CAPITULO 4 – QUANTO MEDE? (SHAO KUANG)

Este capítulo contém problemas envolvendo cálculos para encontrar o lado ou o diâmetro etc, de áreas ou volumes dados. Ou seja, envolve extração de raízes quadradas e cúbicas. Por exemplo, dada a área de um quadrado, encontrar o seu lado. A inspiração original para resolver numericamente equações algébricas de graus elevados está fortemente ligada com os cálculos apresentados nele.

Os 24 problemas desse capítulo podem ser divididos em três grupos:

1. Medidas pequenas: regra para somas de inteiros com frações unitárias. Problemas de 1 a 11.
2. A regra da extração de raízes quadradas. Problemas de 12 a 18.
3. A regra da extração de raízes cúbicas. Problemas de 19 a 24.

O primeiro grupo é uma extensão da teoria de frações do capítulo 1. O algoritmo para encontrar o máximo divisor comum (mdc) de naturais foi desenvolvido no capítulo 1, mas o mínimo múltiplo comum (mmc) não foi introduzido. Assim os chineses não somam as frações usando o mmc dos denominadores, mas de uma regra muito simples e muito interessante, que é a regra das medidas pequenas. No segundo e terceiro grupos, os algoritmos são completos e corretos. Contudo Liu Hui nos mostra geometricamente porque eles são corretos.

Observação importante: uma das mais significantes contribuições da China Antiga é a solução numérica de equações polinomiais. A fonte original de todos estes trabalhos é *Os nove capitulos da arte matemática*, na extração de raízes quadradas e cúbicas. O processo para determinar a raiz quadrada de um número, traduzido nos tempos atuais, é muito próximo do “algoritmo da raiz quadrada” (método da chave), que era ensinado no Brasil nas escolas, até há pouco tempo. Para a raiz cúbica, é idêntico ao da raiz quadrada, baseado no desenvolvimento do cubo de um binômio.

Fizemos a escolha de alguns problemas que julgamos interessantes e não repetitivos.

Regra para a soma de inteiros e frações unitárias(regra das medidas pequenas): mantenha a parte inteira e a parte fracionária dos *bu*. Multiplique o inteiro e todos os numeradores pelo maior denominador. Reduza as frações a inteiros sempre que possível. Agora vai repetindo o processo até que todos os numeradores sejam inteiros. Some-os como divisor. Multiplique o número dos *bu* (quadrados) pelo denominador resultante como dividendo e divida dando o número de *bu* como comprimento.
Veja esta regra comentada no problema 6.

Problema 1 - Dado um campo retangular, cuja largura é 1 ½ *bu* e cuja área é 1 *mu*, encontrar o seu comprimento .
Resposta : 160 *bu.*
Método: A = 1 *mu* = 240 *bu* (quadrado). Largura $\ell = 1\ \frac{1}{2}\ =\ \frac{3}{2}$.
Assim o comprimento é igual a 240 x $\frac{2}{3}$ = 160 *bu.*

Problema 2 - Dado um campo retangular, cuja largura é 1 ½ *bu* e um terço, e área 1 *mu*, encontrar o seu comprimento .
Resposta : 130 $\frac{10}{11}$ *bu*.
Método: A = 1 *mu* = 240 *bu* (quadrado). Largura $\ell = 1\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.
Assim o comprimento é igual a 240 x $\frac{6}{11}$ = 130 $\frac{10}{11}$ *bu*.

Problema 3 - Dado um campo retangular, cuja largura é 1 ½ *bu* mais um terço e um quarto e área 1 *mu*, encontrar o seu comprimento .
Resposta: 115 $\frac{1}{5}$ *bu*.
Método: A = 1 *mu* = 240 *bu* (quadrado). Largura $\ell = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+2+\frac{4}{3}+1}{4} = \frac{12+6+4+3}{4\cdot 3} = \frac{25}{12}$.
Assim o comprimento é igual a 240 x $\frac{12}{25}$ = 115 $\frac{1}{5}$ *bu*.

Problema 4 - Dado um campo retangular, cuja largura é 1 ½ *bu* mais um terço, um quarto, e um quinto e área 1 *mu*, encontrar o seu comprimento .

Resposta : 105 $\frac{15}{137}$ *bu*.

Método: Largura $\ell = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{5+\frac{5}{2}+\frac{5}{3}+\frac{5}{4}+1}{5} = \frac{20+10+\frac{20}{3}+5+4}{5\cdot 4} = \frac{60+30+20+15+12}{5\cdot 4\cdot 3} = \frac{137}{60}$.

