mais, e que a soma das suas moedas seja igual à soma dos outros três. Quanto vai ganhar cada um?

Resposta: A ganha 1 $\frac{2}{6}$ de moedas, B, 1 $\frac{1}{6}$ de moedas, C, 1 moeda, D, $\frac{5}{6}$ de moedas e E, $\frac{4}{6}$ de moedas.

Método: Mantenha as razões para compartilhar como 1, 2, 3, 4 e 5. A soma das duas maiores é 9, enquanto que das três menores é 6. 6 é menor que 9 de 3. Some 3 a cada uma das razões para a partilha, obtendo 4, 5, 6, 7 e 8. Tome a soma como divisor, ou seja, 30. Multiplique as moedas a serem compartilhadas por cada uma das razões obtendo 20, 25, 30, 35 e 40. Considere-os como dividendos. Divida dando as moedas pedidas para cada pessoa (ou seja, $\frac{8}{6}$, $\frac{7}{6}$, 1, $\frac{5}{6}$ e $\frac{4}{6}$).

Solução atual: Sejam a, b, c, d, e a quantidade de moedas de cada um. Então, $a + b = c + d + e$.

E $a + b + c + d + e = 5$. Então $a + b = \frac{5}{2}$. Seja r a razão da Progressão aritmética e fixe $c = 1$. Assim $b = 1 + r$ e $a = 1 + 2r$. De a + b = $\frac{5}{2}$ = $2 + 3r$, obtemos $r = \frac{1}{6}$. E temos a resposta.

Método atual:

O compartilhamento proporcional indica que temos uma PA de cinco termos. Atribuindo ao termo médio o valor 1 ($C = 1$), podemos dizer:

$A = 1 + 2r,\ B = 1 + r,\ D = 1 – r$ e $E = 1 – 2r$

Se $A + B = \frac{5}{2}$ e $C + D + E = \frac{5}{2}$ => $D + E = \frac{3}{2}$

$C + 2r + C + r = \frac{5}{2}$ =>

$2 + 3r = \frac{5}{2}$ =>

$r = \frac{1}{6}$, o que verifica a resposta acima.

Problema 20 - (de trabalho cooperado). Um pato selvagem voa do mar do sul ao mar do norte em 7 dias, enquanto que um ganso selvagem leva 9 dias para ir do mar do norte ao mar do sul. Supondo que os dois pássaros começam no mesmo momento, quando eles vão se encontrar?

Resposta: $3\ \frac{15}{16}$ dias.

Método: Some o número de dias como divisor, seu produto como dividendo. Divida e obtenha o número de dias pedido.

Solução: O pato voa $\frac{1}{7}$ da jornada por dia, e o ganso, $\frac{1}{9}$ da jornada. Ou homogeneizando os denominadores, o pato voa $\frac{9}{63}$ e o ganso $\frac{7}{63}$. Em outras palavras, se a distância entre os mares do sul e norte tem 63 partes, o pato voa 9 partes num dia e o ganso, 7 partes num dia. Divida a distância entre o mar do sul ao mar do norte pela soma das jornadas diárias dos dois pássaros dando o número de dias antes que eles se encontrem. Ou seja, $\frac{63}{16} = 3\ \frac{15}{16}$ = dias.

Solução atual:

Se o pato voa $\frac{1}{7}$ da jornada em um dia e o ganso, $\frac{1}{9}$ da jornada em um dia, associando-se seus movimentos, teremos que a velocidade do pato é $\frac{9}{63}$ dia e a do ganso, $\frac{7}{63}$ dia.

Considere a posição de cada um p para o pato e g para o ganso. Quando $p = g$ eles estarão no mesmo local. Assim, podemos escrever suas funções horárias:

$p = 0 + \frac{9}{63}\,t$ e $g = 1 - \frac{7}{63}\,t$

$p = g$ => $\frac{9}{63}\,t = 1 - \frac{7}{63}\,t$ =>

$\frac{16}{63}\,t = 1$ =>

$t = \frac{63}{16}$ dia que é o instante em que pato e ganso se encontram no mesmo local.

Então $t = 3\ \frac{15}{16}$ dias

Problema 28 - (proporções contínuas). Uma pessoa está transportando ouro através de 5 passagens. Na primeira passagem ele paga uma taxa de uma parte em 2. Na segunda passagem, uma parte em 3, na terceira, uma parte em 4, na quarta uma parte em 5 e na quinta, uma parte em 6. Supondo que o total das taxas nas cinco passagens é apenas 1 jin, quanto ouro ele está carregando na saída?

Resposta: 1 jin 3 liang $4\ \frac{4}{5}$ zhu.

Método: mantenha 1 jin, multiplique pelas razões sucessivamente como dividendo. Subtraia o primeiro pelo ultimo; o resto é o divisor. Divida, dando o numero de jin.

Solução atual: seja x o valor em ouro que ele tem na saida. Na primeira passagem ele paga $\frac{x}{2}$, de taxa, e resta $\frac{x}{2}$. Na segunda ele paga $\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{x}{6}$ e resta $\frac{2x}{6} = \frac{x}{3}$. Na terceira ele paga $\frac{x}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{x}{12}$ e resta $\frac{3x}{12}$. Na quarta ele paga $\frac{3x}{12} \cdot \frac{1}{5} = \frac{x}{20}$ e resta $\frac{x}{5}$. Na quinta ele paga $\frac{x}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{x}{30}$ e resta $\frac{x}{6}$. O total dos impostos foi de $\frac{5}{6}\,x = 1$ jin. Assim $x = \frac{6}{5}$ jin = 1 jin 3 liang $4\ \frac{4}{5}$ zhu .