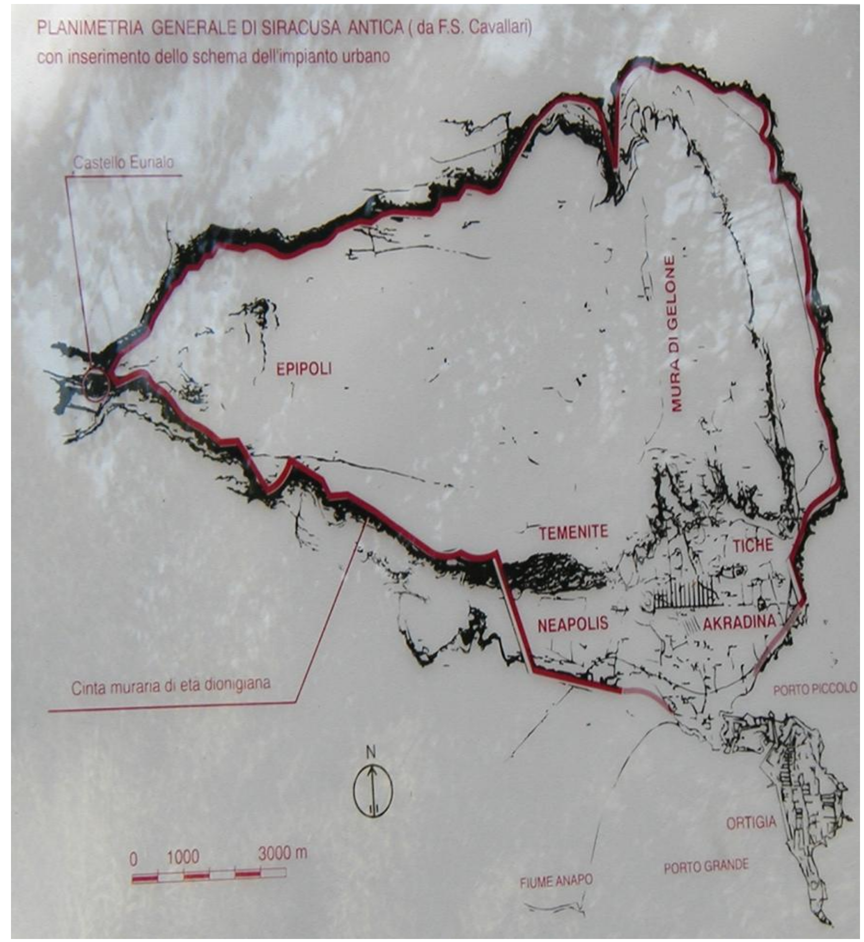
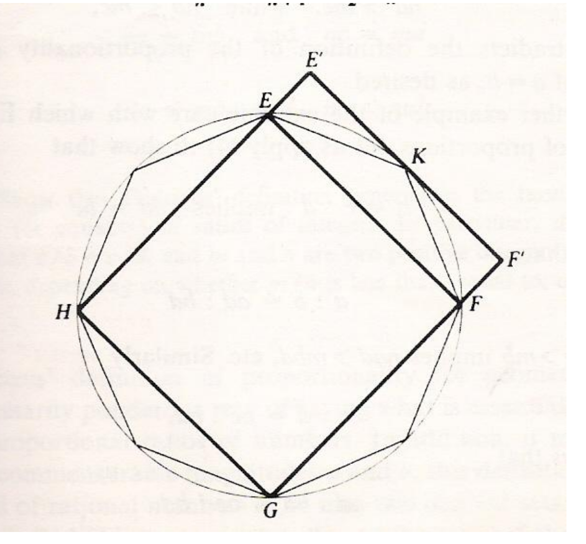
ARQUIMEDES (287-212)

- Arquimedes de Siracusa foi um dos maiores matemáticos da antiguidade, conhecido hoje como o pai do Cálculo Diferencial.



- Nos Elementos encontramos um primeiro exemplo do processo de Exaustão, atribuído a Eudoxo:“ Dado uma círculo C e um número ε >0, existe um polígono regular P inscrito em C, tal que, área de C – área de P < ε “

