

O PRIMEIRO LIVRO DE CÁLCULO

Johann Hudde

O matemático holandês Johann Hudde inventou um processo mecânico para descobrir raízes duplas para polinômios. Sua regra foi descrita em uma carta para Frans van Schooten, que foi publicada na edição latina da Geometria de Descartes em 1659.

Dado um polinômio $F(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$

escrito em ordem decrescente dos graus e multiplicamos os seus termos por uma progressão aritmética $a, a+b, a+2b, \dots, a+nb$ arbitrária, obtemos assim um outro polinômio

$$F^*(x) = \sum_{i=0}^n a_i (a + ib) x^i$$

Quando $a = 0$ e $b = 1$ temos

$$F^*(x) = \sum i a_i x^i = x F'(x)$$

onde $F'(x)$ é a derivada do polinômio $F(x)$.

Em geral

$$F^*(x) = aF(x) + bxF'(x)$$



O método de Hudde foi muito usado para se encontrar a subtangente de uma curva, quando era dada por uma equação polinomial, e também no processo de máximo e mínimo dessas equações. Para a subtangente Hudde se baseou no processo de Descartes, isto é, descrever uma circunferência que tangencia a curva no ponto dado. No processo de máximo e mínimo em Fermat, procurar um $y=a$ tal que a reta $y=a$ corta a curva em um ponto de tangência.

Se a curva é dada pela expressão algébrica por um polinômio de grau n

$$F(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i,$$

construímos um segundo polinômio $F^*(x)$ multiplicando os termos do primeiro por uma sequência de termos :

$a, a+b, a+2b, \dots, a+nb.$

$$F^*(x) = \sum_{i=0}^n a_i (a + ib) x^i$$

Nota que quando $a = 0$ e $b = 1$ teremos:

$$F^*(x) = \sum_{i=0}^n a_i i x^i = x F'(x),$$

onde

$$F'(x) = \sum i a_i x^{i-1}$$

é a derivada da $F(x)$ como conhecemos. Logo

$$F^*(x) = aF(x) + bx F'(x)$$

É fácil verificar que se $F(x)=0$ tem uma raiz dupla, digamos para $x=a$, então $F'(a) = 0$.

Vejamos com um exemplo como encontrar o coeficiente angular da tangente, digamos para uma parábola $y^2 = kx$

Primeiro fazemos interseção com a circunferência $(x-v)^2 + y^2 = r^2$

Temos
$$F(x) = kx + (v-x)^2 - r^2 = 0$$

um polinômio do segundo grau em x . Fazendo $a=0$ e $b=1$ para $F'(x)$

$$F'(x) = x^2 + (k-2v)x - r^2 = 0$$
, multiplicando por 2,1 e o,

respectivamente cada termo: $2x^2 + 1(k-2v)x - 0r^2 = 0$

Chegamos a expressão $2x^2 + (k - 2v)x = 0$, que dividida por x (lembrando sempre que x é diferente de zero): $v - x = \frac{1}{2}k$, que é a subtangente. Logo o coeficiente da tangente é dado por:

$$\frac{y}{\text{subtangente}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{x}} = \frac{dy}{dx}.$$

Para achar um ponto de máximo da função $f(x)$, pelo método de Hudde, recorremos a Fermat, fazendo $y = M$ constante, que deve ser raiz dupla. A equação fica:

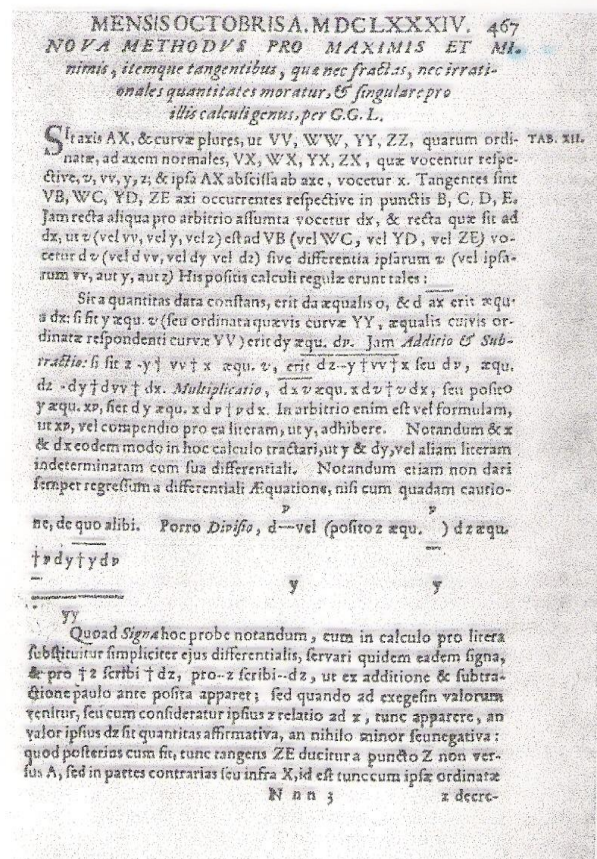
$$F(x) = f(x) - M = 0$$

Logo, $F'(x) = 0$, isto é: $f'(x) = 0$.

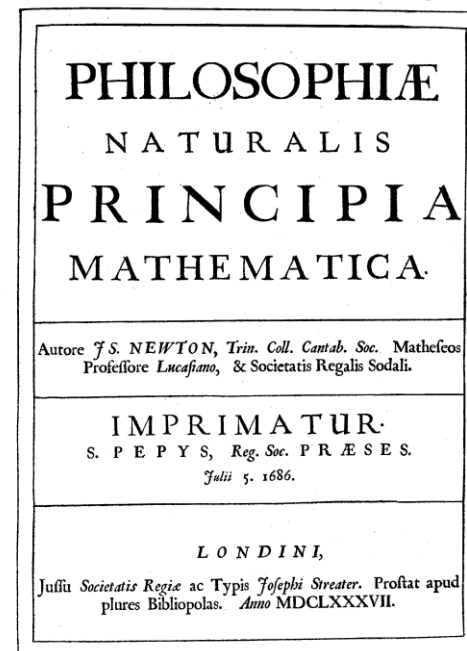
Voltando a Leibniz e Newton

Os nomes ligados à criação do cálculo são os de Leibniz (1646 - 1716) e Newton (1642 - 1727). O primeiro artigo que saiu publicado sobre esse assunto foi o de Leibniz em 1684 na *Acta Eruditorum* com o título: “Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moritur, & singulare pro illis calculi genus”

- Mais tarde, em 1686, Leiniz publica um outro artigo importante sobre essa ‘nova teoria’ também, no Acta Eruditorum : “*De Geometria recôndita & Analysis indivisibilium & infinitorum*”
- É um pequeno artigo de somente seis páginas que contém a definição de diferencial e dá breves regras para determinar a diferencial de somas, produtos, quocientes e raízes. Aparecem, também, algumas aplicações no cálculo da tangente e dos pontos críticos.



