# ALGUMAS HISTÓRIAS DO CÁLCULO DIFERENCIAL

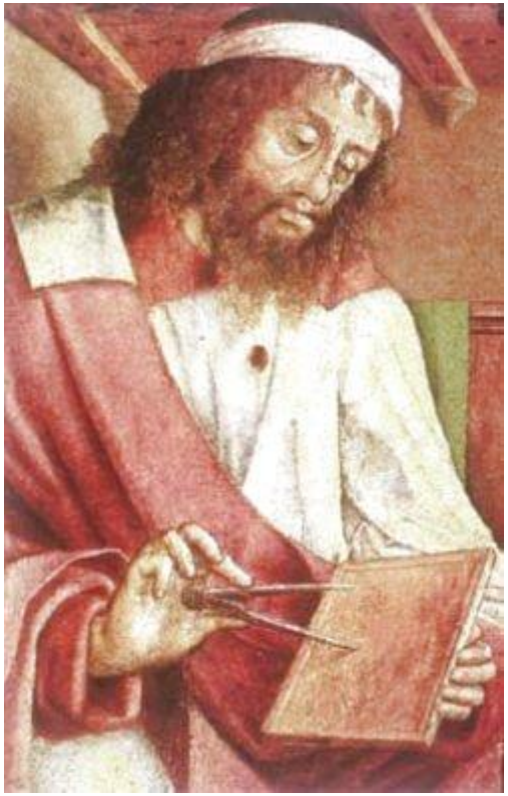
## História da tangente

# História da tangente

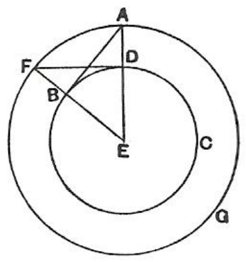
A história da reta tangente a uma curva em um ponto dessa, se confunde com a história do cálculo, foi sem dúvida a  mola desafiadora que levou os matemáticos do século XVII a criarem o Cálculo. Grandes nomes desde Euclides até Newton e Leibniz trabalharam no problema de como encontrar essa reta, e o problema inverso, isto é, dada uma reta e um ponto dela, encontrar a curva que passa por esse ponto e tem essa reta como tangente nesse pondo.

# Euclides

- A única curva mencionada nos Elementos é a circunferência, sendo o estudo das suas propriedades o assunto do livro terceiro.
- A primeira definição desta linha ( tangente ) encontra-se no livro III, dos Elementos ( definição 2 ), e diz que a tangente à circunferência é a reta que a encontra sem a cortar-la
  Dessa definição segue que a perpendicular AE no extremo A do diâmetro OA é  a tangente em A ( corolário da proposição  III, 16 ) . Com efeito, a reta AE caí fora da curva ( proposição 16 ) porque se não caísse, cortá-la-ia em outro ponto A’ e o triângulo AOA’, que é isóscele pois OA = OA’,com ângulo OAA’= ângulo OA’A, que é reto, logo teria dois ângulos retos o que é absurdo.



- Não há reta nenhuma que passe por A e esteja situada no espaço A'AE formado pelo arco AA'e pela tangente ( proposição 16 ) e que forme ângulo reto com o diâmetro em A, a não ser a tangente. Suponhamos que exista AF:
- Seja OG a reta de O perpendicular a AF. Como o ângulo AGO é reto e o ângulo OAG é menor que um reto , então OA > OG. Por outro lado OA = OH raio do círculo. Então OH > AG o que é impossível, pois, AF deixa o arco num mesmo espaço.
- Portanto estas proposições de Euclides dão-nos a construção das tangentes que partem dum ponto exterior ( proposição 17 ). Dados o círculo de centro E e raio ED, e o ponto A, sejam o círculo de centro E passando por A e F o ponto sobre ele interseção com a perpendicular AE por D. O ponto B é a interseção do primeiro círculo com FE. Então os triângulos AEB e EFD são semelhantes pois AE = EF , EB = ED e o ângulo < E é comum. Logo os ângulos são iguais; como < EDF é reto então < EBA também o é.

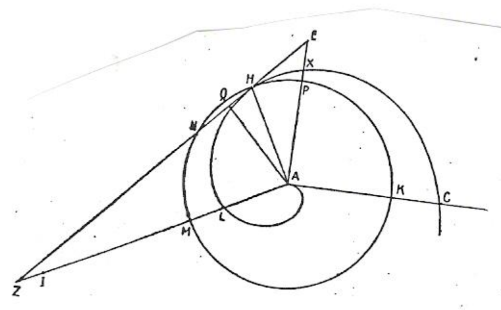


# Arquimedes

Para Arquimedes a espiral, principal curva estudada por ele, era descrita pela composição de dois movimentos, um de rotação de uma semi-reta com origem fixa e o outro de deslocamento sobre esta semi-reta. Sua equação polar é $r = a\,\theta$, com a constante, e para ele descrita no sentido horário. Então neste sentido temos $x = r\cos\theta$ e $y = -\,r\,\text{sen}\,\theta$, e para a equação paramétrica da espiral $x = at\cos t$ e $y = -\,a.t\,\text{sen}\,t$. Seu vetor tangente em um ponto $t = \alpha$ será :

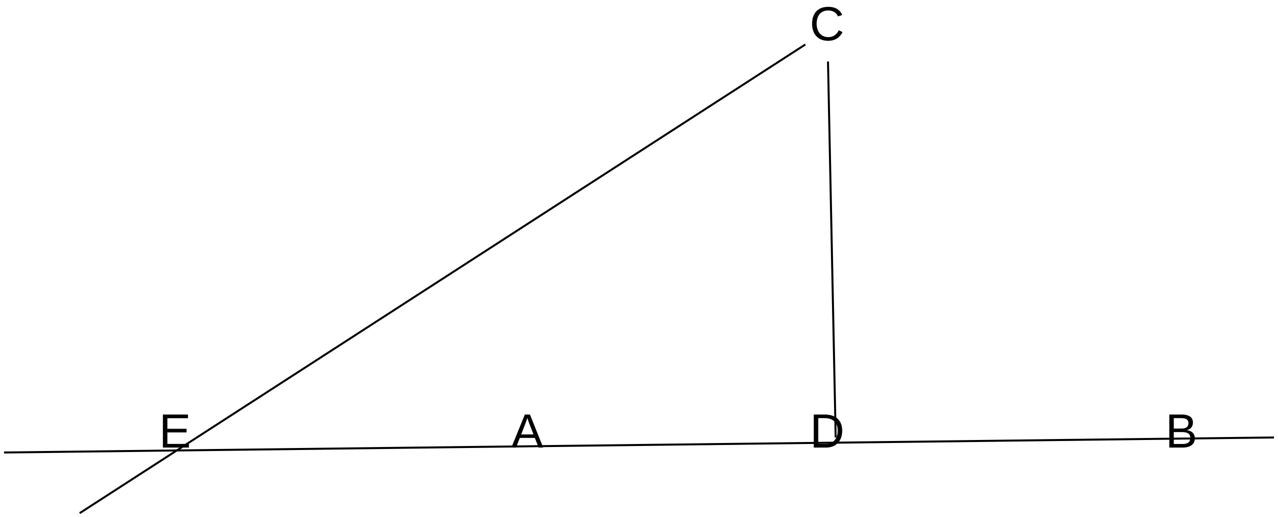
- $< a\cos\alpha - a\alpha\,\text{sen}\,\alpha\ ,\ -\,a\,\text{sen}\,\alpha - a\alpha\cos\alpha > \ = a < \cos\alpha\ ,\ -\,\text{sen}\,\alpha > + \,a\,\alpha < -\,\text{sen}\,\alpha\ ,\ -\cos\alpha >$.