Assim o comprimento é igual a 240 x $\frac{60}{137}$ = 105 $\frac{15}{137}$ *bu .*

Problema 5 - Dado um campo retangular, cuja largura é 1 ½ *bu* mais um terço, um quarto, um quinto e um sexto e área 1 *mu*, encontrar o seu comprimento .

Resposta: 97 $\frac{47}{49}$ *bu*.

Método: Largura $\ell = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{6+3+2+\frac{6}{4}+\frac{6}{5}+1}{6} = \frac{30+15+10+\frac{30}{4}+6+5}{6\cdot 5} = \frac{120+60+40+30+24+20}{6\cdot 5\cdot 4} = \frac{294}{120}$.

Assim o comprimento é igual a 240 x $\frac{120}{294}$ = 97 $\frac{47}{49}$ *bu.*

Problema 6 - Dado um campo retangular, cuja largura é 1 ½ *bu* mais um terço, um quarto, um quinto, um sexto e um sétimo e área 1 *mu,* encontrar o seu comprimento .

Resposta: 92 $\frac{68}{121}$ *bu*.

Método: Largura $\ell = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$. O maior denominador é 7.

Multiplique o inteiro e todos os numeradores por este denominador e divida cada numerador por este denominador, ou seja: $\frac{7+\frac{7}{2}+\frac{7}{3}+\frac{7}{4}+\frac{7}{5}+\frac{7}{6}+1}{7} =$

Faça o mesmo na próxima etapa, encontrando o maior denominador. Neste caso é o 6.

$= \frac{42+21+14+\frac{21}{2}+\frac{42}{5}+7+6}{7\cdot 6} =$

Observe que não foi utilizada inteiramente a regra, pois foi feita uma simplificação que não reduziu a inteiro.
A próxima etapa. O maior denominador é o 5.

$$= \frac{210 + 105 + 70 + \frac{105}{2} + 42 + 35 + 30}{7 \cdot 6 \cdot 5} =$$

A próxima etapa. O maior denominador é o 2.

$$= \frac{420 + 210 + 140 + 105 + 84 + 70 + 60}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{1089}{420}.$$

Assim o comprimento é igual a 240 x $\frac{420}{1089}$ = 92 $\frac{68}{121}$ *bu* .

Problema 11 - Dado um campo retangular, cuja largura é 1 ½ *bu* mais um terço, um quarto, um quinto, um sexto, um sétimo, um oitavo, um nono, um décimo, um onze avos e um doze avos e área 1 *mu*, encontrar o seu comprimento .

Resposta : 77 $\frac{29183}{86021}$ *bu*.

Método: Largura ℓ $=1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} =$

$$= \frac{12 + 6 + 4 + 3 + \frac{12}{5} + 2 + \frac{12}{7} + \frac{12}{8} + \frac{12}{9} + \frac{12}{10} + \frac{12}{11} + 1}{12} =$$

$$= \frac{132 + 66 + 44 + 33 + \frac{132}{5} + 22 + \frac{132}{7} + \frac{132}{8} + \frac{132}{9} + \frac{132}{10} + 12 + 11}{12 \cdot 11} =$$

$$= \frac{1320 + 660 + 440 + 330 + 264 + 220 + \frac{1320}{7} + 165 + \frac{1320}{9} + 132 + 120 + 110}{12 \cdot 11 \cdot 10} =$$

$$= \frac{11880 + 5940 + 3960 + 2970 + 2376 + 1980 + \frac{11880}{7} + 1485 + 1320 + 1188 + 1080 + 990}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}$$

=

=

$$\frac{83160 + 41580 + 27720 + 20790 + 16632 + 13860 + 11880 + 10395 + 9240 + 8316 + 7560 + 6930}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 7}$$

$$= \frac{258063}{83160}$$

Assim o comprimento é igual a 240 x $\frac{83160}{258063}$ = 77 $\frac{29183}{86021}$ *bu.*

O método das Medidas Pequenas também vale para frações ordinárias.

O Método da extração da raiz quadrada será explicado ao longo do próximo problema .

Problema 12 - Dada a área de um quadrado de 55 225 *bu* (quadrado), encontre o seu lado .

Resposta: 235 *bu*.

Método da raiz quadrada: Vamos encontrar a raiz quadrada do número acima, usando uma notação moderna, mas de acordo com a regra do *Os nove capitulos da arte matemática*.

