ANÁLISE NÃO-STANDARD

Abraham Robinson nasceu no dia 6 de Outubro de 1918 e faleceu no dia 11 de Abril de 1974, na cidade de Waldenburg, na época pertencente à Alemanha, hoje Polônia.

Sabemos que o conjunto dos inteiros é uma extensão dos naturais, os racionais uma extensão dos inteiros, os reais uma extensão dos racionais e podemos também dizer que o conjunto dos números complexos é uma extensão dos reais. Quando Robinson criou a Análise Não-Stantard para os reais, teve a idéia de fazer uma outra extensão dos reais, ou seja, ampliar esse conjunto de números colocando os infinitésimos e os infinitos. Para isso era necessário que esse novo conjunto tivesse as mesmas propriedades dos reais e ainda outras, por exemplo, esse novo conjunto deveria conter os reais com suas propriedades, mas ser diferente dele, conter elementos a mais. O novo conjunto, chamado de Hiperreal foi denotado por **R* .** Logo o **R** C **R* ,**mas **R** $\neq$ **R*.**

Definições:

Infinitesimais: é o conjunto $\mu(0)$ dos elementos de R* com a seguinte propriedade:

para qualquer número real positivo r, existe um elemento x *desse conjunto, cujo o valor absoluto é menor que r ,(o zero real é considerado em elemento desse conjunto)*

$$\mu(0) = \{x / (x \in R^*) \wedge \forall r (r \in R) \rightarrow |x| < r\}$$

Limitados:

É o conjunto Ω *de todos os números* x *hiperreais, tal que, existe algum real positivo* r *onde :*

$$|x| < r$$

$$\Omega = \left\{ x \;/\; \left(x \in R^{*}\right) \wedge \exists r \left(r \in R^{*}\right) \wedge |x| < r \right\}$$

Infinito:

$$R^* - \Omega = R^*_{\infty}$$

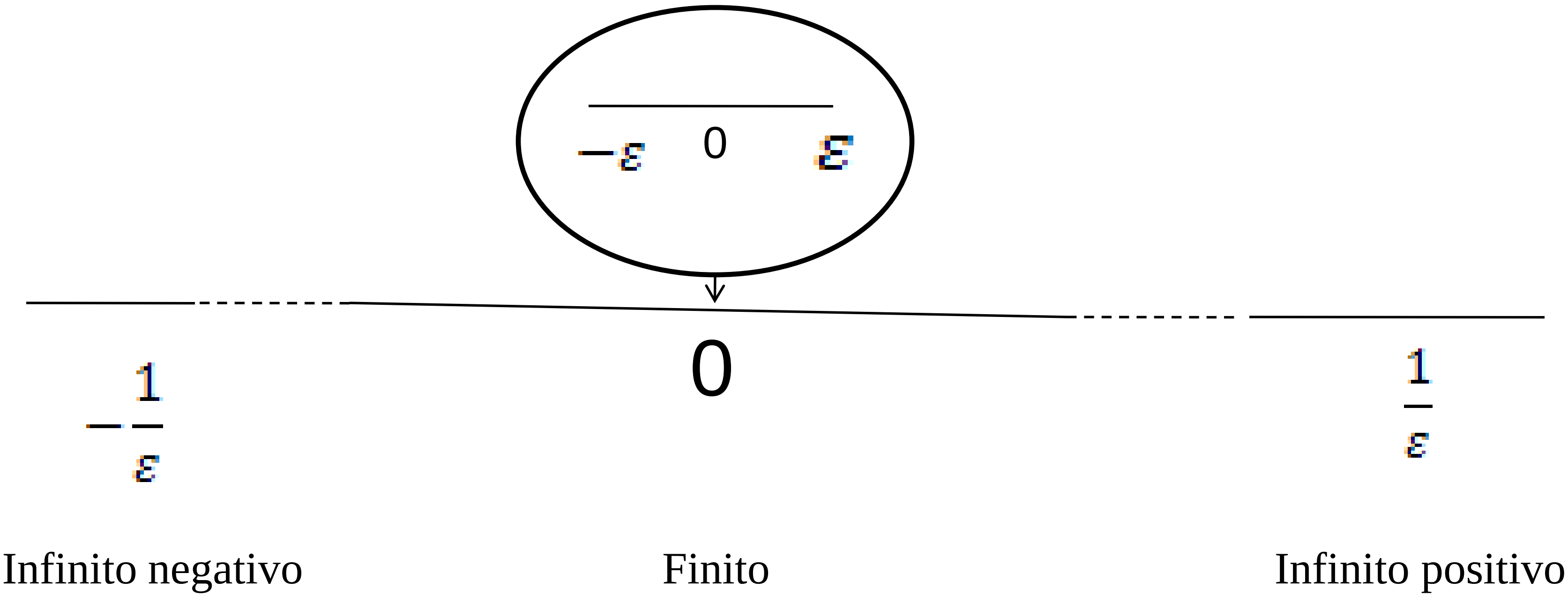
O conjunto dos números infinitos hiperreais. Em outras palavras, os números hiperreais são limitados, infinitos ou ilimitados.