- O primeiro vetor unitário < cos $\alpha$ , - sen $\alpha$ > está na direção do raio polar r e outro também unitário < - sen $\alpha$ , - cos $\alpha$ > é perpendicular ao primeiro e tangente ao círculo de raio $r = a\alpha$ , no ponto de tangencia. Podemos então afirmar que a velocidade do ponto na direção do raio é a e sobre o círculo de centro na origem e que passa pelo ponto de tangencia, é $a\alpha$. Logo as distâncias percorridas para $t = \alpha$ será $a\alpha$ na direção do raio e $t\alpha^2$ no círculo.
- Triângulos semelhantes AZH e HPQ e então: AZ / AH = HP / PQ onde Q - H é o vetor tangente em H , logo
- $AZ = AH \cdot HP / PQ = a\alpha \cdot (a\alpha / a) = a\alpha^2$
- que é igual ao arco KH percorrido sobre o círculo.
- Uma outra demonstração é calculando a reta tangente e fazendo sua interseção com a subtangente. Se o ponto de tangência é H = (a $\alpha$ , $\alpha$ ) , a equação da subtangente será:
- $\theta = \alpha - \pi / 2$.
-



# Apolônio de Perga ( 262 - 200 d. C. )

# RAZÃO HARMÔNICA

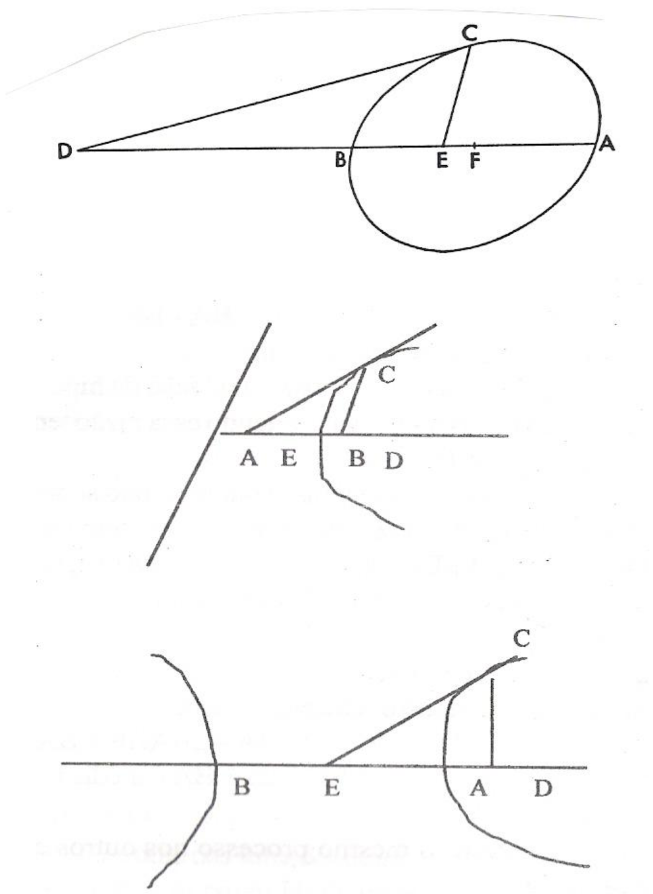



$$\frac{BD}{DA} = \frac{EB}{EA}$$

# Apolônio de Perga ( 262 - 200 d. C. )

- Chales no seu livro “Aperçu historique sur l’origine et, le développement des méthodes en géométrie “ publicado em Paris em 1875 mostrou que Apolônio em suas construções geométricas uso o equivalente hoje à equação $y^2 = 2px + qx^2$ , em coordenadas cartesianas para as cônicas. Tomando a equação acima para a cônica, sua reta tangente no ponto ( a , b ) será:
- $y = [ ( p + qa) / b ] x + c$. Obrigando a passar pelo ponto temos para c o valor
- $c = pa / b$ e a equação fica $y = [ ( p + qa) / b ] x + pa / b$. No caso do diâmetro $y = 0$ teremos para o ponto E a abscissa $x = - pa / ( p + qa )$.
- No caso da elipse, fazendo $q = - q$ , então $x = pa / ( qa - p )$ , e a equação da elípse fica:
- $( x - p / q )^2 / ( p^2 / q^2 ) + y^2 / ( p^2 / q^2 ) = 1$.
- $a / ( 2p / q - a ) =$
- $[ pa / ( qa - p ) ] / [ pa / ( qa - p ) - 2p / q ]$ , que simplificando teremos
- $a / ( qa - p ) - 2 / q = ( 2p - aq ) / [ q / ( qa - p ) ]$, e então
- $aq - 2qa + 2p = 2p - aq$.
-

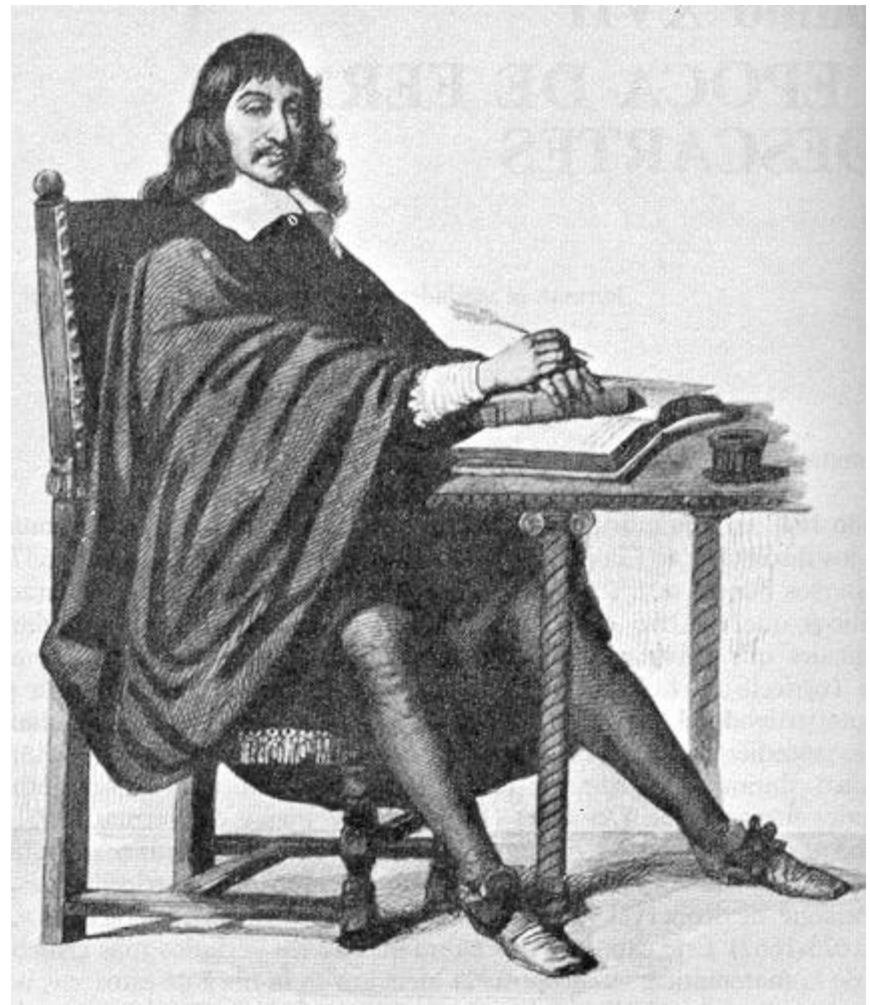
- No caso da parábola fazendo q = 0 a razão de Apolônio se reduz a AE = ED que em coordenadas cartesianas como o ponto E tem abscissa x = -pa / ( p + qa ) e com q = 0
- x = -a.
- Vejamos agora o caso da hipérbole, que é quando q > 0. Sua equação será:
- $( x + p / q )^2 / ( p^2 / q^2 ) - y^2 / ( p^2 / q^2 ) = 1.$
- Então o ponto B terá abscissa x = - 2p / q, e por uma simples substituição teremos a razão de Apolônio : BD / DA = BE / EA.
- Por esta razão harmônica Apolônio construía a tangente num ponto da cônica determinando o ponto E no diâmetro que satisfaz a razão, e que por sua vez está também na tangente.