Tome x como a solução. Logo $S = x^2 = 55225$.

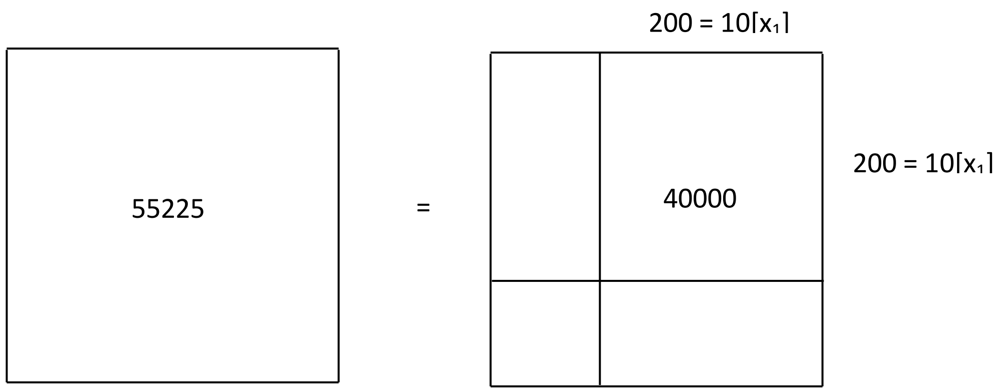
1) Para estimar o primeiro dígito da raiz, transformamos a equação acima diminuindo a raiz para $x_1 = x/100$ e obtenha $10\,000\, x_1^2 = 55225$. (pois como 55225 está em dezenas de milhares, o lado será em centenas).
2) Para estimar x_1, encontre, $[x_1]$ (onde [ ] significa a parte inteira de x_1), tal que
   $[x_1]^2 \leq 5 < ([x_1] + 1)^2$. Assim tome $[x_1] = 2$.
3) Subtraia a raiz, $y = x_1 - [x_1] = x_1 - 2$, e a equação se transforma em $10\,000\,(y + 2)^2 = 55225$, ou seja, $10\,000\, y^2 + 40\,000y =$
   $= 15\,225$.

   Pelo algoritmo "da chave"

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{55.225} & \underline{200} \\
-\ 40.000 & \\
\hline
15.225 &
\end{array}
$$

   Ou seja, geometricamente,

   15225 é a área do gnômom restante, quando se retira a área do quadrado (40000).



4) Aumente agora a raiz, $y_1 = 10$ y, e temos $100\ y_1^2 + 4000y_1 = 15225$.

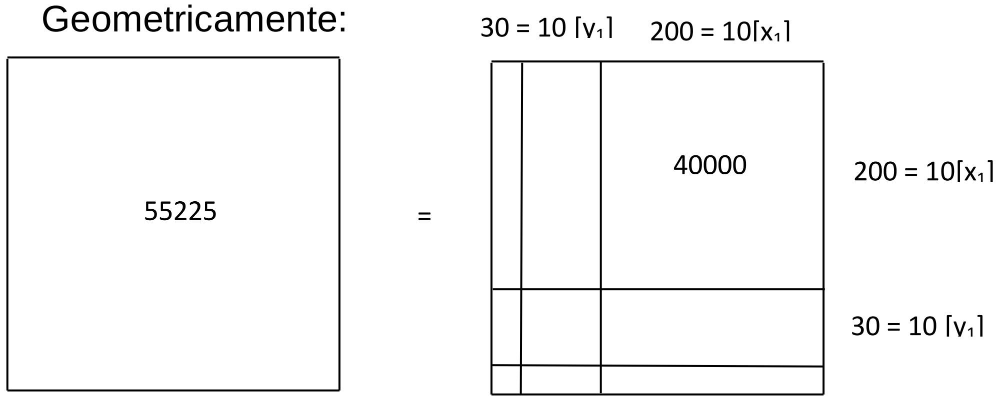
   Estime $[y_1]$ tal que $4000[y_1] \leq 15225 < 4\ 000\ ([y_1]+1)$.

   Assim tome $[y_1] = 3$ e opere, obtendo 2325.

