CAPÍTULO 1 - MEDIÇÃO DE CAMPOS (FANG THIEN)

Este capítulo trata, essencialmente, do cálculo de áreas de campos e operações com frações. Trabalha com campos na forma retangular, quadriláteros, círculos, segmentos circulares e anéis.

O capítulo 1 tem 38 problemas que podem ser classificados em dois grupos:

1. Cálculo de áreas de figuras planas.

Denomina de "figuras retilíneas", os retângulos (Problemas 1-4, 19-24), triângulos (25-26) e trapézios (27-30) e calcula as suas áreas. De "figuras curvilíneas", que são os círculos (33-34), segmentos circulares (35-36) e anéis (37-38).
As fórmulas para retângulos, triângulos, trapézios, anéis e círculos são exatas enquanto que a fórmula para segmentos circulares é aproximada.

2- A teoria das frações.

Este grupo compreende redução de frações (Problema 5-6), adição (7-9), subtração (10-14), divisão (17-18) e multiplicação (19-24). Introduz cálculos de áreas envolvendo lados de comprimento racionais.

Fizemos a escolha de alguns problemas que julgamos interessantes e não repetitivos.

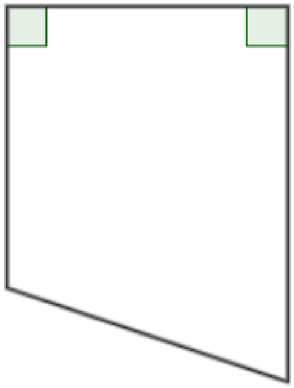
Vamos conservar a numeração dos problemas como no livro.

Problema 1 - Dado um campo retangular de largura *15 bu* e *16 bu* de comprimento, quanto mede sua área?
Resposta: 1 *mu*
Regra para a determinação da área de um campo retangular: Multiplique o número de *bu* da largura pelo comprimento para obter *bu* (quadrado). Divida, então, pelo fator de conversão de *240 bu* (quadrados) em 1 *mu* dá o número de *mu*.

15 bu x 16 bu = 240 bu (quadrados) = 1 *mu.*

Problema 25 - Dado um campo triangular com base 12 *bu* e altura 21 *bu*. Qual é a área?
Resposta: 126 *bu* (quadrados).
Regra da área de um campo triangular: Multiplique a metade da base pela altura.
$12 \cdot \frac{21}{2} = 126$ *bu* (quadrado)

Problema 27 – Dado um campo trapezoidal com dois ângulos retos e bases medindo 30 *bu* e 42 *bu*, respectivamente, e altura 64 *bu,*encontre a sua área.



Reposta: 9 *mu* 144 *bu* (quadrado).
Regra da área do trapézio: multiplique metade da soma das bases superior e inferior pela altura.
$64 \cdot \frac{(30+42)}{2} = 2304 = 9 \cdot 240 + 144 = 9$ *mu* e 144 *bu* (quadrado).

Teoria das frações:
A regra da redução de frações. Se o denominador e o numerador podem ser divididos por dois, então divida-os. Se não, escreva o denominador *d* e o numerador *n* na forma (*n,d*). Compare *d* e *n* e subtraia o menor número do maior e os coloque na forma acima. Repita o processo até obter (*m,m*) onde *m* é o máximo divisor comum, teng. Simplifique a fração original dividindo ambos os números pelo teng.
Trata-se, afinal, de aplicar o processo de subtração recíproca para a determinação do máximo divisor comum de dois números, descrito por Euclides no Livro 7 de *Os Elementos*.

Problema 6 - Reduza a fração $\frac{49}{91}$ na sua forma irredutível.
Resposta: $\frac{7}{13}$.
Método: Escreve-se, sucessivamente, usando a regra acima.
$$(49,91);\ (49,42);\ (7,42);\ (7,35);\ (7,28);\ (7,21);\ (7,14);\ (7,7)$$
7 é o máximo divisor comum (teng) do numerador e denominador e resulta a fração $\frac{7}{13}$, equivalente à fração dada.

Observe que no *Os nove capítulos da arte matemática*, 160 dos 246 problemas envolvem cálculos com frações. Neste livro não aparecem frações com numerador maior que o denominador. Neste caso são reduzidas a frações mistas.
Para somar ou subtrair frações, os matemáticos chineses reduziam ao denominador comum (mas sem a preocupação de ele ser o menor possível) deixando para o final a simplificação da fração resultante.

Problema 8 - Dadas as frações $\frac{2}{3}, \frac{4}{7}$ e $\frac{5}{9}$. Somando-as quanto temos?
Resposta: $1\ \frac{50}{63}$

Solução:
$\frac{2}{3}+\frac{4}{7}+\frac{5}{9}=\frac{2\cdot7\cdot9}{3\cdot7\cdot9}+\frac{4\cdot3\cdot9}{3\cdot7\cdot9}+\frac{5\cdot3\cdot7}{3\cdot7\cdot9}=\frac{126+108+105}{189}=\frac{339}{189}=1\frac{150}{189}=1\ \frac{50}{63}.$

Para multiplicar frações se procedia exatamente como hoje.