Em 1687 o método dos Fluxos de Newton, foi primeiramente publicado em forma de lemas no seu importante livro *Principia*. No seu lema I lemos: “Quantidades, e as razões de quantidades, que em qualquer tempo finito convergem continuamente a igualdade, e antes do fim desse tempo se aproximam mais uma da outra que por qualquer diferença dada se tornam finalmente iguais.”



Mais tarde Newton introduz no se livro *De Methodis Seierum et fluxionum* , escrito em 1671, mas só publicado em 1736 o seu método dos Fluxos:

“Eu chamarei de Quantidades Fluentes, ou simplesmente Fluentes estas quantidades que eu considero como aumentadas gradualmente e indefinidamente; e eu as representarei pelas últimas letras do alfabeto v, x, y e z para distinguir das outras quantidades que, nas equações, são consideradas como conhecidas e determinadas que nós representaremos pelas letras iniciais a, b, c etc.; eu representarei pelas mesmas letras sobrepostas de um ponto as velocidades cujas quantidades fluentes são aumentadas pelo movimento que as produz e, por conseqüência nós podemos chamar de Fluxões.”



LA
METHODE
DES
FLUXIONS.
ET DES SUITES INFINIES.

Par M. le Chevalier NEWTON.

*Traduit en françois par m^r de Buffon intendant du Jardin
du Roy.*



A PARIS,
Chez DE BURE l'aîné, Libraire, Quay des Augustins, à Saint
Paul.

M. DCC XL.

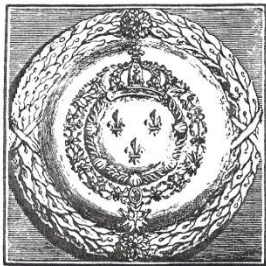
Já no final do século XVII, os irmãos Jakob Bernoulli (1654-1705) e Johann (Bernoulli (1667-1748) iniciam um grande estudo sobre esse assunto. Durante o período de 1687 a 1690, eles estudaram os dois primeiros artigos de Leibniz, entendendo-os e fazendo as devidas correções para a posterior divulgação do cálculo leibniziano.

Johann, por volta de 1691-1692 torna-se professor de Guillaume François Antoine de L Hospital (1661-1704), marquês de St. Mesme em Paris, onde esse toma conhecimento da “nova teoria” do cálculo. Em 1695, L Hospital escreve para seu “jovem professor de Groningen”, Johann dizendo que pretendia escrever um livro sobre as cônicas e outro de cálculo diferencial. O livro sobre cônicas foi publicado muito posteriormente, mas o de cálculo, ele envia uma cópia à Bernoulli, no qual tem na introdução grandes elogios a ele. Bernoulli agradece os elogios e incentiva seu discípulo a publicar logo o livro. Em 1696, um ano após, L Hospital encaminha à Academia de Ciência de Paris seu livro: “Analyse des Infiniment Petits, pour l intelligence des lignes courbes”, que é então publicado, tornando-se o primeiro livro de cálculo diferencial publicado.

Por volta de 1691-1692 Johann Bernoulli torna-se professor de Guillaume François Antoine de L'Hospital (1661-1704), marquês de St. Mesme em Paris, onde ele toma conhecimento da “nova teoria” do cálculo. Em 1695, L'Hospital escreve para seu “jovem professor de Groningen”, Johann dizendo que pretendia escrever um livro sobre as cônicas e outro de cálculo diferencial. O livro sobre cônicas foi publicado muito posteriormente, mas o de cálculo, ele envia uma cópia à Bernoulli, no qual tem na introdução grandes elogios a ele. Bernoulli agradece os elogios e incentiva seu discípulo a publicar logo o livro. Em 1696, um ano após, L'Hospital encaminha à Academia de Ciência de Paris seu livro: “Analyse des Infiniment Petits, pour l'intelligence des lignes courbes”, é então publicado e tornando-se o primeiro livro de cálculo diferencial editado.

ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,

Pour l'intelligence des lignes courbes.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DC. XCVI.

TITLE-PAGE OF THE FIRST EDITION OF L'HOSPITAL'S TEXTBOOK
(Courtesy of Columbia University Library)

THE FIRST CALCULUS TEXTBOOKS

161



MARQUIS DE L'HOSPITAL
(Courtesy of David Eugene Smith Library)

Na introdução de seu livro L'Hospital escreve: “De resto eu reconheço dever muito as luzes de Bernoulli, principalmente desse jovem professor de Groningue. Eu me servi de seus métodos e de suas descobertas, e também as de Leibniz. Por isso, eu consinto que eles reivindicuem tudo o que quiserem, me contentando daquilo que eles quiserem por bem me deixarem.”

Conteúdo do livro de L'Hospital

.” O livro consta de dez secções, assim distribuídas:

I – Onde se dá as regras do cálculo das diferenças.

II – Usagem do cálculo das diferenças para encontrar as tangentes de todas sortes de linhas curvas.

III – Usagem do cálculo das diferenças para encontrar o maior e menor aplicados, onde se reduzem as questões. Os máximos & mínimos.

IV – Usagem do cálculo das diferenças para encontrar os pontos de inflexão e de revertimento.(mudança de curvatura) (cusp ou rebroussement, quando a tangente é horizontal)

V – Usagem do cálculo das diferenças para encontrar os desenvolvimentos. (comprimento de curvas)

VI – Usagem do cálculo das diferenças para encontrar as cáusticas por refração.

VII - Usagem do cálculo das diferenças para encontrar as cáusticas por reflexão

VIII – Usagem do cálculo das diferenças para encontrar os pontos das curvas que tocam uma infinidade de linhas dadas pelas posições, retas ou curvas.

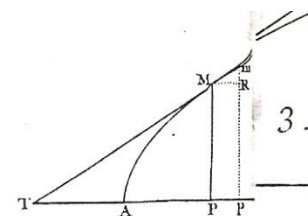
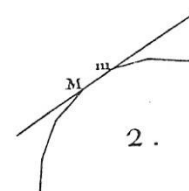
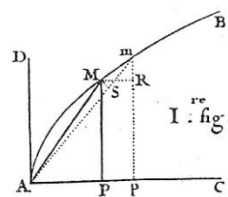
IX – Solução de alguns problemas que dependem dos métodos precedentes.