   Pelo algoritmo "da chave"

$\sqrt{55.225}$	200+30
- 40.000	2 . 200 = 400
15.225	(400 + 30) . 30 = 12900
- 12.900	
2.325	

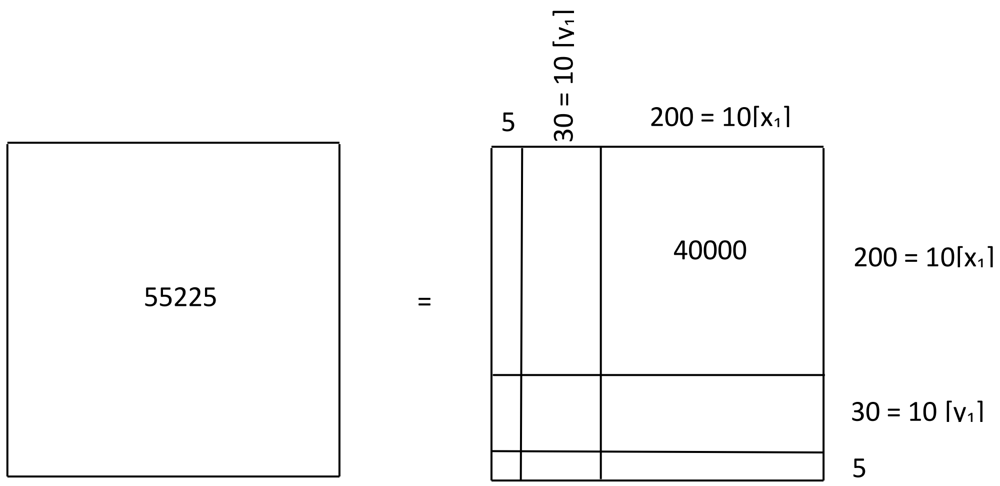
Geometricamente:



5) Subtraia a raiz $z = y_1 - [y_1] = y_1 - 3$, dando $100\ (z + 3)^2 + 4000\ (z+3) = 15225$.

   Ou seja: $100\ z^2 + 4600\ z = 2325$.

6) Aumente a raiz, $z_1 = 10\ z$, dando $z_1^2 + 460\ z_1 = 2325$. Neste caso $[z_1] = 5$. E finalmente temos $x = 100\ [x_1] + 10\ [y_1] + [z_1] = 235$.



Pelo algoritmo “da chave”

$\sqrt{55.225}$	200+30+5
- 40.000	2 . 200 = 400
15.225	(400 + 30) . 30 = 12900
- 12.900	
2.325	2 . 230 = 460
- 2.325	(460 + 5) . 5 = 2325
0	

No método do *Os nove capitulos da arte matemática* se, continuando o processo sobrar um resto, o número S é chamado não extraível e o lado do quadrado é igual à raiz quadrada de S.

Problema 15 - Dada a área de 564 752 ¼ bu quadrados, encontrar o lado do quadrado.
Resposta: 751 ½ bu.
Método: é como anterior, só que envolve números racionais, então basta fazer a raiz quadrada do numerador e do denominador e dividir.

Regra de como encontrar a circunferência conhecendo a área: dada uma área em bu quadrados de uma circunferência. Multiplique por 12. Extraia a raiz quadrada do produto dando a circunferência.
Liu explica: No *Os nove capitulos da arte matemática* ,a razão entre a circunferência e o seu diâmetro é igual a 3 (número π = 3). (Para este valor de π esta fórmula acima está correta). Contudo Liu dá a seguinte fórmula: a área deve ser multiplicada por 3,14 e dividida por 25. Extraia a raiz quadrada deste resultado e obtenha a circunferência. Ou seja, Liu considera π = 3,14.
Observação importante: ver página 106, tabela 1.6.(????o que é isto)

Problema 17 - Se a área da circunferência é 1518 $\frac{3}{4}$ bu quadrados, qual é a sua circunferência?
Resposta: 135 bu .
Método: como acima a circunferência C = $\sqrt{12A}$, onde *A* é a área dada.

Logo C = $\sqrt{12 \cdot \frac{6075}{4}} = \sqrt{\frac{72900}{4}} = 135$ bu.

Para Liu, C = $\sqrt{\frac{3{,}14 \cdot \frac{6075}{4}}{25}}$ que é aproximadamente igual a $138 \frac{1}{10}$ bu.

Regra de extrair a raiz cúbica.

Problema 19 - Dado um volume de 1 860 867 chi cúbicos, qual o lado do cubo?

Resposta: 123 chi.

Método da raiz cúbica: Vamos encontrar a raiz cúbica do número acima, usando uma notação moderna, mas de acordo com a regra do *Os nove capitulos da arte matemática* .