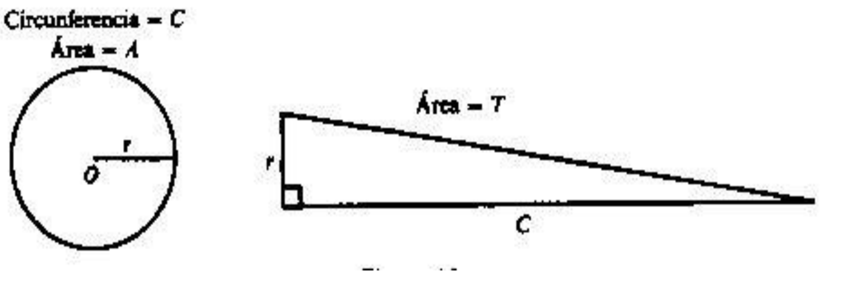


- Primeiro inscrevemos em C um quadrado P_0 = EFGH e seja M_0= área de C – área de P_0. Dobrando o número de lados do quadrado temos o octógono P_1, ainda inscrito em C. Continuando o processo temos uma seqüência de polígonos $P_0,P_1,...,P_n$ com lados 2^{n+2}. Seja M_n=área de C – área de P_n. Temos a seguinte igualdade: $M_n - M_{n+1} > ½ M_n$, pois $M_n - M_{n+1}$=área P_n-área P_{n+1}>1/2(área C – área P_n) = ½ M_n.

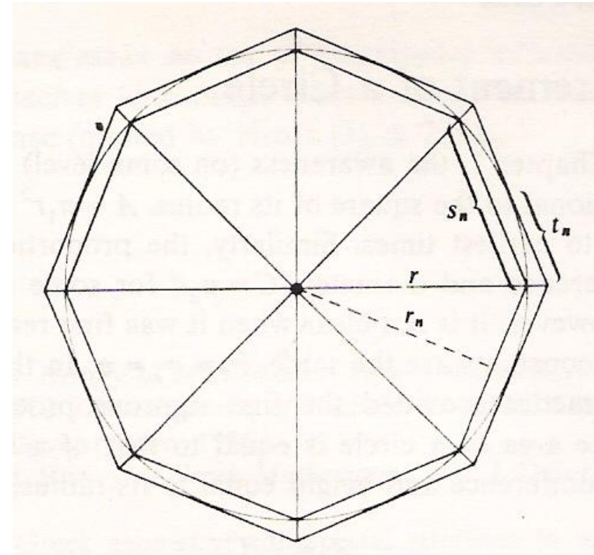
- Voltando a Arquimédes como o grande inspirador do Cálculo, pois foi de seus trabalhos que tivemos matemáticos como Fermat, Leibniz, Newton, Gauss etc. Um dos mais importante trabalho de Arquimedes foi “ O Método”, descoberto muito tempo depois de sua morte (1906) onde ele descreve o processo de descoberta matemática.

ÁREA DO CÍRCULO

- Primeira prova "rigorosa" de que a área do círculo é igual a área de um triângulo cuja base é a medida da circunferência e a altura é a medida do raio.



- Suponhamos que A>1/2rC, seja ε=A-1/2rC, escolhemos um polígono P regular de n lado s_n , inscrito no círculo com área de P > A - ε =1/2rC. Se r_n é o comprimento da perpendicular a um lado , ao centro de P, então r_n<r e n.s_n<C



- Como P é a união de n triângulos isôceles de base s_n e altura r_n, então: área P=n1/2 $r_n s_n$ =
- =1/2 $r_n(ns_n)$< 1/2rC. Supondo agora que A<1/2rC, seja *s*=1/2rC-A, construímos um polígono Q,de área 1/2rC, agora circunscrito à C, isso é Q>C, e provamos que Q > 1/2rC, chegamos mais um absurdo. Então pela prova de redução ao absurdo Arquimedes provou que C = 1/2rC.
- Usando um polígono de 96 lados Arquimedes deu um boa aproximação para o π .
- $$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

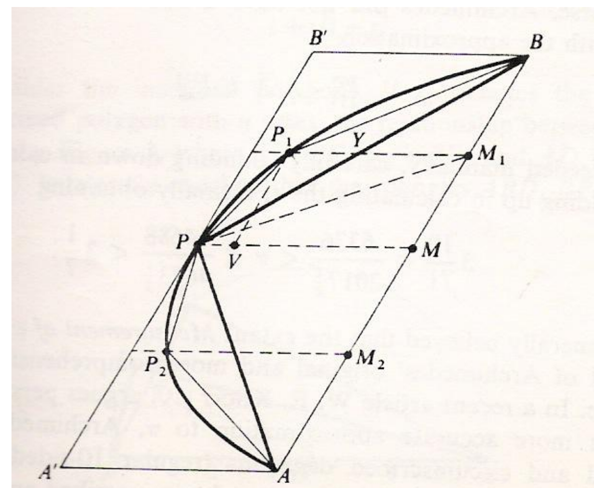
Primeira ocorrência do sinal π

A notação moderna para 3. 14159... foi introduzida em 1706. Nesse ano William Jones (Synopsis Palmariorum Mahtesios. London 1706, p. 263) Ele fez uso dessa notação para designar a razão entre o comprimento da circunferência de um círculo e seu diâmetro. Euler, que usava a letra p para essa razão em 1734, veio a dotara o π, em 1736 no seu livro de Mecânica.