X – Nova maneira de se servir do cálculo das diferenças nas curvas geométricas, do qual se deduz o método de Descartes e Hudde.

Muito importante no livro de L Hospital é a definição de *Diferença*. Essa aparece na definição II, a definição I é de *Quantidades Variáveis e Constantes*.

Definição II – A porção infinitamente pequena que uma quantidade variável aumenta ou diminui continuamente é chamada de *Diferença*. Seja, por exemplo, uma linha curva qualquer AMB, que tem por eixo ou diâmetro a linha AC e por uma de suas aplicadas a reta PM (coordenada y) ; e seja outra aplicada infinitamente próxima da primeira. Isto posto, se tomarmos MR paralela a AC, as cordas AM e Am, que descrevemos do centro A, de intervalo AM e pequeno arco de círculo MS: Pp será a diferença de AP, Rm a de PM, Sm de AM e Mm a do arco AM. O mesmo para o triângulo pequeno Mam, que tem por base o arco Mm será a diferença do segmento AM; o pequeno espaço MPpm a do espaço compreendido pelas retas AP, Pm e pelo arco AM.

note 1:



- I – Pedimos que possamos tomar indiferentemente um por outra duas quantidades que não diferem entre elas de uma quantidade infinitamente pequena, ou (o que é a mesma coisa) uma quantidade, que aumenta ou diminui de uma outra quantidade infinitamente menor que ela, possa ser considerada como a mesma coisa. Pedimos, por exemplo, que podemos tomar Ap por AP , pm por PM , espaço Apm pelo espaço APM , o pequeno espaço $MPpm$ pelo retângulo $MPpr$, o pequeno setor AMm pelo triângulo MAS , o ângulo pAm pelo ângulo PAM etc..
- II – Pedimos que uma linha curva possa ser considerada como o conjunto de uma infinidade de pequenos segmentos retos, cada um infinitamente pequeno; ou (o que é a mesma coisa) como um polígono de uma ordem infinita de lados, cada um infinitamente pequeno; os quais são determinados pelos ângulos que fazem entre eles a curva e a linha. Pedimos, por exemplo, que a porção da curva Mm e o arco MS podem ser considerados como linhas retas por serem pequenos; de sorte que o pequeno triângulo mSM pode se considerado retângulo.
- Obs: Supomos obviamente que a seqüência das últimas letras do alfabeto z, y, x etc. marcam quantidades variáveis e as constantes pelas primeiras a, b, c etc. de sorte que quando x torna $x+dx$; y, z etc., e tornam-se $y+dy, z+dz$ etc. , e a, b, c etc. continuam os mesmos a, b, c etc..

Seu livro teve várias edições, uma tradução para o inglês em 1730 e foi usado em quase toda a Europa até início do século XIX, quando foi substituído pelo também famoso livro de Lacroix: *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul integral*, publicado 1802.

TRAITÉ
DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET

DU CALCUL INTÉGRAL,

PAR S. F. LACROIX.

Tantum series juncturaque pollet,
HORAT.

TOME PREMIER.

A PARIS,

Chez J. B. M. DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques,
quai des Augustins.

AN V, = 1797.

CRÍTICAS AO LIVRO DE L'HOSPITAL

A partir de 17 de julho de 1701, na Académie Royale des Sciences de Paris, inicia-se uma enorme polêmica ao *Infiniment Petits*, pelo matemático Michel Rolle (1654 - 1722), sustentado pelo então presidente Abade Jean Gallois (1632 - 1707). Nessa época, L'Hospital não se encontrava em Paris e seu grande defensor foi Pierre Varignon (1654 - 1722), baseado por uma vasta correspondência com Jean Bernoulli.



As críticas de Rolle se apoiavam em dois grandes argumentos:

1-Insuficiência e falta de rigor lógico nos conceitos e princípios fundamentais do ‘novo cálculo’. Isso só foi esclarecido plenamente com os trabalhos de Cauchy em 1821, e plenamente resolvido com Weierstrass em 1870 .

2-Mostrar com exemplos que o ‘novo cálculo’ conduzia a erros, no sentido de que não levava aos mesmos resultados que os dos métodos anteriores, por exemplo o método de Hudde.

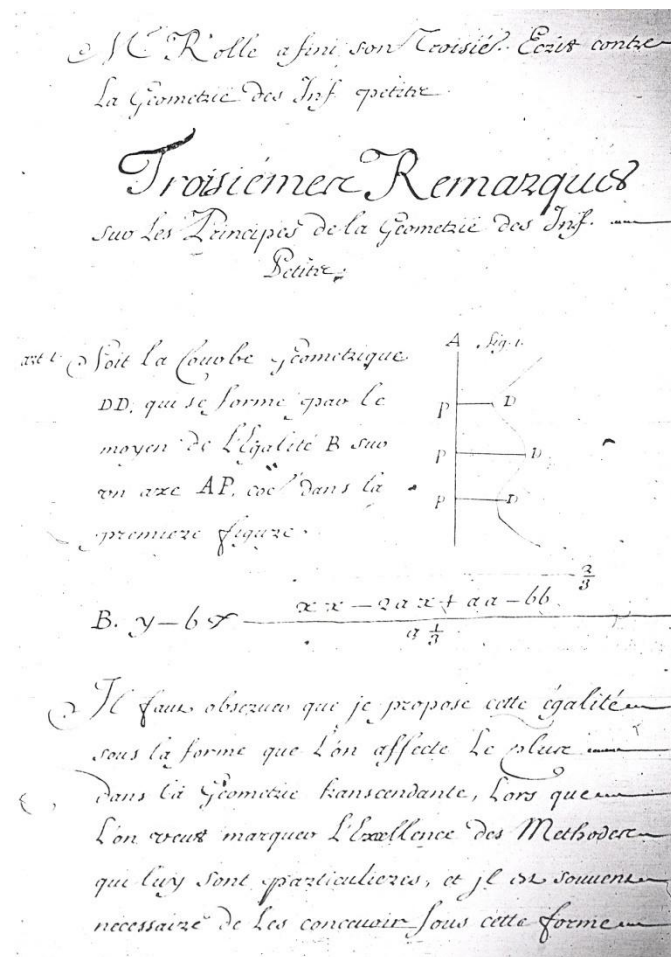
Varignon classifica a primeira crítica em três categorias: A primeira se refere as diferenciais de ordem superior, onde entram o conceito de infinitamente pequeno. A segunda crítica se refere a substituição de uma grandeza por seu valor acrescido ou subtraído de um valor infinitesimal. Finalmente, a última crítica Rolle diz que as diferenciais apresentadas por L'Hospital são zeros absolutos. Varignon tenta responder essas questões, que se tornaram conceitos importantes para o cálculo diferencial, mas elas só foram respondidas e aceitas pelos matemáticos com o trabalho de Cauchy, mais de um século depois. Varignon responde as críticas usando os trabalhos de Leibniz, Newton e sua correspondência com Jean Bernoulli.