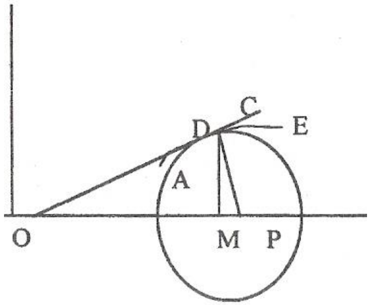
- Geometricamente esta construção é fácil, no caso da hipérbole compondo:
- ( BD + DA ) / DA = BA / EA e então EA = ( BA . DA ) / (BD + DA ) se for dado o D para achar o ponto E.
- No caso da elipse é separando :
- ( BD - DA ) / DA = BA / EA , e então EA = ( BA. DA ) / ( BD - DA ).
- Esta relação de Apolônio recebe o nome de razão harmônica, pois partindo dela chegaremos numa relação harmônica entre BA, BD e BE.
- Para mostrar isto tomemos o caso da hipérbole onde DA = BD - BA e EA = BA - BE
- Então de razão BD / DA = BE / EA podemos escrever:
- ( BD - DA ) / DA = (BE - EA ) / EA e da relação da hipérbole : BA / DA = ( 2BE - BA ) / EA
- Invertendo esta razão DA / BA = EA / ( 2BE - BA ) (#)
- Voltando a razão de Apolônio podemos não subtraindo os denominadores como fizemos anteriormente , mas somando: ( BD + DA ) / DA = ( BE + EA ) / EA e usando novamente as propriedades da hipérbole
- ( 2BD - BA ) / DA = BA / EA.
- Trocando os termos do meio:
- ( 2BD - BA ) / BA = DA / EA ( # # )
- Igualando o ( # ) com ( # # ) teremos:
- ( 2BD - BA ) / BA = BA / ( 2 BE - BA ) e multiplicando os extremos:
- ( 2BD - BA ) ( 2 BE - BA ) = BA2 , e então :
- 4BD BE - 2 BD BA - 2 BA BE + BA2 = BA2, ou
- BA = 2 BD BE / ( BD + BE ) , isto é, BA é média harmônica entre BD e BE.

# DESCARTES
# *O Método* - 1637

- No seu livro *Geometria, livro 2, Descartes trata do problema* da tangente de uma maneira geral. O tratamento cartesiano de tangencia foi de encontrar o círculo que tangencia a curva no ponto, e então ambos, o círculo e a curva terão a mesma tangente neste ponto. Como a tangente ao círculo já era conhecida por Euclides, bastando para isto achar o raio do círculo, o que Descartes chamou de normal à curva no ponto. A tangente fica então determinada pela reta ortogonal a esta normal no ponto de contacto. Para a tangência à curva por um ponto fora dela a construção cartesiana foi pela sub-tangencia. Vejamos os métodos de Descartes para a construção da tangente, que são três.



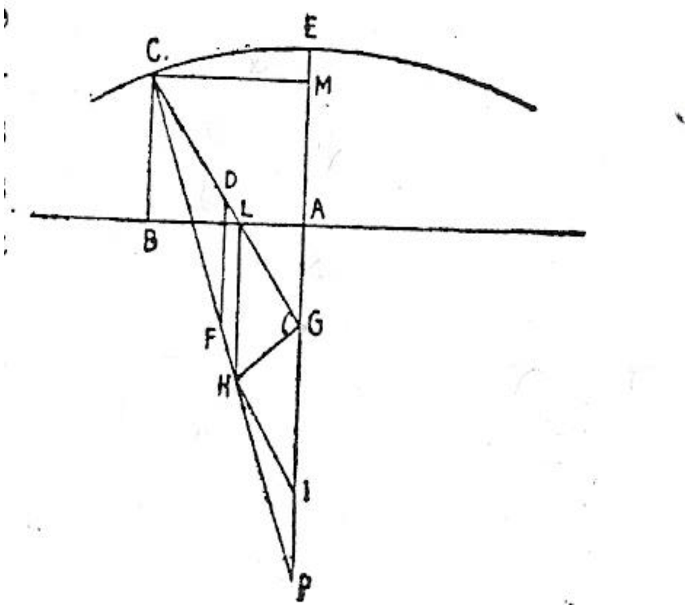
- Suponhamos que queremos construir a normal à curva ACE cuja equação é F ( x , y ) = 0
- no ponto de contacto C definido pelas sua coordenadas AM = x  e CM = y. Se P é um ponto do eixo x de abcissa v = PA , seja PC = s. Então o círculo de centro P e de raio CP terá a equação
- $( x - v )^2 + y^2 = s^2$ , que vai cortar a curva ACE em pontos determinados pelas raízes da equação :
- $$F\{x, [\, s^2 - ( x - v )^2 \,]^{1/2} \}= 0.$$
- Como C é uma das soluções desta equação vamos supor que exista outra , um ponto D .*Quando os dois pontos C e D se aproximarem indefinidamente, o círculo tocará a curva* , como escreveu Descartes, e CP será a normal procurada. Neste caso a abcissas de C e D serão iguais e ainda mais serão raízes da equação acima. Logo a equação terá raiz dupla.Com esta condição determinamos s e v em função das coordenadas do ponto de contacto C.



- Para determinarmos hoje a subnormal pelo processo de Descartes, é um processo bem mais simples. Sendo o comprimento v-x da subnormal, para determiná-lo temos a condição de que a equação F { x , [$s^2$ - ( x - v) $^2$ **] ½ } = 0, que obtemos pela interseção da equação F ( x , y ) = 0 com a equação do círculo $y^2$ + ( x - v ) $^2$ = $s^2$,**

  quando desenvolvida em Taylor, para que tenha raízes duplas é necessário que dF / dx = 0 no ponto. Isto é δF / δx + ( δF / δy ) ( dy / dx ) = 0 no ponto. Como dy /dx = ( v - x ) / y , então a subnormal será: v - x = - y ( Fx / Fy ). Fica assim determinada a subnormal v - x no ponto, ou a abcissa v do centro do círculo.

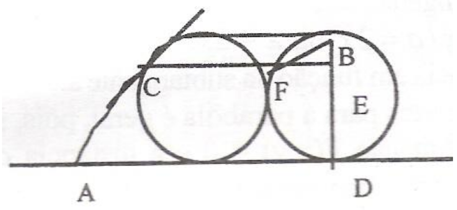
- O caso da Conchóide de Nicomedes, que apareceu nos comentários de Schooten do livro de Descartes, é tratado desta maneira: vamos procura o centro do círculo no eixo das ordenas onde é colocado também o polo G da conchóide, sua base AB o eixo das abcissas:
- AG = b, CL = c , CM = x , CB = y , AP = v e PC = s



- A equação do círculo de raio s e cento ( 0 , - v ) é, $x^2 + ( y + v )^2 = s^2$. Por outro lado pelo teorema de Thales para CM,LA e G podemos escrever que $y / c = b / LG$, logo $LG = bc / y$ .
- Do triângulo retângulo CMG temos: $x^2 + ( y + b )^2 = ( c + bc / y )^2$ , e então a equação cartesiana para a conchóide $x^2 y^2 = ( y + b )^2 ( c^2 - y^2 )$. Fazendo a interseção com o círculo teremos
- $y^3 + [ ( s^2 - v^2 - c^2 + b^2 ) / 2 ( b - v ) ] y^2 - [ bc^2 / ( b - v ) ] y - b^2 c^2 / 2 ( b - v ) = 0$.
- Como queremos que tenha raízes duplas, por exemplo, a , então terá de ser escrito da forma
- $( y - a )^2 ( y + \alpha )$, e igualando os coeficientes
- $b^2 c^2 / 2 ( v - b ) = a^2\alpha$ e $bc^2 / ( v - b ) = a ( a - 2 \alpha$ . Eliminando o $\alpha$ e fazendo $y = a$ temos
- $$v = b + ( bc^2 / y^2 ) + ( b^2 c^2 / y^3 ).$$
-