(Cajori, F. – A History of Mathematical Notation – Dover N.Y. 1993, vol II. P.9)

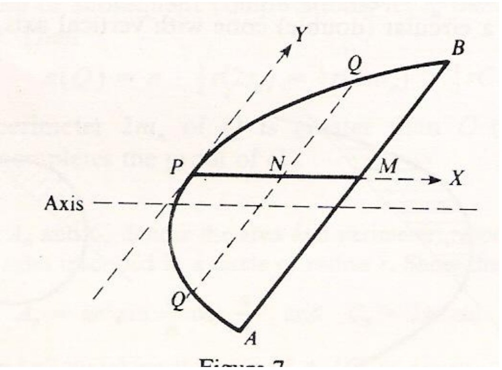
QUADRATURA DA PARÁBOLA

- Seja o segmento de parábola APB, que dividimos em dois pelo ponto P. Sejam P_1 e P_2 os vértices desse segmentos. Construímos os triângulos AP_2P e PP_1B.



- Tomando o paralelogramo AA´B B´que circunscreve a região parabólica, e que tem como base AA`e BB` paralelos a mediatriz PM do paralelogramo, e como a área do triângulo APB é metade da área desse paralelogramo segue que a área desse triângulo e maior que a metade da área da região parabólica APB. Analogamente, dos triângulos inscritos A P_2P e P P_1 B é maior que a metade das áreas dos segmentos parabólicos correspondentes A P_2P e P P_1 B. Começamos assim a aproximarmos do original segmento parabólico por polígonos regulares. O triângulo APB é o primeiro inscrito na região parabólica, A P_2P P_1B uma segunda área poligonal. Continuando o processo de inscrever triângulo cada vez menores teremos sempre que a área da região poligonal será sempre maior que metade da área da parabólica. Logo a área da região poligonal inscrita será sempre menor do que a área da região parabólica. Por Eudoxo dado obtemos, depois de um número finito de passos regiões poligonais cujas áreas serão sempre menor do que a da parabólica.

- Um outro fator necessário para determinar a quadratura de região parabólica é que a soma das áreas dos triângulos A P_2P e P P_1 B é da área do triângulo APB. Seja M_1 ponto médio do segmento MB, Y o ponto de intersecção de P_1M_1 e PB, e V o ponto de intersecção com PM da reta paralela a AB por P_1 . Então, $BM^2 = 4\ M_1M$,
- Agora, Arquimedes usa alguns resultados que já tinha demonstrado anteriormente para uma região parabólica APB:
- 1 – a reta tangente em P é paralela a base AB, onde o ponto P, que ele chama de vértice, é o ponto da linha parabólica de maior distância à base AB.
- 2 – A reta por P paralela ao eixo da parábola vai intercepta a base AB no seu ponto médio M.
- 3 – Toda corda QQ´ paralela à base AB é bissetora pelo diâmetro PM.
- 4 – Então vale: $PN/PM=NQ^2/MB^2$
.



- Usando essa última relação e a igualdade anterior, podemos escrever: PM = 4 PV ou P_1M_1 = 3 PV, mas YM_1 =1/2 PM = 2PV, logo $YM_1 = 2P_1Y$.
- Dessas igualdades segue que área do triângulo PP_1B = 1/2área do triângulo PM_1B = 1/4área do triângulo PMB. Usando duas vezes que a razão entre as áreas de dois triângulos de mesma base é igual a razão entre suas alturas. Analogamente, podemos escrever que área do triângulo AP_2P = 1/4 área do triângulo APM.
- Somando as duas igualdades área do triângulo PP_1B + área do triângulo AP_2P = 1/4área do triângulo APB.
- Subdividindo passo a passo teremos sempre que a somas das áreas dos triângulos menores será sempre área do triângulo APB.
- Denotado por a a área do triângulo APB, temos então que a região poligonal P_n com n lados terá uma área $a(P_n)=a+a/4+...+a/4^n$, para um n suficientemente grande a área da região parabólica defere dessa última de um $\varepsilon > 0$.
- Considerando agora a soma de frações: $1/4^k+1/3.1/4^k=4/3$, então Logo, quando n tende para o infinito 1+1/4+.....+1/4n+....=4/3
- Como a área da região parabólica APB = $\lim_{n\to\infty} a(P_n) = \lim_{n\to\infty} a(1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4^n}+3.\frac{1}{4^n}) =$
- $= a(1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4^n}) = \frac{4}{3}a =$
- = 4/3do triângulo APB