Tome x como a solução, logo V = $x^3 = 1860867$.

1) Para estimar o primeiro dígito da raiz, transformamos a equação acima diminuindo a raiz para $x_1 = x/100$ e obtenha $1\,000\,000\, x_1^3 = 1\,860\,867$. (pois como 1 860 867 está em milhões, o lado será em centenas).
2) Para estimar x_1, encontre, $[x_1]$ (onde [ ] significa a parte inteira de x_1), tal que $[x_1]^3 \leq 1 < ([x_1] + 1)^3$. Assim tome $[x_1] = 1$.
3) Subtraia da raiz , $y = x – [x_1] = x – 1$, obtendo $1\,000\,000y^3 + 3\,000\,000\, y^2 + 3\,000\,000\, y = 860\,867$.

   Pelo método da chave:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{1\,860\,867} & 100 \\ -\ 1\,000\,000 & \\ \hline 860\,867 & \end{array}$$

4) Aumente a raiz, $y_1 = 10\, y$, e obtenha $1\,000\, y_1^3 + 30\,000\, y_1^2 + 3\,000\,000 y_1 = 860\,867$.
5) Para estimar y_1 encontre, $[y_1]$ (onde [ ] significa a parte inteira de y_1), tal que $300000\, [y_1] \leq 860867 < 300000\, ([y_1] + 1)$. Assim $[y_1] = 2$.

Pelo método da chave:

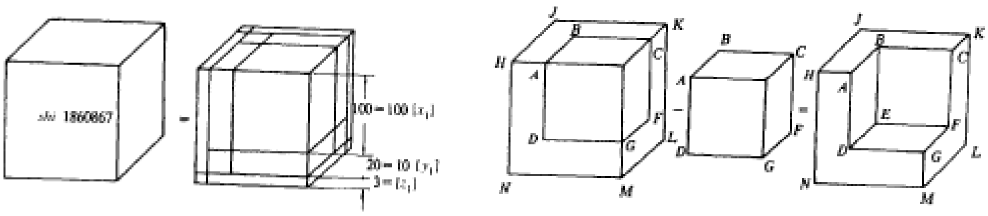
$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt[3]{1\ 860\ 867} & \underline{100+20} \\
\underline{-\ 1\ 000\ 000} & (30000 + 300 \ .\ 20 + 20^2)\ .\ 20 = 728000 \\
0\ \ 860\ 867 & \\
\underline{728\ 000} & \\
132\ 867 &
\end{array}
$$

6) Subtraia a raiz, $z = y_1 - [y_1] = y_1 - 2$, obtendo $1\ 000\ z^3 + 36\ 000 z^2 + 432\ 000\ z = 132\ 867$.
7) Aumente a raiz, $z_1 = 10\ z$, assim $z_1^3 + 360\ z_1^2 + 432\ 000\ z = 132\ 867$.
8) Estime $[z_1] = 3$ e finalmente obtenha $x = 100\ [x_1] + 10\ [y_1] + [z_1] = 123$.

Pelo método da chave:

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt[3]{1\ 860\ 867} & \underline{100+20+3} \\
\underline{-\ 1\ 000\ 000} & \underline{(30000 + 300 \ .\ 20 + 20^2})\ .\ 20 = 728000 \\
0\ 860\ 867 & 43200 + 360\ .\ 3 + 3^2)\ .\ 3 = \\
\underline{-\ \ 728\ 000} & 129600 + 3240 + 27 = 132867 \\
132\ 867 & \\
-\ \underline{132\ 867} & \\
0 &
\end{array}
$$

Liu explica geometricamente:



Regra para encontrar o diâmetro de uma esfera.

A regra é a seguinte: Dado o volume da esfera em chi cúbicos. Multiplique-o por 16 e divida por 9. Extraia a raiz cúbica do resultado e obtenha o diâmetro da esfera.
Ou seja , considera o volume V como sendo V = (9/16) d^3, onde *d* é o diâmetro da esfera. (que está errada, mesmo considerando pi = 3).
A fórmula exata para o volume de uma esfera é V = $\frac{1}{6}\,\pi\, d^3$.

A fórmula exata para o volume da esfera foi somente conhecida nos séculos V ou VI com Zu Kengzhi.

Problema 23 - Dado o volume da esfera de 4 500 chi cúbicos. Qual é o seu diâmetro?

Reposta: 20 chi .

Método: $\sqrt[3]{4500 \cdot \frac{16}{9}} = 20$