- Descartes faz uma construção geométrica e chega na mesma expressão, para isto ele constrói os seguintes segmentos : CD igual a CB e DF paralelo a AP e igual a LG; e tomando os segmentos LH e HI paralelos a AP e CG respectivamente, temos da semelhança dos triângulos CDF e HPI :
- CD / HI = DF / IP, ou IP = DF.HI / CD. Como DF = LG = HI = bc / y e CD = y, então IP = $b^2c^2 / y^3$
- Por outro lado como GI = LH e os triângulos CLH e HIP também são semelhantes
- CL / HI = LH / IP , então LH = CL.IP / HI = $bc^2 / y$
- Logo
- AP = AG + GI + IP = $b + bc^2 / y^2 + b^2 c^2 / y^3$
- AP dá à ordenada do centro do círculo normal a curva no ponto C. O segmento CP é o raio e a tangente em C à curva é perpendicular a CP em C.

- A maneira que Descartes descreve como traçar a tangente à ciclóide num ponto dela é a seguinte: por este ponto traça-se uma reta paralela a reta fixa e fazendo o disco gerador rodar até que o ponto dado fique oposto ao de contato, isto é no ponto mais alto da ciclóide, então ligando a interseção da reta traçada com o disco girado e o ponto mais alto temos uma reta paralela à tangente; basta traçar a paralela a ela pelo ponto dado. Uma maneira fácil é ligar o ponto dado ao ponto oposto ao de contato, o ponto mais alto da ciclóide, pela propriedade do círculo esta reta é perpendicular a reta que une o ponto dado com o ponto de contato com a reta fixa.

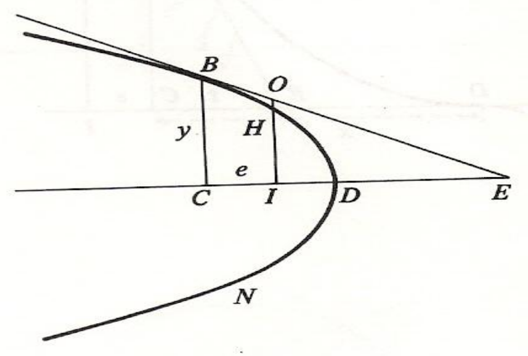


# PIERRE de FERMAT 1601-1665

O processo de Fermat para achar a tangente a uma curva era baseado no de encontrar o máximo e mínimo de uma função.

Alguns historiadores afirmam que ele se baseou na afirmação de Kepler de que a variação de uma função é mínimo perto de um dos pontos de máximo ou mínimo.

- . Um do primeiro exemplo que Fermat descreve é o de uma parábola BDN de vértice D na origem e equação $y^2 = kx$: seja ( x , y ) um ponto B desta parábola e H=( x - e , $y_1$ ) um outro ponto próximo a B. Consideremos que a tangente à parábola passa por B e encontra o diâmetro em E. Agora, tomemos um ponto O sobre a reta OE e tracemos a ordenada OI= $y_1$ e a abscissa ID=x-e. Também tracemos a ordenada BC=y.



Então $kCD = BC^2$ e $kDI = HI^2$ . Por outro lado, como o ponto O é exterior a parábola $HI^2 < OI^2$ e então . Pela semelhança dos triângulos BCE e OIE tem-se , e logo (*).

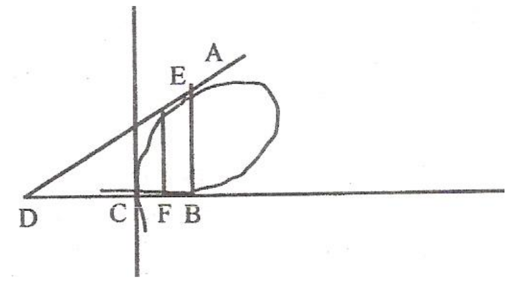
Como $CD = x$, $CE = a$ então $DI = (x – e)$ e $IE=(a-e)$. Substituindo esses valores em (*) obtemos , ou $x( a - e )^2 > a^2 ( x - e )$ o que implica $xa^2 - 2aex + xe^2 > a^2x - a^2e$.

Sejam então os termos aproximadamente iguais, isto é, $xa^2 - 2aex + xe^2 \sim a^2x - a^2e$.

De acordo com o que estabelece o método, removendo os termos comuns temos $- 2aex + xe^2 \sim - a^2e$ ou $xe^2 + a^2e \sim 2axe$, dividindo por e $xe + a^2 \sim 2ax$, desprezando e obtemos $a^2=2ax$, ou ainda $a=2x$ que determina a subtangente.

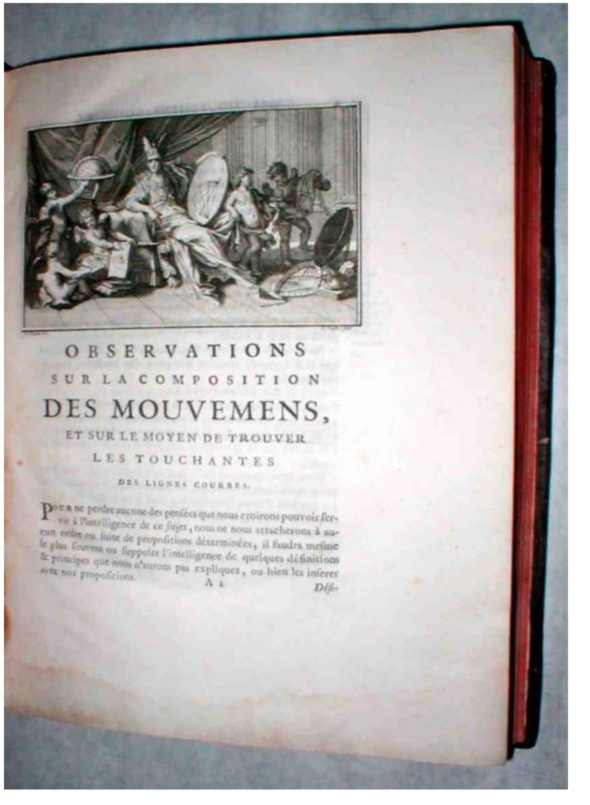
Portanto $CE=a$ é o dobro de $CD=x$, que é o resultado.

- Para as equações não explicita seu método era bem parecido. Assim o processo de Fermat para a construção da tangente ao Folium de Descartes é o seguinte: A curva é dada pela equação x3 + y3 = nxy. Sendo FB = e , DB = a  e EF = y ( a - e ) / a , a equação fica
- ( x - e )3 + y3 ( 1 - e / a )3 = n ( x - e ) y ( 1 - e / a )
- ou  x3 - 3x2e + 3xe2 - e3 + y3 ( 1 - 3 e / a + 3 e2 / a2 - e3 / a3 ) = ny ( x - ex / a - e + e2 / a ).
- Como x3 + y3 = nxy, pois o ponto A pertence ao Folium,  dividindo por e, e fazendo e tender a zero teremos    3x2 - 3y3 / a = - nyx / a - ny, ou
- a = ( 3y3 - nxy ) / ( ny - 3x2 ) = ( nxy - 3y3 ) / ( 3x2 - ny ) que é a sub- tangente.



# GILES PERSONE DE ROBERVAL – 1602-1675

- Com a mesma idéia de Arquimedes, Roberval estudou curvas geradas por composição de movimentos e suas tangentes como sendo a “soma vetorial” das tangentes às curvas que a determinam. Roberval mostrou várias proporções de movimentos retilíneos ou curvilíneos, uniformes ou variados.