Infinitamente perto: Dois números x e y são infinitamente pertos se

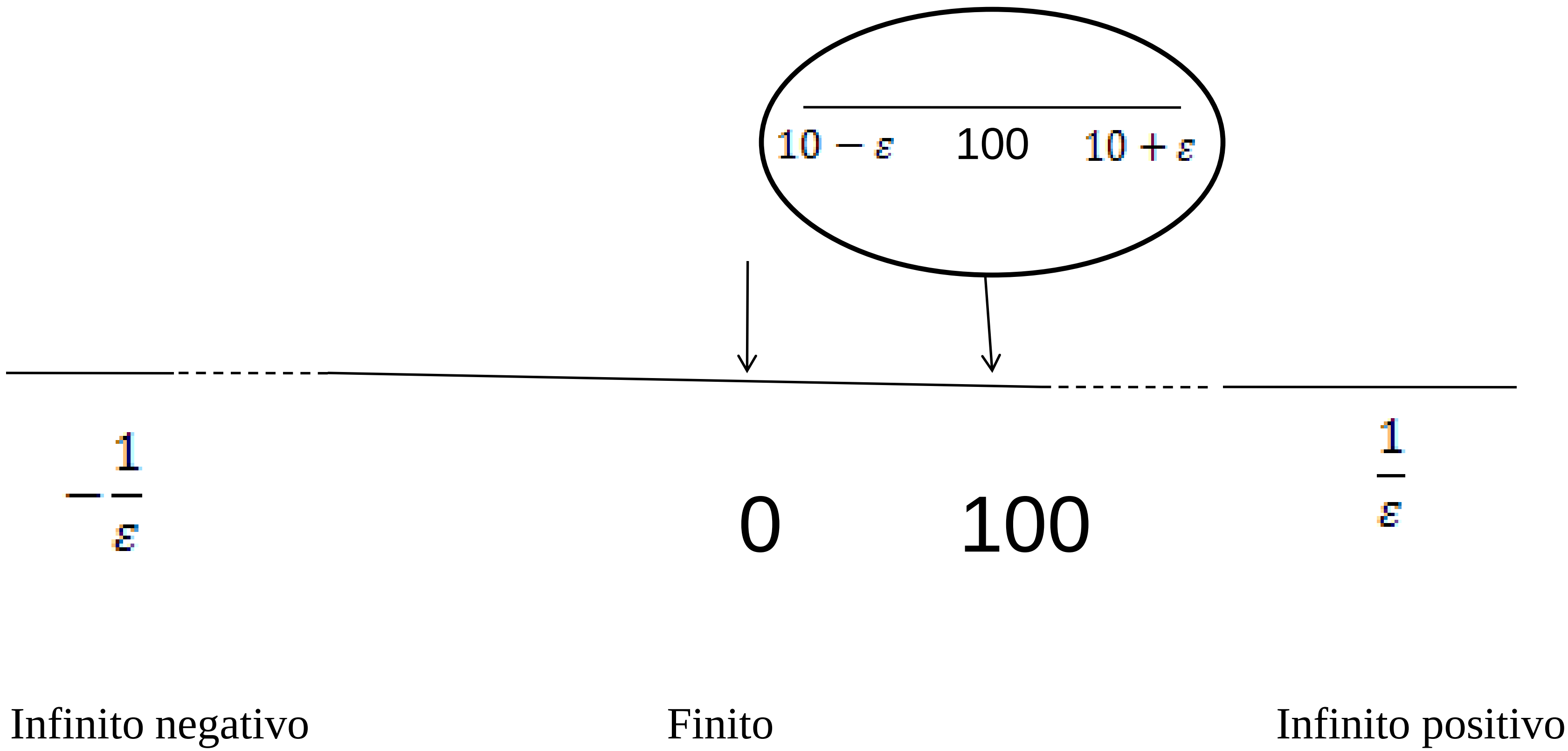
$$x - y \in \mu(0)$$

O símbolo usado para dois números hiperreais infinitamente pertos é

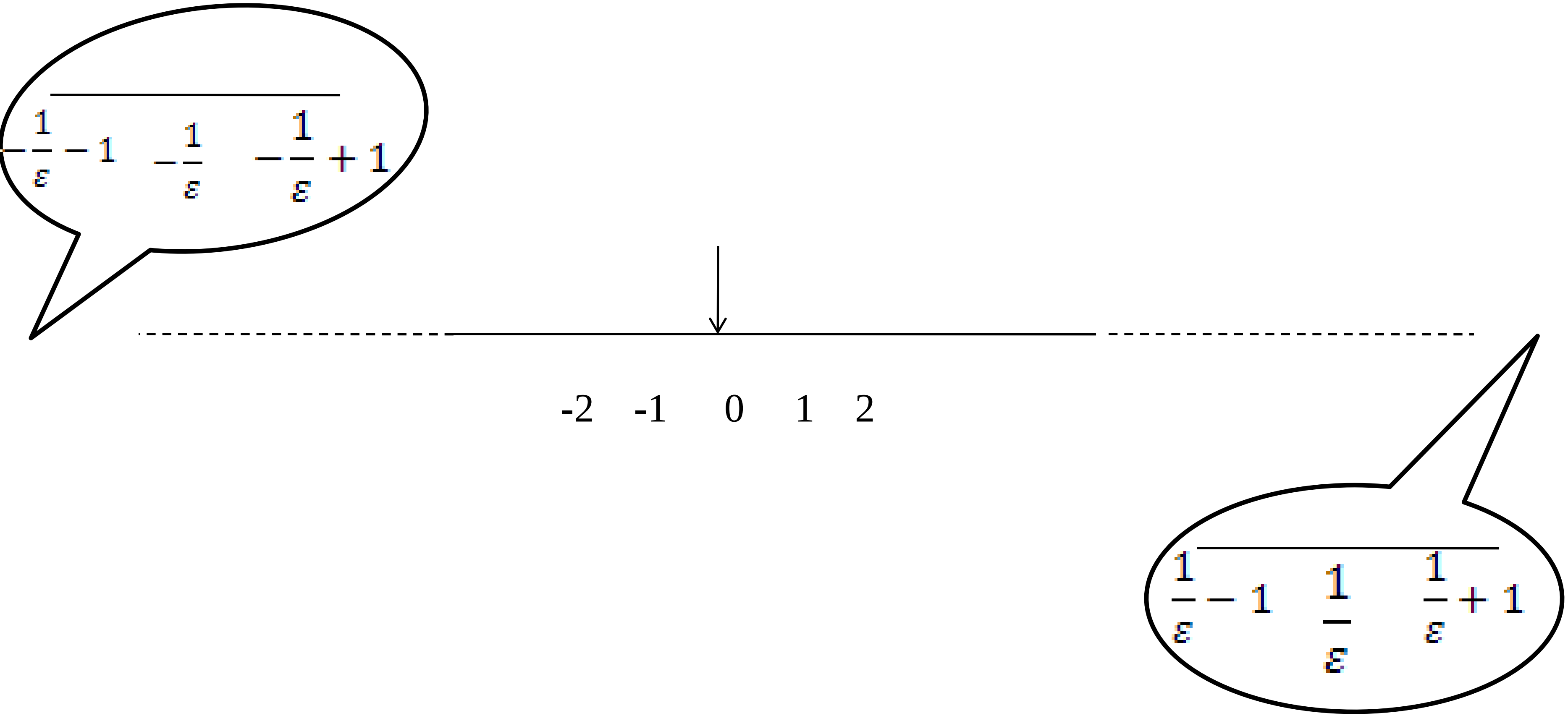
$$x \approx y$$



$-\varepsilon$
0
ε
0
$-\frac{1}{\varepsilon}$
$\frac{1}{\varepsilon}$
Infinito negativo
Finito
Infinito positivo


$10-\varepsilon$
100
$10+\varepsilon$
$-\frac{1}{\varepsilon}$
0
100
$\frac{1}{\varepsilon}$
Infinito negativo
Finito
Infinito positivo

infinitos



$\overline{-\frac{1}{\varepsilon}-1 \quad -\frac{1}{\varepsilon} \quad -\frac{1}{\varepsilon}+1}$
-2 -1 0 1 2
$\overline{\frac{1}{\varepsilon}-1 \quad \frac{1}{\varepsilon} \quad \frac{1}{\varepsilon}+1}$

Então, podemos dizer que um hiperreal número b:

A) é infinitesimal positivo se é menor do que qualquer número real positivo,

B) é infinitesimal negativo se for maior que qualquer número real negativo e

C) simplesmente infinitesimal, se for infinitesimal positivo, negativo ou nulo.