O teorema preferido de Arquimedes

- *Qualquer segmento de esfera tem para o cone de mesma base e altura, a razão que a soma do raio da esfera e da altura do segmento complementar tem com a altura do segmento complementar*

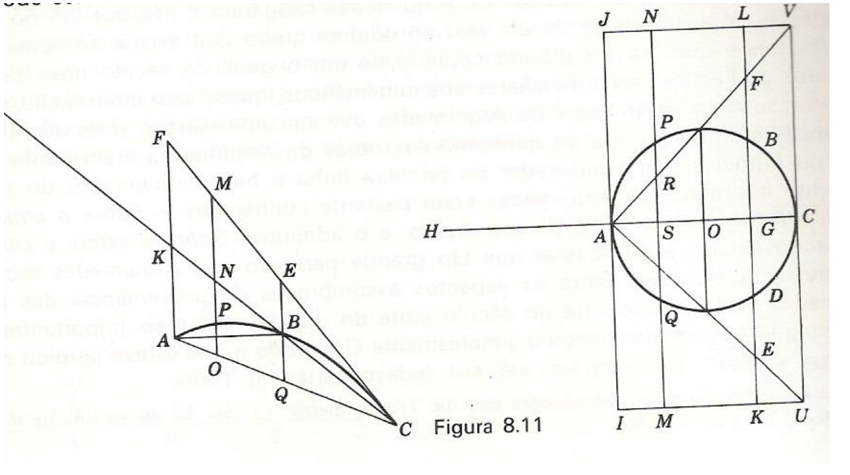
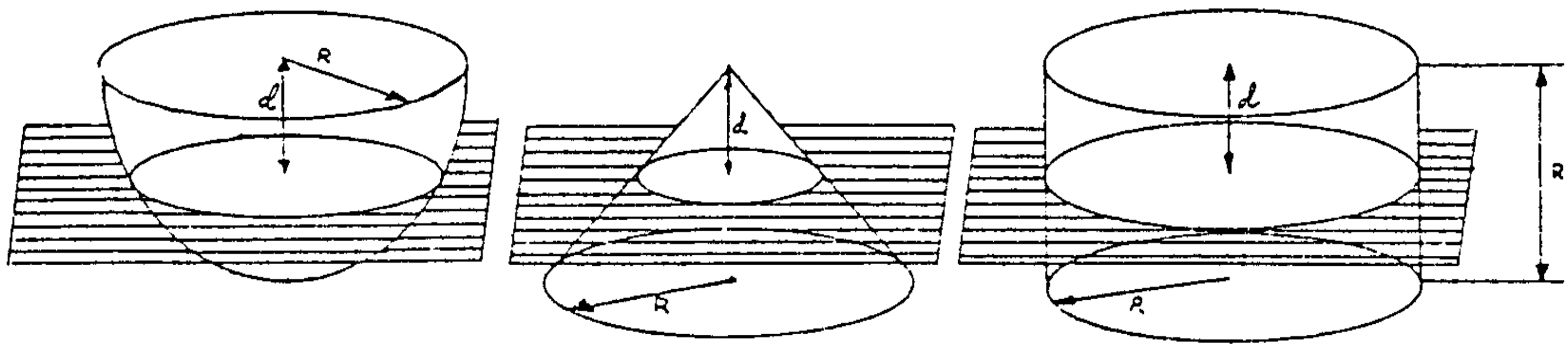


Figura 8.11

- Seja AQDCP uma secção transversal de uma esfera com centro O e diâmetro AC, e seja AUV uma secção plana de um cone circular reto com eixo AC e UV como diâmetro da base. Seja IJUV um cilindro circular reto com eixo AC e com UV = IJ como diâmetro, e seja AH = AC. Se traçarmos um plano por um ponto S qualquer do eixo AC e perpendicular a AC, o plano cortará a esfera, o cone e o cilindro em círculos de raios r1 = SP, r2 = SR e r3 = SN respectivamente. Se chamarmos as áreas desses círculos de A1, A2 e A3, então, Arquimedes descobriu que A1 e A2, quando colocados com seus centros em H, equilibrarão A3, onde está, com A como fulcro. Logo se chamarmos os volumes da esfera, do cone e do cilindro de V1, V2 e V3, vem que V1 + V2 = V3; e como V2 = 1/3 V3 a esfera deve ser 4/3 V3. Como o volume V3 do cilindro já era conhecido, o volume da esfera fica também conhecido.


R
d
d
R
d
R
R