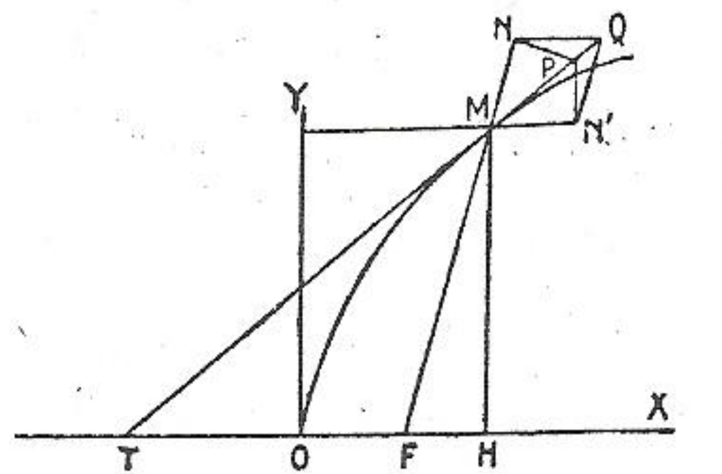


OBSERVATIONS
SUR LA COMPOSITION
DES MOUVEMENS,
ET SUR LE MOYEN DE TROUVER
LES TOUCHANTES
DES LIGNES COURBES.

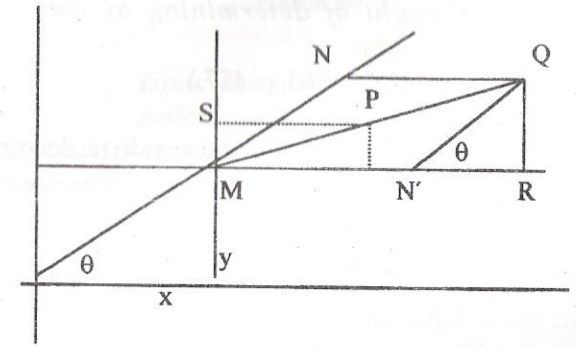
Pour ne perdre aucune des pensées que nous croirons pouvoir servir à l'intelligence de ce sujet, nous ne nous attacherons à aucun ordre ou suite de propositions déterminées, il faudra mesme le plus souvent ou supposer l'intelligence de quelques définitions & principes que nous n'aurons pas expliquez, ou bien les inserer avec nos propositions.

A 2 Défi-

- Por exemplo, sua primeira construção foi para a parábola de foco F na origem, com equação r = x + p, onde r = FM. O ponto M com dois movimentos; um na direção do raio r e outro na paralela ao eixo. Da equação da curva derivando em relação ao tempo temos dr / dt = dx / dt , isto é as duas velocidades são iguais. Então tomando MN = MN’, a diagonal MQ do paralelogramo MN’NQ estará na reta tangente à parábola . Por semelhança dos triângulos TFM e MQN’ temos MF / TP = QN’/ MN’= 1
- logo MF = TP e TF = r. Considerando o segmento TO = r - OF temos TO = x + 2 p - 2 p = x . Por outro lado OH também é igual a x , e então OT = OH como já havia mostrado Apolônio.

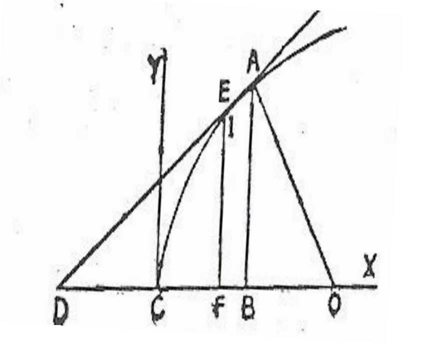


- Roberval uso a equação r = x + p para a parábola, mas x e r não é um sistema de coordenas, pois nem bijetora é com os pontos do plano, um ponto simétrico em relação ao eixo x terá as mesmas coordenadas x e r. Para ele entretanto era só considerado os pontos acima do eixo x. Por outro lado a inclinação da tangente dada pela diagonal do paralelogramo MNQN' coincide com a da tangente se trabalharmos com coordenadas cartesianas . De fato, como em coordenas cartesianas a equação da parábola é , $y^2 = 4px$
- então 2y dy / dx =4 p ,
- ou ( dy / dt ) / ( dx / dt ) = 1/2x. Logo o paralelogramo MRPN' terá seu vértice P sobre a diagonal MQ.



# TORRICELLI 1608-1647

O processo de Torricelli ainda é baseado na decomposição de velocidades, mas difere do processo de Roberval, que podemos ver da maneira que ele encontra a tangente à parábola de vértice na origem C e foco F. Sua equação será $y^2 = 4px$. Supomos sua tangente AD já construída. Pela equação BC = x, BA = y e FI =2p, pois a abcissa de F é p . O ponto A ao ir até I pela secante, animado de dois movimentos retilíneos de direções AB e BC; a reta AI vai cortar o eixo das ordenas num ponto tal que as distâncias D B e DF estariam entre si como AB está par FI. Isto é por semelhança de triângulos DB/ DF =AB / FI = y /2p, e pela equação da curva y /2p = 2x / y, logo DB / DF = 2x / y = DB / AB. Então a razão das velocidades, ou o coeficiente angular da tangente AB / DB = y / 2x está assim determinado.

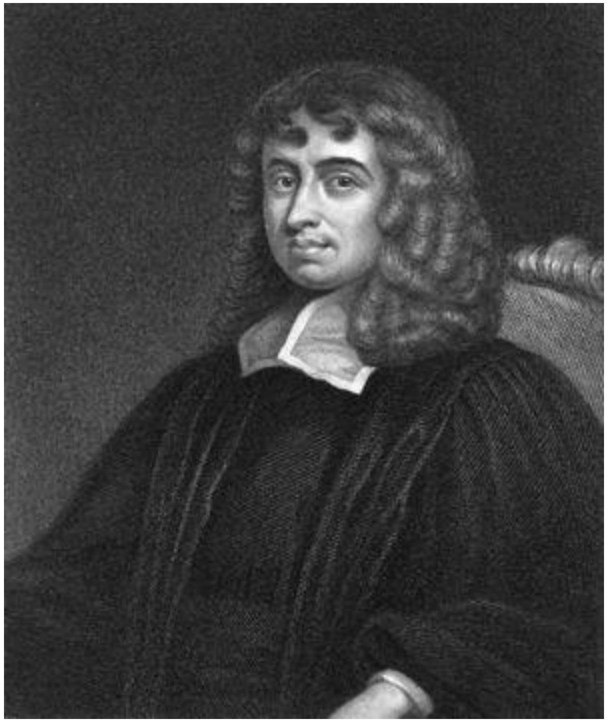


# BARROW 1630 -1677

Foi professor da Universidade de Cambridge, sendo mesmo professor e amigo de Newton. Sua principal obra em inglês foi publicada em 1735 com o título : *Geometrical Lectures`.*

Barrow estudou movimentos que podiam ser descritos por equações do tipo x = x ( t ) e

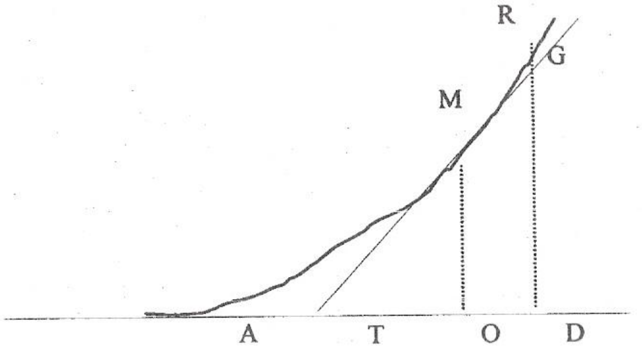
y = t, então a ordenada era considerada como o parâmetro tempo. Seu conceito de tangente era o mesmo dos gregos, a reta que toca sem cortar a curva.