Portrait de Pierre VARIGNON
conservé au Musée des Beaux Arts de Caen

Copyright 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213, 2214, 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224, 2225, 2226, 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2249, 2250, 2251, 2252, 2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270, 2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279, 2280, 2281, 2282, 2283, 2284, 2285, 2286, 2287, 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297, 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314, 2315, 2316, 2317, 2318, 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325, 2326, 2327, 2328, 2329, 2330, 2331, 2332, 2333, 2334, 2335, 2336, 2337, 2338, 2339, 2340, 2341, 2342, 2343, 2344, 2345, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2351, 2352, 2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365, 2366, 2367, 2368, 2369, 2370, 2371, 2372, 2373, 2374, 2375, 2376, 2377, 2378, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2385, 2386, 2387, 2388, 2389, 2390, 2391, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 2397, 2398, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2412, 2413, 2414, 2415, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2421, 2422, 2423, 2424, 2425, 2426, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2436, 2437, 2438, 2439, 2440, 2441, 2442, 2443, 2444, 2445, 2446, 2447, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455, 2456, 2457, 2458, 2459, 2460, 2461, 2462, 2463, 2464, 2465, 2466, 2467, 2468, 2469, 2470, 2471, 2472, 2473, 2474, 2475, 2476, 2477, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2483, 2484, 2485, 2486, 2487, 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2520, 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529, 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558, 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564, 2565, 2566, 2567, 2568, 2569, 2570, 2571, 2572, 2573, 2574, 2575, 2576, 2577, 2578, 2579, 2580, 2581, 2582, 2583, 2584, 2585, 2586, 2587, 2588, 2589, 2590, 2591, 2592, 2593, 2594, 2595, 2596, 2597, 2598, 2599, 2600, 2601, 2602, 2603, 2604, 2605, 2606, 2607, 2608, 2609, 2610, 2611, 2612, 2613, 2614, 2615, 2616, 2617, 2618, 2619, 2620, 2621, 2622, 2623, 2624, 2625, 2626, 2627, 2628, 2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634, 2635, 2636, 2637, 2638, 2639, 2640, 2641, 2642, 2643, 2644, 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654, 2655, 2656, 2657, 2658, 2659, 2660, 2661, 2662, 2663, 2664, 2665, 2666, 2667, 2668, 2669, 2670, 2671, 2672, 2673, 2674, 2675, 2676, 2677, 2678, 2679, 2680, 2681, 2682, 2683, 2684, 2685, 2686, 2687, 2688, 2689, 2690, 2691, 2692, 2693, 2694, 2695, 2696, 2697, 2698, 2699, 2700, 2701, 2702, 2703, 2704, 2705, 2706, 2707, 2708, 2709, 2710, 2711, 2712, 2713, 2714, 2715, 2716, 2717, 2718, 2719, 2720, 2721, 2722, 2723, 2724, 2725, 2726, 2727, 2728, 2729, 2730, 2731, 2732, 2733, 2734, 2735, 2736, 2737, 2738, 2739, 2740, 2741, 2742, 2743, 2744, 2745, 2746, 2747, 2748, 2749, 2750, 2751, 2752, 2753, 2754, 2755, 2756, 2757, 2758, 2759, 2760, 2761, 2762, 2763, 2764, 2765, 2766, 2767, 2768, 2769, 2770, 2771, 2772, 2773, 2774, 2775, 2776, 2777, 2778, 2779, 2780, 2781, 2782, 2783, 2784, 2785, 2786, 2787, 2788, 2789, 2790, 2791, 2792, 2793, 2794, 2795, 2796, 2797, 2798, 2799, 2800, 2801, 2802, 2803, 2804, 2805, 2806, 2807, 2808, 2809, 2810, 2811, 2812, 2813, 2814, 2815, 2816, 2817, 2818, 2819, 2820, 2821, 2822, 2823, 2824, 2825, 2826, 2827, 2828, 2829, 2830, 2831, 2832, 2833, 2834, 2835, 2836, 2837, 2838, 2839, 2840, 2841, 2842, 2843, 2844, 2845, 2846, 2847, 2848, 2849, 2850, 2851, 2852, 2853, 2854, 2855, 2856, 2857, 2858, 2859, 2860, 2861, 2862, 2863, 2864, 2865, 2866, 2867, 2868, 2869, 2870, 2871, 2872, 2873, 2874, 2875, 2876, 2877, 2878, 2879, 2880, 2881, 2882, 2883, 2884, 2885, 2886, 2887, 2888, 2889, 2890, 2891, 2892, 2893, 2894, 2895, 2896, 2897, 2898, 2899, 2900, 2901, 2902, 2903, 2904, 2905, 2906, 2907, 2908, 2909, 2910, 2911, 2912, 2913, 2914, 2915, 2916, 2917, 2918, 2919, 2920, 2921, 2922, 2923, 2924, 2925, 2926, 2927, 2928, 2929, 2930, 2931, 2932, 2933, 2934, 2935, 2936, 2937, 2938, 2939, 2940, 2941, 2942, 2943, 2944, 2945, 2946, 2947, 2948, 2949, 2950, 2951, 2952, 2953, 2954, 2955, 2956, 2957, 2958, 2959, 2960, 2961, 2962, 2963, 2964, 2965, 2966, 2967, 2968, 2969, 2970, 2971, 2972, 2973, 2974, 2975, 2976, 2977, 2978, 2979, 2980, 2981, 2982, 2983, 2984, 2985, 2986, 2987, 2988, 2989, 2990, 2991, 2992, 2993, 2994, 2995, 2996, 2997, 2998, 2999, 3000, 3001, 3002, 3003, 3004, 3005, 3006, 3007, 3008, 3009, 3010, 3011, 3012, 3013, 3014, 3015, 3016, 3017, 3018, 3019, 3020, 3021, 3022, 3023, 3024, 3025, 3026, 3027, 3028, 3029, 3030, 3031, 3032, 3033, 3034, 3035, 3036, 3037, 3038, 3039, 3040, 3041, 3042, 3043, 3044, 3045, 3046, 3047, 3048, 3049, 3050, 3051, 3052, 3053, 3054, 3055, 3056, 3057, 3058, 3059, 3060, 3061, 3062, 3063, 3064, 3065, 3066, 3067, 3068, 3069, 3070, 3071, 3072, 3073, 3074, 3075, 3076, 3077, 3078, 3079, 3080, 3081, 3082, 3083, 3084, 3085, 3086, 3087, 3088, 3089, 3090, 3091, 3092, 3093, 3094, 3095, 3096, 3097, 3098, 3099, 3100, 3101, 3102, 3103, 3104, 3105, 3106, 3107, 3108, 3109, 3110, 3111, 3112, 3113, 3114, 3115, 3116, 3117, 