Problema 10 - De $\frac{8}{9}$ subtraia $\frac{1}{5}$. Quanto resta?

Resposta: $\mathbf{\frac{31}{45}}$

Método: Cada numerador é multiplicado pelos denominadores das outras frações. Então subtraia o menor (produto) do maior. O resto é o dividendo. Multiplique os denominadores como o divisor. Divida.

Em linguagem moderna, esta regra pode ser descrita assim:

$$\frac{b}{a}-\frac{d}{c}=\frac{bc-ad}{ac}$$

Então, temos: $\frac{8}{9}-\frac{1}{5}=\frac{8\cdot5-9\cdot1}{9\cdot5}=\frac{31}{45}$

Problema 12 - Qual é maior $\frac{5}{8}$ ou $\frac{16}{25}$?

Resposta: $\frac{16}{25}$ é a maior e o excesso é $\frac{3}{200}$.

Método da comparação das frações: Cada numerador é multiplicado pelo denominador da outra fração. Subtrai o menor produto do maior. O resto é o dividendo; multiplique os denominadores como divisor. Divida para obter o excesso.

Solução: No caso, tome $5\cdot25=125$ e $16\cdot8=128$. Como 125 < 128, $\frac{5}{8}<\frac{16}{25}$. O excesso é $\frac{3}{200}$.

A regra para dividir frações (diferente de hoje).

Problema 17 - Sete pessoas devem dividir $8\frac{1}{3}$ de moedas. Quanto cabe a cada pessoa?

Resposta: Para cada uma $1\frac{4}{21}$ de moedas.

Método da divisão de frações: Tome o número de pessoas como divisor e o número de moedas como dividendo. Divida. Se o dividendo ou o divisor for uma fração mista, converta-a a uma fração imprópria. Se ambas são frações mistas, converta-as a frações impróprias com denominador comum.

a) A regra diz o seguinte, cada numerador é multiplicado pelo denominador da outra fração. Multiplique o denominador para uniformizar os denominadores. Ou seja:

$\frac{b}{a} : \frac{d}{c} = \frac{bc}{ac} : \frac{da}{ac}$ e isto é igual a $\frac{bc}{ad}$.

b) Se ambos o dividendo e divisor são frações mistas:

$$\left(a + \frac{c}{b}\right) : \left(d + \frac{f}{e}\right)$$

Então reduza-as a impróprias:

$$\frac{ab + c}{b} : \frac{de + f}{e}$$

Dai como acima,

$$\frac{e \cdot (ab + c)}{eb} : \frac{b \cdot (de + f)}{eb} = \frac{e \cdot (ab + c)}{b \cdot (de + f)}$$

Logo, no problema 17, temos $\mathbf{8\frac{1}{3} : 7 = \frac{25}{3} : 7 = \frac{25}{3} : \frac{7 \cdot 3}{3} = \frac{25}{21} = 1\frac{4}{21}}$.

Oservação: Li (1987) chama a atenção para o fato de os *Os Nove capitulos da arte matemática* ser o primeiro trabalho no mundo a discutir sistematicamente a manipulação de frações, o que só no século VII vem a acontecer na Índia e, ainda mais tarde, na Europa. O recurso ao mínimo múltiplo comum (Swetz ,1972) entre os denominadores não foi utilizado antes do seculo XV.

Problema 31 - Dado um campo circular, com circunferência de 30 *bu* e diâmetro 10 *bu*. Qual é a sua área?

Resposta: 75 *bu* (quadrado).

O método da área de campos circulares:

1ª regra: multiplique metade da circunferência pelo seu raio dá a área do círculo em *bu* (quadrado).

2ª regra: um quarto do produto da circunferência e o diâmetro.

3ª regra: um quarto do produto de três vezes o diâmetro ao quadrado.

4ª regra: a circunferência ao quadrado dividido por 12.

A primeira e a segunda regras são corretas. Nos dias de hoje é o mesmo que dizer que a área é $\pi \cdot r^2$. Na terceira e na quarta, está assumindo para o número é π o valor de 3

Para obter a resposta do problema 31 foi usada a 2ª regra, obtendo 75 *bu* (quadrado).

Atualmente sabemos que este problema não tem solução, pois não existe um círculo com circunferência medindo 30 e raio 5, pois a circunferência mede $2 \cdot \pi \cdot r = 10\pi$, que nunca será 30. Somente utilizando π igual a 3 isto é possível.

Um problema com medidas racionais.

Problema 32 - Dado um campo circular, com circunferência medindo 181 *bu* e diâmetro $60\frac{1}{3}$ *bu* , encontre a área deste campo.

Resposta: 11 *mu* $90\frac{1}{12}$ *bu* (1 *mu* = 240 *bu* quadrado)

Método: Segue da primeira regra acima.