Considerando então a curva AM com a tangente TM, se V( t ) é a velocidade sobre o eixo das abcissas quando um ponto percorre a reta tangente e x'( t ) a velocidade também sobre o eixo das abcissas quando o ponto percorre a curva, como TO < AO então V ( t ) > x'( t ) antes de atingir o ponto de tangência. Para um t maior que o ponto de tangência DG < DR e logo

x'( t ) > V ( t ). Então no ponto de tangência x'( t ) = V ( t ) e por outro lado como TO = V ( t ) t,

TO = x'( t ) t e ainda fazendo t = y temos a expressão da subtangente TO = y dx / dy.



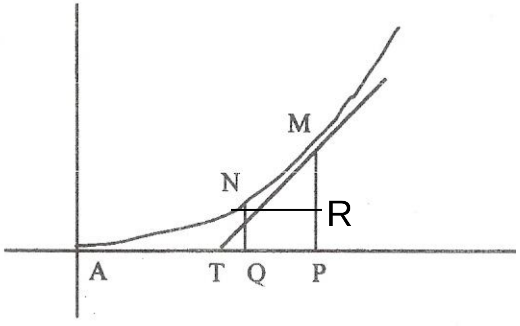
A pedido de um amigo, que alguns historiadores acreditam ser Newton, Barrow dá sua maneira analítica de encontrar a tangente a uma curva dada. Seu método é: se ANM é uma curva e MT sua tangente no ponto M, para determinar a posição desta tangente tomemos um arco MN infinitamente pequeno da curva e tracemos as retas NQ paralela a MP e NR paralela a AP. Fazendo MP = y, PT = t, MR = a e NR = e, relacionando por meio de cálculo MR e NR e observando as regras abaixo , obtemos o valor de t e portanto o ponto T.

Regras:

1 - Rejeitar todos os termos em que entre como fator qualquer potência de a ou e maior que 1, ou do produto destes termos, pois estes termos devem ser iguais a zero.

2 - Desprezar também os termos não afetados de a ou e porque estes termos transportados para um mesmo membro da equação que relaciona a com e, deve ter soma igual a zero.

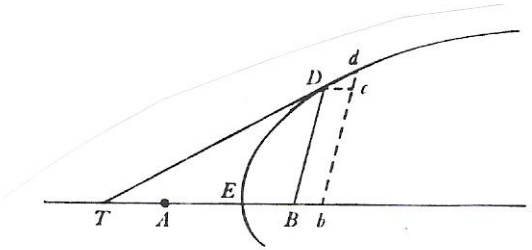
3 - Substituir a por y e por t.



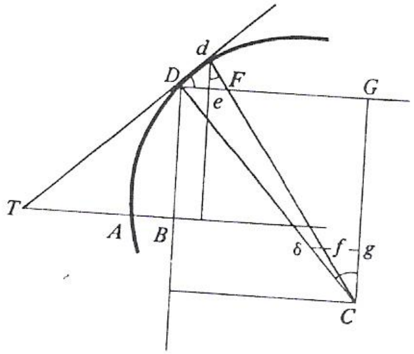
# NEWTON 1642-1727

- No seu Métodos de Séries e Fluxos, publicado em 1669, Newton descreve seu processo para determinar a tangente a uma curva dada por uma equação do tipo f ( x , y ) = 0, dado uma curva ED que tem sua equação descrita em coordenadas AB  e BD, a segunda sendo a ordenada em relação ao eixo AB, esta ordenada fazendo um ângulo fixo qualquer.

- Tomando um outro ponto d sobre a curva, próximo a D, os acréscimos nas coordenas serão cd na ordenada e Bb no eixo AB. A secante Dd vai cortar o eixo AB no ponto T, que no limite quando d tende a D será a reta tangente procurada. Então temos uma semelhança de triângulos dcD e DBT que nos garante a igualdade TB / BD = Dc / cd, onde Dc / cd e a razão dos “fluxos “de AB e BD da curva quando passa do ponto D para o ponto d. Assim temos que TB = BD . Dc / cd , o que determina o ponto T por onde passa a tangente à curva em D. Na notação atual seria TB = y . x’/ y’.

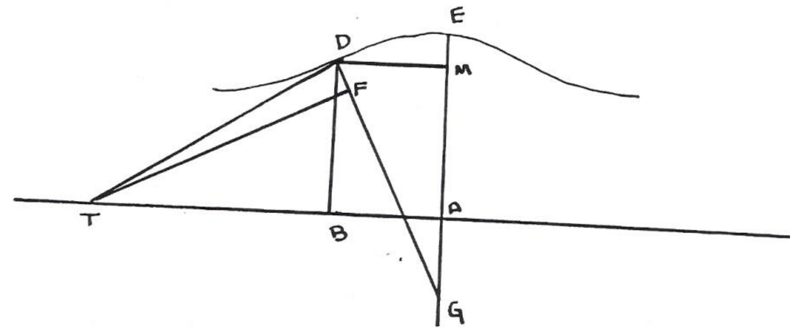


- No exemplo seguinte Newton calcula pelo mesmo processo a tangente à conchóide de Nicomedes , e para isto introduz uma nova coordenada z.
- Ele chamou de primeiro modo este processo quando a curva é dada por coordenadas digamos cartesianas. Seu segundo modo quando as coordenas são a ordenada e a distância à um ponto fixo, ele mostra que pelo mesmo processo pode traçar a tangente

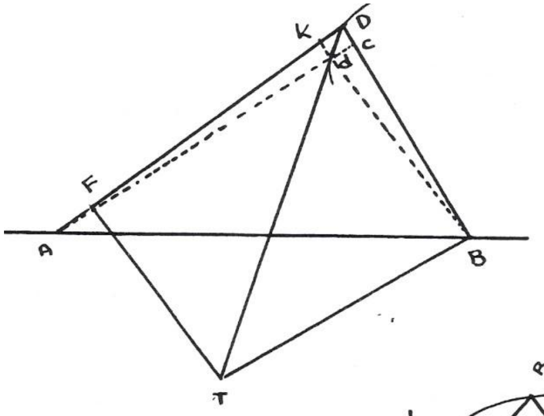


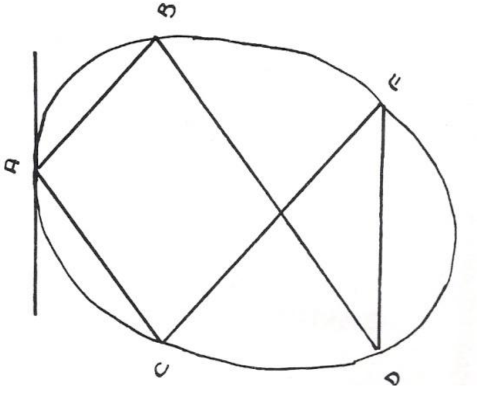
- Sendo D e d dois ponto próximos da curva que está determinada pelas coordenas BD, ordenada em relação ao eixo AB, de ângulo qualquer e DG distância ao ponto G fixo, marcamos o ponto K sobre GD tal que GK = Gd , e completamos o paralelogramo  dbBC. Então DK e DC são os “momentos “de GD e BD, quando o ponto D passa ao ponto d. Da mesma maneiro que o modo primeiro consideramos o segmento Dd que vai interceptar a reta AB no ponto T . Traçando deste ponto uma reta perpendicular a GD, esta vai encontrá-la no ponto F. Os quadriláteros DCdk e DBTF  são semelhantes, logo DB / DF = DC / DK. Desta maneira encontramos o ponto F sobre GD, e sua perpendicular cruzará a reta AB no ponto T, que determina a tangente. Chamando
- y = DB e r = GD teremos que DF = y . r’/ y’, como no caso anterior.
-

- Seu exemplo neste caso é o da conchóide:
- Fazendo GA = b , LD = c , GD = r e BD = y  temos por semelhança de triângulos que
- GD ( y ) / DL ( c ) = GA ( b ) / GL ( r - c ), ou então yr - yc - cb = 0. Isto nos dá que
- y . r’/ y’= r - c = DF, cuja perpendicular em F cortará o eixo AB em T.