Assumimos que ε, δ são infinitesimais; b,c números hiperreais finitos, mas não infinitesimais; e H, K são número hiperreais infinitos:

- **Números Reais**: o único número real infinitesimal é o zero. Todo número real é finito.
- **Negativos**: $-\varepsilon$ é infinitesimal. -b é finito e não infinitesimal. –H é infinito.
- **Recíprocos**: se $\varepsilon \neq 0$, $\frac{1}{\varepsilon}$ é infinito. Se $b \neq 0$, $\frac{1}{b}$ é finito mas não
- infinitesimal. Se $H \neq 0, \frac{1}{H}$ é infinitesimal.
- **Soma**: $\varepsilon + \delta$ é infinitesimal, $b + \varepsilon$ é finito mas não infinitesimal, b+c é finito (podendo se infinitesimal). $H + b$ e $H + \varepsilon$ são infinitos.
- **Produtos**: $\varepsilon \bullet \delta$ e $b \bullet \varepsilon$ são infinitesimais. $b \bullet c$ é finito, mas não infinitesimal. $H \bullet b$ e $H \bullet \varepsilon$ são infinitos
- .
- **Quocientes**: $\frac{\varepsilon}{b}, \frac{\varepsilon}{H}, \frac{b}{H}$ são infinitesimais. $\frac{b}{c}$ é finito, mas
- não infinitesimal. $\frac{b}{\varepsilon}, \frac{H}{\varepsilon}, \frac{H}{b}$ são infinitos sempre que $\varepsilon \neq 0$

– **Raiz:** se $\varepsilon > 0, \sqrt[n]{\varepsilon}$ é infinitesimal. Se $b > 0, \sqrt[n]{b}$ é finito, mas não infinitesimal. Se $H > 0, \sqrt[n]{H}$ é infinito.

Seja b um número hiperreal finito, a *parte standard* de b, denotada por **st(b)** é o número real que está infinitamente próximo de b. Um número hiperreal infinito não tem standard parte. Temos, então:

st(b) é um número real.

b = st(b) + ε, para algum infinitesimal ε.

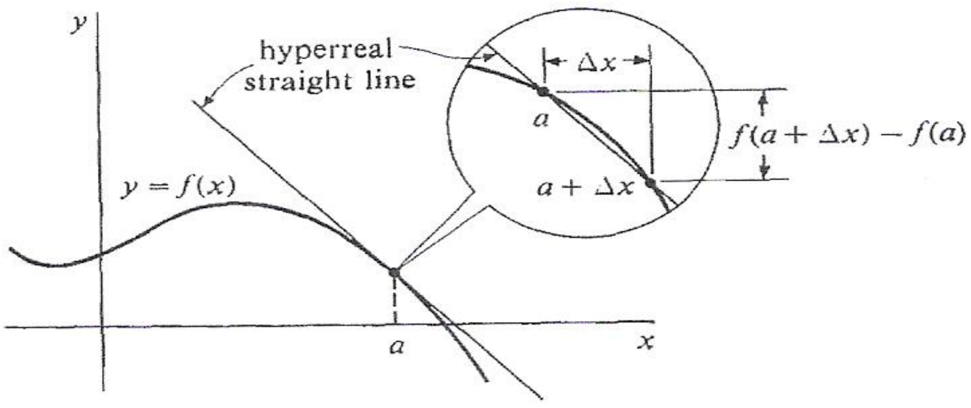
se b é real, então, b = st(b).

Dada uma função f : R* $\rightarrow$ R*, chamamos de **inclinação** de f, no número hiperreal a, o número real S, definido por:

$$S = st\left(\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}\right)$$

, para um infinitesimal não nulo Δx.

- Numa aproximação microscópica podemos descrever como:



Seja f uma função real de uma variável. A **derivada** de f é uma nova função f´, cujo valor em x é a inclinação de f em x. Simbolicamente:

, quando a inclinação existir. $f´(x) = st\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right)$

Exemplo: Encontra a derivada da função $f(x) = \sqrt{x}$.

Caso 1: x < 0. Como não está definida, não existe.