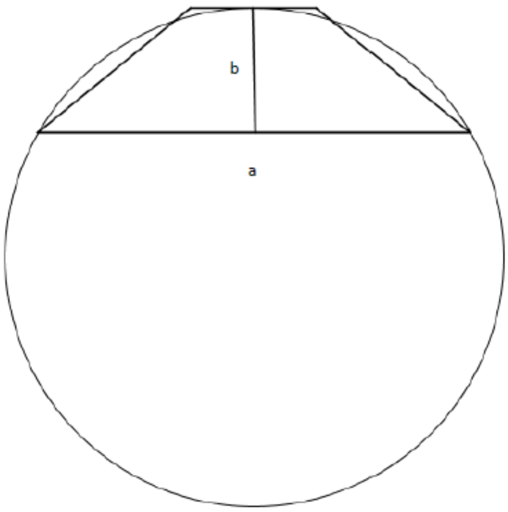
$\frac{181}{2} \cdot \frac{181}{6} = \frac{32761}{12} = 2730\frac{1}{12} = 11$ *mu* $90\frac{1}{12}$ *bu* (quadrado).

Problema 36 - Dado um campo, na forma de segmento circular, cuja corda é $78\frac{1}{2}$ *bu*, e flecha $13\frac{7}{9}$ *bu* encontre sua área.

Resposta: 2 *mu* $155\frac{56}{81}$ *bu* (quadrado).

Método: Tome a corda e multiplique pela flecha; tome o quadrado da flecha; some e divida por dois.

Em outras palavras: Se *a* é a corda de um segmento e *b* sua flecha, a área igual a $\frac{1}{2} \cdot (ab + b^2)$.



Sabemos que esta fórmula é falsa. Uma moderna fórmula aproximada de um segmento circular é dada por $\frac{2}{3}\,ab$, (pg 127, K,S;C,J;L,A.). Fazendo os cálculos verificamos que, com a fórmula dada no *Os nove capitulos da arte matemática*, obtemos um valor aproximado de 635,69 para a área do segmento circular e usando a fórmula moderna aproximada, obtemos o valor 721,03.

Atualmente encontramos a área por: Área = $\frac{r^2}{2} \cdot (\alpha - \sin\alpha)$, onde *r* é o raio do círculo e α é o ângulo central em radianos. Neste caso, o valor encontrado é 738,28.

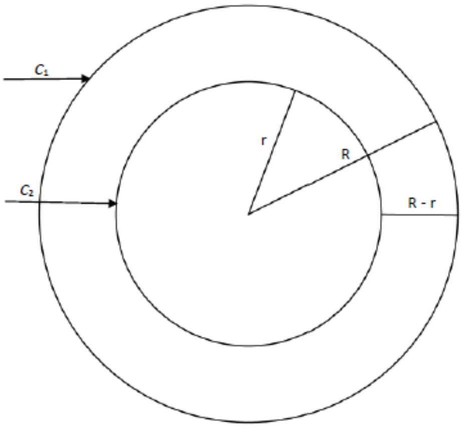
Problema 36 - Dado um campo em forma de anel circular, cujas circunferências interna e externa medem $62\frac{3}{4}$ *bu* e $113\frac{1}{2}$ *bu*, respectivamente, e largura $12\frac{2}{3}$ *bu,* qual é sua área?

Resposta: 4 *mu* $156\frac{1}{4}$ *bu* (quadrado).

Método para campos anelares: Faça a soma das circunferências interna e externa, tome sua metade, multiplique pela largura do anel. O produto obtido é a área em *bu* (quadrado).

A regra dada pode ser interpretada da seguinte forma, de acordo coma linguagem moderna. Sejam:

C_1 a circunferência externa e R seu raio;
C_2 a circunferência interna e r seu raio;
A_1 a área do círculo externo e A_2 a área do círculo interno.



A(anel) = $A_1 - A_2$
A(anel) = $\pi R^2 - \pi r^2$
A(anel) = $\pi(R^2 - r^2)$
A(anel) = $\pi(R + r)(R - r)$
A(anel) = $\frac{2\pi}{2}(R + r)(R - r)$
A(anel) = $\left(\frac{2\pi R}{2} + \frac{2\pi r}{2}\right)(R - r)$
A(anel) = $\left(\frac{C_1 + C_2}{2}\right)(R - r)$

No problema 38 temos:

$$A = \left(113\frac{1}{2} + 62\frac{3}{4}\right) : 2 \cdot 12\frac{2}{3} =$$
$$A = \left(\frac{227}{2} + \frac{251}{4}\right) : 2 \cdot \frac{38}{3} =$$
$$A = \left(\frac{454}{8} + \frac{251}{8}\right) \cdot \frac{38}{3}$$
$$A = \frac{705}{8} \cdot \frac{38}{3} = \frac{26790}{24} = \frac{13395}{12} = 1116\frac{1}{4}\text{ bu (quadrado).}$$
$$A = 4\text{ mu } 156\frac{1}{4}\text{ bu (quadrado).}$$