- Num artigo, quando estudava as propriedades das cônicas ( Newton, Vol II p. 190 ) , ele nos dá uma maneira interessante de encontra a tangente à uma cônica quando não se conhece o eixo. Se quisermos traçar a tangente a uma cônica por um ponto A , traçamos as secante AB e AC e paralelas a elas BD e CF. Então a reta DF será paralela a tangente pelo ponto A. Isto é verdade pelo teorema de Pascal de que se  um hexágono está  inscrito numa cônica, seus lados opostos devem ser paralelos dois a dois. No nosso exemplo consideramos o hexágono degenerado em A, isto é, de vértices AABFDC.

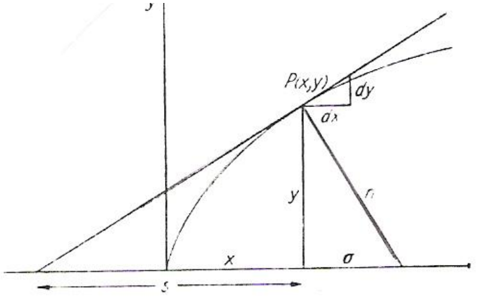


# LEIBNIZ 1646 -1716

- Leibniz introduz o conceito de diferencial e de triângulo diferencial, baseado nos trabalhos de Pascal e Barrow. O triângulo diferencial, ou triângulo reto infinitesimal, de hipotenusa ds que liga dois pontos próximos infinitesimamente na curva, ou dados de um polígono infinito representando a curva, é o de catetos dx e dy ( no inicio Leibniz escrevia x / d ) , tais que se y é a ordenada do ponto de tangência, $\tau$ a tangente e t a subtangente , então ds : dy : dx = $\tau$ : y : t .

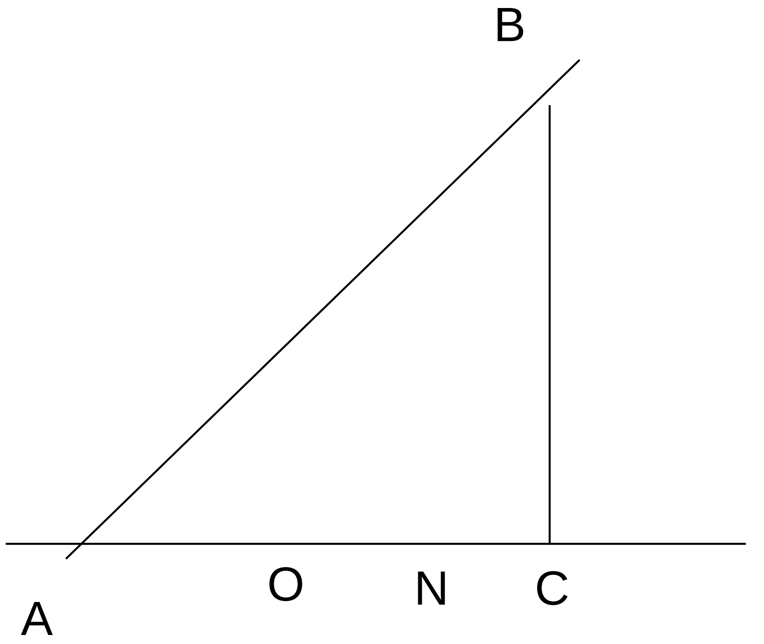
- Na determinação da tangente ( $\tau$ ou t ) , e como y é dado, Leibniz faz uma das diferenciais constante ( que para ele se for dx significa que d d x = 0 ). Assim temos que dy / dx = y / t , ou
- t = y dx / dy, para a subtangente.



- O trabalho importante de Leibniz foi resolver o problema inverso, isto é, dada a tangente encontrar a curva (integração). Nos primeiros exemplos como é o caso da parábola, $y=x^2$, onde a subtangente é $1/2x$, Leibniz resolveu por uma série que aproxima a solução.
- Outros exemplos dados por ele foram no caso da subnormal $\sigma$ valer, por exemplo, seja $\sigma=a^2 / y$, com a constante. Por outro lado, como a subnormal satisfaz a igualdade pela semelhança de triângulos, $\sigma = y\, dy / dx$ , então temos que
- $y\, dy / dx = a^2 / y$, ou $y^2\, dy = a^2\, dx$,
- e como já havia demonstrado anteriormente pelas relações algébricas das diferenciais, temos que $y^3 / 3 = a^2 x$ (Leibniz não considerava a constante pois todas suas curvas passavam pela origem ).
- No exemplo seguinte: consideremos $\sigma = a^2 / x$, onde temos $y^2 / 2 = a^2 \int dx / x$ , “que não pode ser determinado sem a ajuda da curva logarítmica“ como exemplo que ele chamou de “transcendental “.
- “transcendental “.

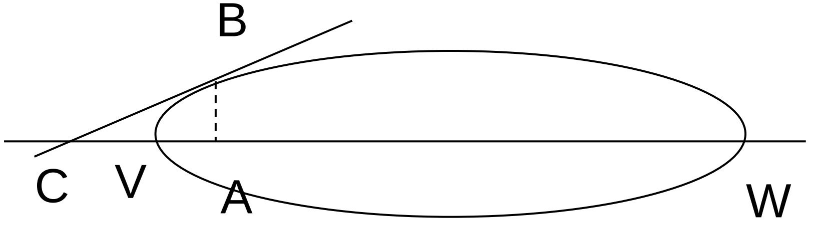
# KEPLER (1571-1630) E O PROBLEMA INVERSO DA TANGENTE DE UMA CÔNICA

- Anibal Scipião de Gomes de Carvalho, na sua tese de doutorado “A Teoria das Tangentes antes da invenção do Cálculo Diferencial”, defendida no Porto e publicada em Coimbra em 1919, escreveu um capítulo sobre o problema inverso da tangente, isto é, dada a reta tangente em um ponto encontrar a curva que tem essa tangente neste ponto. Ele inicia o capítulo escrevendo que Kepler foi o primiero a tratar desse assunto para as cônicas: “O primieiro exemplo que se conhece é devido a Kepler, que procurou determinar a natureza de uma secção cônica de que eram dados o eixo AC, um ponto B e a tangene BC nesse ponto, que corta AC no ponto C.