3118, 3119, 3120, 3121, 3122, 3123, 3124, 3125, 3126, 3127, 3128, 3129, 3130, 3131, 3132, 3133, 3134, 3135, 3136, 3137, 3138, 3139, 3140, 3141, 3142, 3143, 3144, 3145, 3146, 3147, 3148, 3149, 3150, 3151, 3152, 3153, 3154, 3155, 3156, 3157, 3158, 3159, 3160, 3161, 3162, 3163, 3164, 3165, 3166, 3167, 3168, 3169, 3170, 3171, 3172, 3173, 3174, 3175, 3176, 3177, 3178, 3179, 3180, 3181, 3182, 3183, 3184, 3185, 3186, 3187, 3188, 3189, 3190, 3191, 3192, 3193, 3194, 3195, 3196, 3197, 3198, 3199, 3200, 3201, 3202, 3203, 3204, 3205, 3206, 3207, 3208, 3209, 3210, 3211, 3212, 3213, 3214, 3215, 3216, 3217, 3218, 3219, 3220, 3221, 3222, 3223, 3224, 3225, 3226, 3227, 3228, 3229, 3230, 3231, 3232, 3233, 3234, 3235, 3236, 3237, 3238, 3239, 3240, 3241, 3242, 3243, 3244, 3245, 3246, 3247, 3248, 3249, 3250, 3251, 3252, 3253, 3254, 3255, 3256, 3257, 3258, 3259, 3260, 3261, 3262, 3263, 3264, 3265, 3266, 3267, 3268, 3269, 3270, 3271, 3272, 3273, 3274, 3275, 3276, 3277, 3278, 3279, 3280, 3281, 3282, 3283, 3284, 3285, 3286, 3287, 3288, 3289, 3290, 3291, 3292, 3293, 3294, 3295, 3296, 3297, 3298, 3299, 3300, 3301, 3302, 3303, 3304, 3305, 3306, 3307, 3308, 3309, 3310, 3311, 3312, 3313, 3314, 3315, 3316, 3317, 3318, 3319, 3320, 3321, 3322, 3323, 3324, 3325, 3326, 3327, 3328, 3329, 3330, 3331, 3332, 3333, 3334, 3335, 3336, 3337, 3338, 3339, 3340, 3341, 3342, 3343, 3344, 3345, 3346, 3347, 3348, 3349, 3350, 3351, 3352, 3353, 3354, 3355, 3356, 3357, 3358, 3359, 3360, 3361, 3362, 3363, 3364, 3365, 3366, 3367, 3368, 3369, 3370, 3371, 3372, 3373, 3374, 3375, 3376, 3377, 3378, 3379, 3380, 3381, 3382, 3383, 3384, 3385, 3386, 3387, 3388, 3389, 3390, 3391, 3392, 3393, 3394, 3395, 3396, 3397, 3398, 3399, 3400, 3401, 3402, 3403, 3404, 3405, 3406, 3407, 3408, 3409, 3410, 3411, 3412, 3413, 3414, 3415, 3416, 3417, 3418, 3419, 3420, 3421, 3422, 3423, 3424, 3425, 3426, 3427, 3428, 3429, 3430, 3431, 3432, 3433, 3434, 3435, 3436, 3437, 3438, 3439, 3440, 3441, 3442, 3443, 3444, 3445, 3446, 3447, 3448, 3449, 3450, 3451, 3452, 3453, 3454, 3455, 3456, 3457, 3458, 3459, 3460, 3461, 3462, 3463, 3464, 3465, 3466, 3467, 3468, 3469, 3470, 3471, 3472, 3473, 3474, 3475, 3476, 3477, 3478, 3479, 3480, 3481, 3482, 3483, 3484, 3485, 3486, 3487, 3488, 3489, 3490, 3491, 3492, 3493, 3494, 3495, 3496, 3497, 3498, 3499, 3500, 3501, 3502, 3503, 3504, 3505, 3506, 3507, 3508, 3509, 3510, 3511, 3512, 3513, 3514, 3515, 3516, 3517, 3518, 3519, 3520, 3521, 3522, 3523, 3524, 3525, 3526, 3527, 3528, 3529, 3530, 3531, 3532, 3533, 3534, 3535, 3536, 3537, 3538, 3539, 3540, 3541, 3542, 3543, 3544, 3545, 3546, 3547, 3548, 3549, 3550, 3551, 3552, 3553, 3554, 3555, 3556, 3557, 3558, 3559, 3560, 3561, 3562, 3563, 3564, 3565, 3566, 3567, 3568, 3569, 3570, 3571, 3572, 3573, 3574, 3575, 3576, 3577, 3578, 3579, 3580, 3581, 3582, 3583, 3584, 3585, 3586, 3587, 3588, 3589, 3590, 3591, 3592, 3593, 3594, 3595, 3596, 3597, 3598, 3599, 3600, 3601, 3602, 3603, 3604, 3605, 3606, 3607, 3608, 3609, 3610, 3611, 3612, 3613, 3614, 3615, 3616, 3617, 3618, 3619, 3620, 3621, 3622, 3623, 3624, 3625, 3626, 3627, 3628, 3629, 3630, 3631, 3632, 3633, 3634, 3635, 3636, 3637, 3638, 3639, 3640, 3641, 3642, 3643, 3644, 3645, 3646, 3647, 3648, 3649, 3650, 3651, 3652, 3653, 3654, 3655, 3656, 3657, 3658, 3659, 3660, 3661, 3662, 3663, 3664, 3665, 3666, 3667, 3668, 3669, 3670, 3671, 3672, 3673, 3674, 3675, 3676, 3677, 3678, 3679, 3680, 3681, 3682, 3683, 3684, 3685, 3686, 3687, 3688, 3689, 3690, 3691, 3692, 3693, 3694, 3695, 3696, 3697, 3698, 3699, 3700, 3701, 3702, 3703, 3704, 3705, 3706, 3707, 3708, 3709, 3710, 3711, 3712, 3713, 3714, 3715, 3716, 3717, 3718, 3719, 3720, 3721, 3722, 3723, 3724, 3725, 3726, 3727, 3728, 3729, 3730, 3731, 3732, 3733, 3734, 3735, 3736, 3737, 3738, 3739, 3740, 3741, 3742, 3743, 3744, 3745, 3746, 3747, 3748, 3749, 3750, 3751, 3752, 3753, 3754, 3755, 3756, 3757, 3758, 3759, 3760, 3761, 3762, 3763, 3764, 3765, 3766, 3767, 3768, 3769, 3770, 3771, 3772, 3773, 3774, 3775, 3776, 3777, 3778, 3779, 3780, 3781, 3782, 3783, 3784, 3785, 3786, 3787, 3788, 3789, 3790, 3791, 3792, 3793, 3794, 3795, 3796, 3797, 3798, 3799, 3800, 3801, 3802, 3803, 3804, 3805, 3806, 3807, 3808, 3809, 3810, 3811, 3812, 3813, 3814, 3815, 3816, 3817, 3818, 3819, 3820, 3821, 3822, 3823, 3824, 3825, 3826, 3827, 3828, 3829, 3830, 3831, 3832, 3833, 3834, 3835, 3836, 3837, 3838, 3839, 3840, 3841, 3842, 3843, 3844, 3845, 3846, 3847, 3848, 3849, 3850, 3851, 3852, 3853, 3854, 3855, 3856, 3857, 3858, 3859, 3860, 3861, 3862, 3863, 3864, 3865, 3866, 3867, 3868, 3869, 3870, 3871, 3872, 3873, 3874, 3875, 3876, 3877, 3878, 3879, 3880, 3881, 3882, 3883, 3884, 3885, 3886, 3887, 3888, 3889, 3890, 3891, 3892, 3893, 3894, 3895, 3896, 3897, 3898, 3899, 3900, 3901, 3902, 3903, 3904, 3905, 3906, 3907, 3908, 3909, 3910, 3911, 3912, 3913, 3914, 3915, 3916, 3917, 3918, 3919, 3920, 3921, 3922, 3923, 3924, 3925, 3926, 3927, 3928, 3929, 3930, 3931, 3932, 3933, 3934, 3935, 3936, 3937, 3938, 3939, 3940, 3941, 3942, 3943, 3944, 3945, 3946, 3947, 3948, 3949, 3950, 3951, 3952, 3953, 3954, 3955, 3956, 3957, 3958, 3959, 3960, 3961, 3962, 3963, 3964, 3965, 3966, 3967, 3968, 3969, 3970, 3971, 3972, 3973, 3974, 3975, 3976, 3977, 3978, 3979, 3980, 3981, 3982, 3983, 3984, 3985, 3986, 3987, 3988, 3989, 3990, 3991, 3992, 3993, 3994, 3995, 39