Caso 2: x = 0. Quando Δx é infinitesimal negativo, então $\frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{\sqrt{0+\Delta x} - \sqrt{0}}{\Delta x}$

, que não está definido pois Δx é indefinido. Quando Δx

é positivo então $\frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$

está definido e seu valor é infinito. Logo a

derivada de f em x não existe pois deve ser a parte standard.

O **limite** L de uma função f (x), é o valor da f (x), quando x aproxima-se infinitesimalmente de c sem ser igual à c, isto é f(x) esta perto infinitesimalmente de L, ou ainda $f(x) \approx L$. Simbolicamente lim $_{x \longrightarrow c}$ f(c) = L.

Uma função f é dita **contínua** num ponto c se :

1 – f está definida em c,

2 – quando $x \approx c$, então $f(x) \approx f(c)$

FUNÇÃO
UM POUCO DE SUA HISTÓRIA

RESUMO DO RESUMO DA HISTÓRIA DA DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO

O conceito de função aparece bem tarde na História de Matemática, apesar de ser central principalmente no Cálculo. Ele foi usado desde o egípcios, babilônios e gregos antes de Cristo, e mesmo na Europa do século XVI "implicitamente", como dizem os historiadores. Nos papiros egípcios e nas tábuas babilônicas já temos representações de funções em forma de tabelas, na Grécia antiga ela aparece como gráficos de curvas principalmente em Arquimedes e Apolônio. Na Europa da idade média iniciou-se a busca da expressão algébrica de uma função e quem primeiramente, pelo que se sabe, preocupou-se com isto foi Oresme (1323 - 1387) na França, ele procurava a dependência das duas magnitudes velocidade e tempo. Leibniz (1646 - 1716) usa pela primeira vez a palavra "função" como um termo para designar as várias quantidades geométricas associadas com a curva, elas eram "funções" da curva. Depois dele John Bernoulli em 1698 adota a terminologia de Leibniz – função - para uma magnitude variável, uma quantidade que é composta de qualquer maneira possível desta variável e de constantes.

Euler, que foi aluno de Bernoulli, em 1748 escreveu que:

“ *Uma função é uma valor variável numa expressão analítica, que é composta do valor variável e valores constantes*”. Então para Bernoulli e Euler a função era o que hoje chamamos do “*valor da função*” e não exigiam a unicidade, Euler dá como exemplo de função a raiz quadrada de uma variável. Para ele também só tinha sentido funções contínuas, mas já assumiam que a função podia ter duas representações, sua expressão analítica e a “*curva traçada a mão livre*”. Fourier (1768 - 1830) restringe de alguma maneira o domínio de definição da função, não era para qualquer número, mas poderia ser só para um intervalo , mais geralmente para um conjunto.

Outro fator importante estudado por Fourier foi de funções não contínuas. Finalmente em 1837 aparece a definição de Dirichlet que introduz o sentido mais amplo de função, a que conhecemos até hoje: “ *A função f: A* $\longrightarrow$ *B consiste de dois conjuntos não vazios o domínio A e a imagem B, e de uma regra que faz corresponder a cada x em A um único elemento y em B. Esta correspondência é denotadada por* $y = f(x)$ *ou* $x= f^{-1}(y)$.

Dizemos que y é a imagem de x e que x é uma imagem inversa de y”.

WEIERSTRASS E AS FUNÇÕES CONTÍNUAS

Um de seus alunos, Hettner, que redigiu um de seus cursos, escreveu que Weierstrass conhecia a propriedade de certas funções que são deriváveis em um número infinito de pontos e não ser em um outro conjunto infinito de pontos. Com isso se refuta a afirmação de que toda função contínua é derivável. O mesmo aluno, afirma que ele conhcia desde 1860 o exemplo de Riemann da função

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sen(n^2 x)}{n^2}$$

que é contínua (os termos da série são contínuos e a série é convergente, pois como $-1 \leq sen(n^2 x) \leq 1$ e a série $\sum \frac{1}{n^2}$ é convergente), sua derivada seria $f'(x) = \sum \cos(n^2 x)$

, mas essa série não é convergente em nenhum ponto real, logo não existe como função Recentemente Gerver, mostrou que essa função é derivável em alguns múltiplos de π . (Gerver, J. – The differentiability of the Riemann function at certain rational multilplies of . American Journal Math. 92, 33 – 55, 1970).

O exemplo de Weierstrass, que hoje é muito conhecido, de uma função contínua que não admite derivada em nenhum ponto real é o seguinte:

$f(x) = \sum b^n \cos(a^n x\pi)$, onde $b \in \left]0,1\right[$ e $a = 2p+1,\ p \in N^*$

Seu gráfico é :