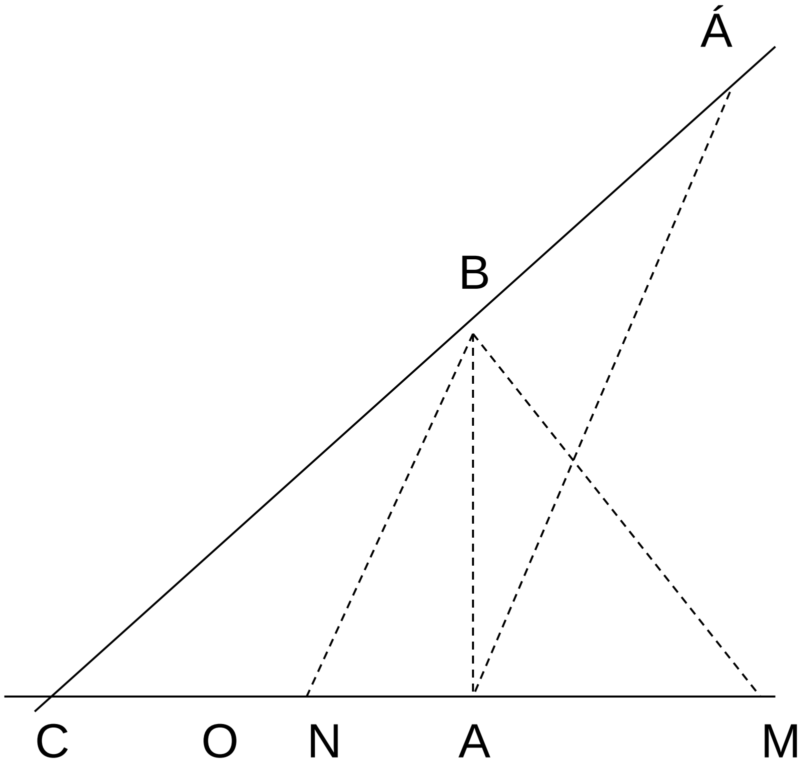
- Baixando de B a perpendicular BA sobre o eixo, tomemos nesta recta o ponto O meio da subtangente AC, e um ponto N, tal que, :
- NA/NC = AB/BC.
- A curva fica determinada desde que conheçamos a posição do seu vértice. Se esse ponto coincidir com o ponto O ou com N, a cônica será respecitivamente uma parábola ou uma circunferência; se estiver entre C e O, ou entre O e A, será uma hipérbole ou uma elípse.
- Kepler, porêm, não chegou a esse resultado tirando da figura relações que o levassem a determinar a natureza da curva, mas fez aquelas afirmações porque anteriormente estudara as secções cônicas, e sabia por isso a situação que o vértice de cada uma delas ocupa na reta AC.”

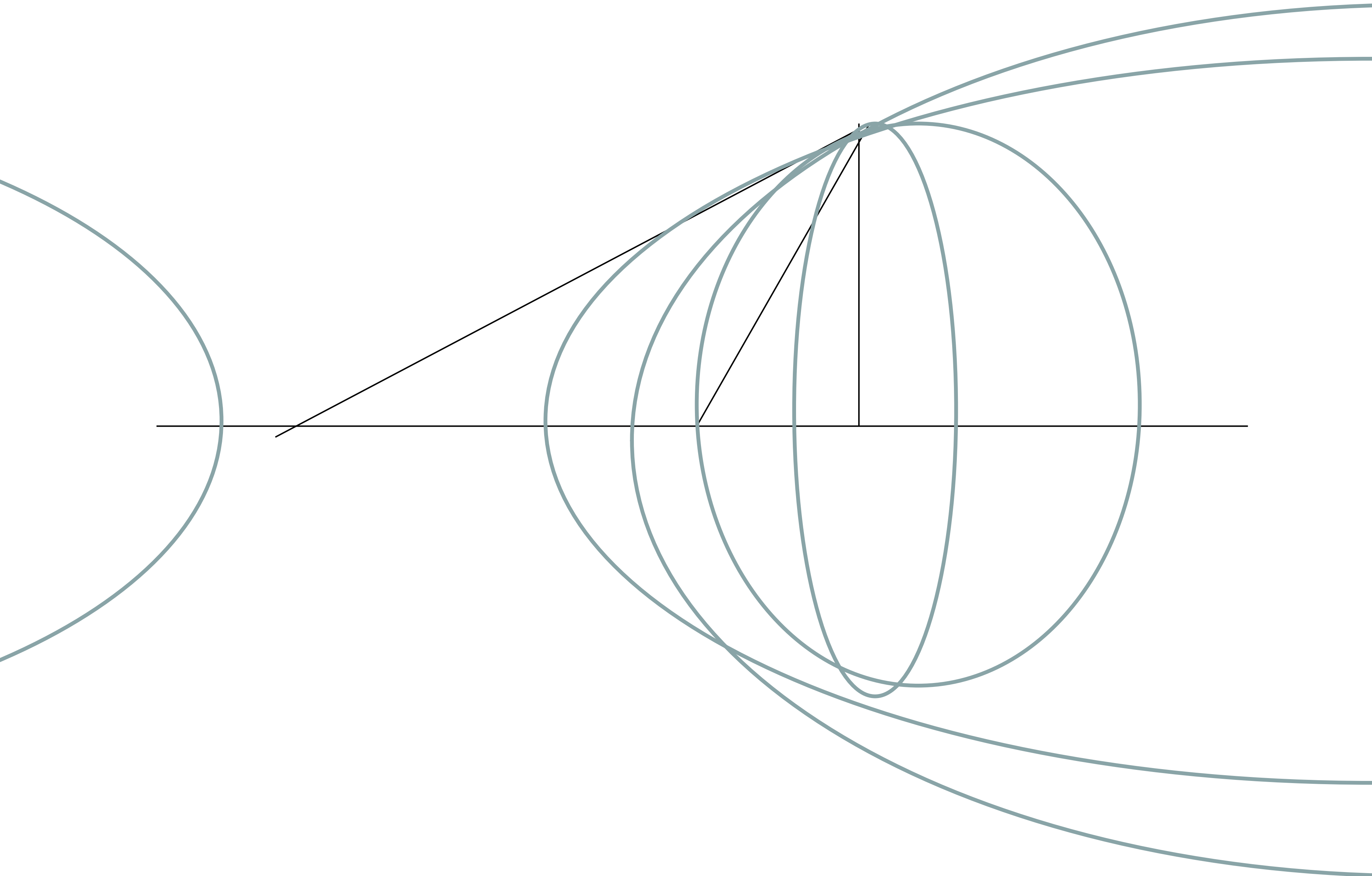
- Possível solução de Kepler
- Os conhecimentos da época de Kepler sobre cônicas vieram provavelmente de Apolônio de Perga (262 – 200 aC.). Um dos resultados mais importante de Apolônio sobre cônica e sua tangente é o “quaternio harmônico”, isto é, dada uma cônica com eixo VW, tangente BC em B, vértices VW; sendo A o ponto onde a reta vertical por B encontra o eixo e C o ponto onde a tangente encontra também o eixo então:
- . $$\frac{AW}{AV} = \frac{CW}{CV}$$



- Voltemos a construção geométrica de Kepler: A primeira coisa a ser mostrada é que o ponto N fica entre os pontos O e A, sendo O o ponto médio entre A e C.
- Em primeiro lugar vamos considerar que AB < BC por construção, pois, se for igual a reta tangente sendo perpendicular ao eixo e o B coincidiria com o vértice, teremos coincidência dos pontos A,B,C,O e N. Então, , e também , isto é, N está entre O e A.
- Vamos ver agora o lugar geométrico dos vértices. Supomos que o vértice V está entre C e O, então VC < VA e pelo Quatérnio Harmônico teremos WC < WA, isto é, se realiza somente na hipérbole.
-

- Se o vértice está em O = V, Apolônio mostrou que nesse caso, em que CV = VA temos a parábola, e isso sai imediatamente do Quatérnio Harmônico, também, pois teremos , que tem duas soluções, W ponto médio entre A e C, e aí o W coincidiria com V, no segundo caso quando  W está no infinito e no limite  teríamos o quociente tendendo a 1(parábola).
- Quando o vértice V estiver entre O e A, então VA < VC, e pelo Quatérnio Harmônico de Apolônio temos que WC > WA, que é o caso da elípse.
- Vejamos agora o caso em que o vértice V está em N. Partindo de uma reta perpendicular a reta tangente em B, ela vai encontrar o eixo no ponto M. Seja Á um ponto sobre a reta tangente, tal que, BÁ = BÁ. Pela construção do ponto N,  , mas como AB = ÁB e AÁ é paralela a BN, então BM = MN. Logo se o vértice V estiver em N será um círculo de centro M e raio MB.





ANIBAL SCIPIÃO GOMES DE CARVALHO

# A TEORIA DAS TANGENTES

ANTES DA

## INVENÇÃO DO CÁLCULO DIFERENCIAL

DISSERTAÇÃO PARA O DOUTORAMENTO
EM SCIÊNCIAS MATEMÁTICAS
NA FACULDADE DE SCIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PÔRTO

COIMBRA
Imprensa da Universidade
1919