No dia 12 de Março de 1701, Michel Rolle apresenta na Académie Royale des Sciences de Paris três exemplos de curvas algébricas, que, para ele, na busca de seus máximos e mínimos pelo método de Hudde mostravam-se diferentes do método apresentado por L'Hospital no Infinitement Petit.

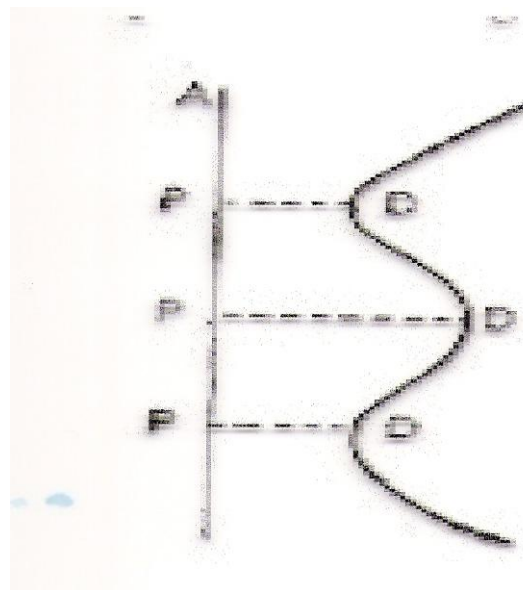


Então, o primeiro exemplo de Rolle é o da curva de equação

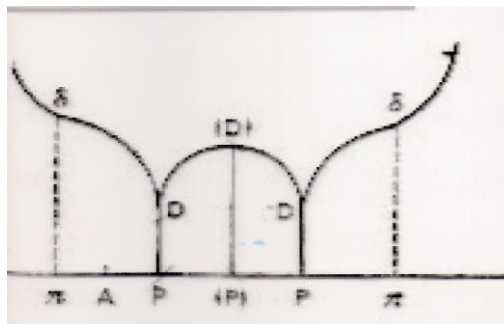
$$y - b = \frac{(x^2 - 2ax + a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$$

cujo o gráfico apresentado por ele no seu trecho é:

“O método dos infinitamente pequenos parece dar somente uma solução, mas se aplicarmos o método de Hudde encontramos três soluções: $x = a + b$, $x = a$ e $x = a - b$, que se reconhece muito bem pelo gráfico.” (ele coloca o eixo x na vertical)



Em 9 de julho de 1701 Varignon responde essa acusação, dizendo que não existe contradição entre os dois métodos; simplesmente Rolle considerou somente uma parte do método de L Hospital, esqueceu de usar a condição de que dy pode ser infinito, isto é, anular o denominador da ‘diferença’ dy . O primeiro ponto dá o máximo cuja tangente é paralela ao eixo x , e $x = a + b$, $x = a - b$ dão os dois mínimos de tangente perpendicular a esse eixo. Varignon corrige então o gráfico apresentado por Rolle.



O segundo exemplo apresentado à Academie por Rolle, para contestar o Cálculo Diferencial, foi da curva de equação :

$$x = \frac{y^2 - by + c^2}{x - a}$$

Nesse exemplo, Rolle mostrou que o Cálculo Diferencial determina, pelo seu método, dois pontos extremos, $x=a$ e $x=a/2$, por outro lado, o método de Hudde um só $x=a/2$.

Varignon mostrou, então, que mesmo diferenciando e considerando que $x \neq a$, que temos somente um resultado $x=a/2$. Analisando melhor a curva acima, lembrando sempre que $x \neq a$ temos a equação de uma hipérbole, pois:

A) Quando $c^2 + a^2/4 - b^2/4$

for igual a zero, temos a hipérbole degenerada em duas retas concorrentes no ponto $(a/2, b/2)$.

B) Quando $c^2 + a^2/4 - b^2/4$

for maior que zero temos dois pontos extremos, um de máximo e outro de mínimo, dependendo do ramo da hipérbole que se considere, isto para $x = a/2$.

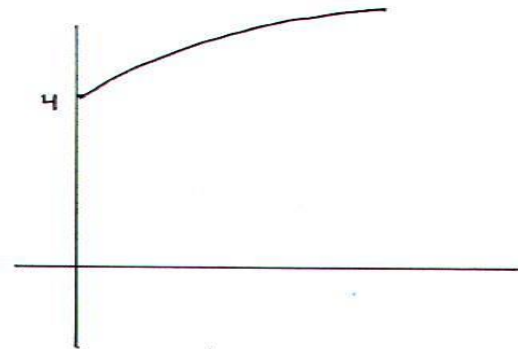
C) No caso em que for menor que zero temos também dois pontos extremos, um de máximo e outro de mínimo, com tangentes paralelas ao eixo dos y e no ponto de ordenada $y = b/2$.

O terceiro exemplo é da curva algébrica de equação:

$$y = 2 + \sqrt{4x} + \sqrt{4 + 2x}$$

Rolle contesta o método de L Hospital, dizendo que ele dá um resultado onde a ordenada é imaginária, e que, por outro lado, o de Hudde dá um resultado real.

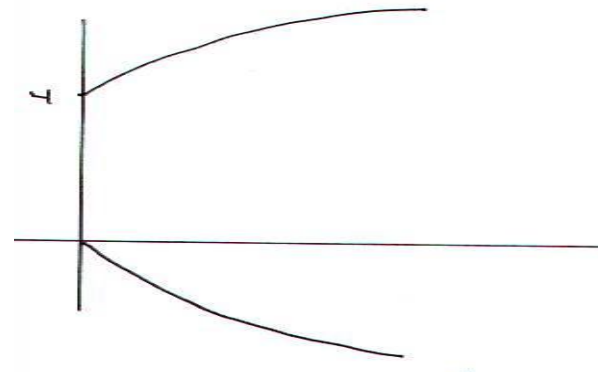
Se gráfico é:



Vejamos qual foi o erro cometido por Rolle nesse exemplo.

Quando ele eleva a expressão a o quadrado, introduz um novo gráfico:

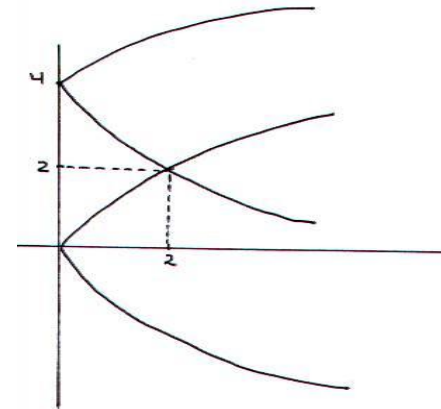
$$(y - 2)^2 = 6x + 4 + 2\sqrt{16x + 8x^2}$$



Para chegar na expressão, $y^4 - 8y^3 + 16y^2 - 12y^2x + 48yx - 64x + 3x^2 = 0$

,eliminado todos os radicais e, então, introduz mais dois ramos ao gráfico:

E aparece então o ponto duplo.



ATAQUE DE JOHANN BERNOULLI À L'HOSPITAL

Depois da morte de L'Hospital, em 1704, o matemático e amigo dele Saurin declara na Academia de Ciência de Paris, que sua “regra” era devido a Leibniz. Bernoulli inicia então uma série de ataques ao Marques acusando-o praticamente de plagiador, apesar de ter sido seu professor em Paris.

O problema da “Regra” somente fica esclarecido em 1922, quando são publicadas as cartas de ambos: L'Hospital e Bernoulli.



Trecho da carta de Bernoulli à L'Hospital:

à cet égard : car de quel bien que je prenne la chose
se me trouve fort embarrassé; N'est pas vrai que je vous
ai promis de ne faire part de mes découvertes qu'à vous,
mais ne conseillerai-je vous de refuser à Mr. Leibnitz la demande
de ^{intéresser} le commerce avec lui, survenant ce la seroit
agir peu honnêtement avec un homme à qui j'en fais beaucoup
coup redevable. Cependant je crois que pour ^{tenir} la
promesse que j'en ai faite le meilleur expédient sera
que j'en avertisse Mr. Leibnitz que ce qui concerne
en general le calcul différentiel et l'intégral et ce qui
est déjà connu à mon usage et peut-être à d'autres au-
si le bien qu'il en a; mais pour ce qui regarde les choses
qui ont été agitées entre vous et moi en particulier et les
découvertes que j'en ai faites ~~et qui~~ à votre égard
et que je ferai à l'avenir à l'occasion que vous m'en don-
nerez; je vous promets sincèrement Monsieur de les tenir
toujours secrètes et de n'en aventurer rien de tout; Je vous
en ay déjà donné des preuves par avance, ayant toujours
refusé tout des préceptes fournis à Monsieur Varignon
les principes du calcul intégral qu'il a si souvent et si instam-
ment sollicités, quoique d'ailleurs je luy aye beaucoup d'obli-
gations de m'avoir fait ^{de grands} services. Je ne doute pas
qu'il ne les demande en core, mander moi par quel moyen
je la puisse faire dispenser de sa demande pour toujours.
Je pars demain pour la campagne à 6 lieues d'icy
pour y tenir les camps de Féné, si vous voulez prendre
la peine de m'écrire vous n'avez qu'à fuir l'adresse
ordinaire. Ayant fait à Madame mes très humbles respects
et ceux de ma femme le suis
Monsieur votre très humble et très
obéissant serviteur
Bernoulli.

ATAQUE AO CÁLCULO DIFERENCIAL POR BERKELY

1685 - 1753

- **George Berkeley** Foi um bispo irlandês e filosofo, cuja maior contribuição conhecida à matemática foram seus ataques, com fundamentações lógicas ao cálculo diferencial, tanto de Newton, de Leibniz, como de L Hospital



Depois de trinta anos, quando o Cálculo Diferencial já tinha provado sua eficiência tanto em Matemática como em Mecânica, e mesmo a exatidão nos resultados, Berkely publica seu *L'Analyste*, um livro onde ele ataca esse método, usando a lógica como ferramenta e os argumentos parecido com os de Rolle. Para ele se os resultados dão resultados corretos, é simplesmente por manipulações duvidosas não reveladas pela matemática.

A – mostrando, em primeiro lugar, que os princípios e regras fundamentais do novo cálculo faltam rigor e são errôneos ou insuficientes;

B – em seguida, como o novo cálculo dá resultados certos, ele mostra que isso só foi possível ao preço de um jogo de compensação de erros, nos desenvolvimentos que conduziram à esses resultado corretos.

Quando ao argumento A usa dos mesmos raciocínios que Rolle os utilizou, primeiramente criticando os fluxos de Newton, quando faz desaparecer infinitésimos de ordem superior e depois Leibniz : “...supor que uma quantidade diminui infinitamente e, em conseqüência disso a rejeitar, é na realidade rejeitar o infinitésimo; e, em verdade, é necessário uma maravilhosa finura de discernimento para ser capaz de fazer a distinção entre os acréscimos que somem e as diferenças infinitesimais.”

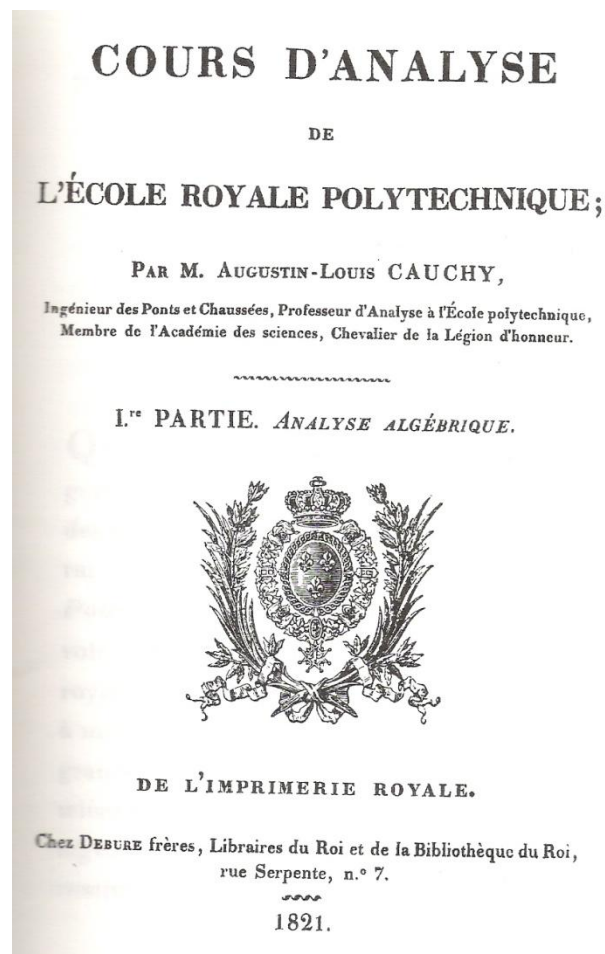
TORNANDO O CÁLCULO RIGOROSO – CAUCHY

Depois das críticas de Berkeley, vários matemáticos como Maclaurin, d'Alembert, Carnot, Euler e outros buscaram fundamentar o cálculo das diferenças de Leibniz e os fluxos de Newton. Quem conseguiu um caminho importante foi Lagrange. Essa busca se intensificou com a criação da Ecole Polytechnique de Paris por Napoleão, na qual a didática do ensino de cálculo se tornou importante. Um dos fatores que levou a tornar possível tal intento foi os estudos de convergência de séries e, também, a utilização nesses estudos das desigualdades algébricas.

Um nome importante nessa busca foi de Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1867), professor da escola politécnica, que escreveu vários livros sobre esse tema:



Na busca de uma formulação rigorosa, para a época, dos conceitos do cálculo, Cauchy, ainda não usando as desigualdades algébricas, escreveu no Resume: *Seja dois números bem pequenos; o primeiro é escolhido para um valor numérico de h (isto é valor absoluto) que seja menor que ϵ , e para todo valor de x incluído (no intervalo de definição), a razão ficará maior que $\epsilon - h$ e menor que ϵ . Isto é, Cauchy dá uma definição do limite para derivada.*



Sua definição de continuidade tem duas versões, uma literal e outra algébrica, mas que são equivalentes:

A função $f(x)$ será uma função contínua na variável x entre dois limites dados ('limite' aqui significa limitada) se, para cada valor de x entre esses limites, o numérico valor (absoluto) da diferença decresce indefinidamente com a . Em outras palavras, a função $f(x)$ é contínua em relação a x entre um limite dado, se, entre esses limites, um incremento infinitesimal na variável produzirá sempre um pequeno incremento na função mesma.

Quanto a integral, a primeira definição dada por Cauchy foi de anti-derivada: *a integral de $f(x)$ entre os valores $x = a$ e $x = b$ é, por definição, $F(a) - F(b)$, onde F é definida pela equação .*

Ele já dá o Teorema Fundamental do Cálculo com a versão que conhecemos hoje:

Se $f(x)$ é finita e contínua em um intervalo , $[x_0, X]$ então

$$\mathfrak{F}(x) = \int_{x_0}^x f(x)dx \quad \text{para} \quad \mathfrak{F}'(x) = f(x)$$

ELEMENTOS DO CÁLCULO DE KARL WEIERSTRASS 1815-1897

Weierstrass deixou muito pouca coisa escrita, seus artigos, mas das fontes mais importante de seu trabalho na busca do rigor no cálculo aparece nas anotações de seus alunos.



‘Se duas quantidades podem ser ligadas de maneira que a todo valor determinado de uma corresponde um valor determinado da outra, então chamamos a última de uma função da primeira.’

‘ Se, dado qualquer ε , existe um δ_0 tal que para $0 < \delta < \delta_0$ a diferença $f(x_0 - \delta) - L$ é menor em valor absoluto que ε , então L é o limite de $f(x)$ para $x = x_0$.’

- O que Weierstrass considera o verdadeiro teorema fundamental do cálculo é enunciado como: “Se uma função real de variável real é n vez continuamente derivável e se todas as derivadas até a ordem $n - 1$ são nulas em um ponto x_0 , então :

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0))^n$$