ALGUMAS HISTÓRIAS DO CÁLCULO DIFERENCIAL

Eduardo Sebastiani Ferreira

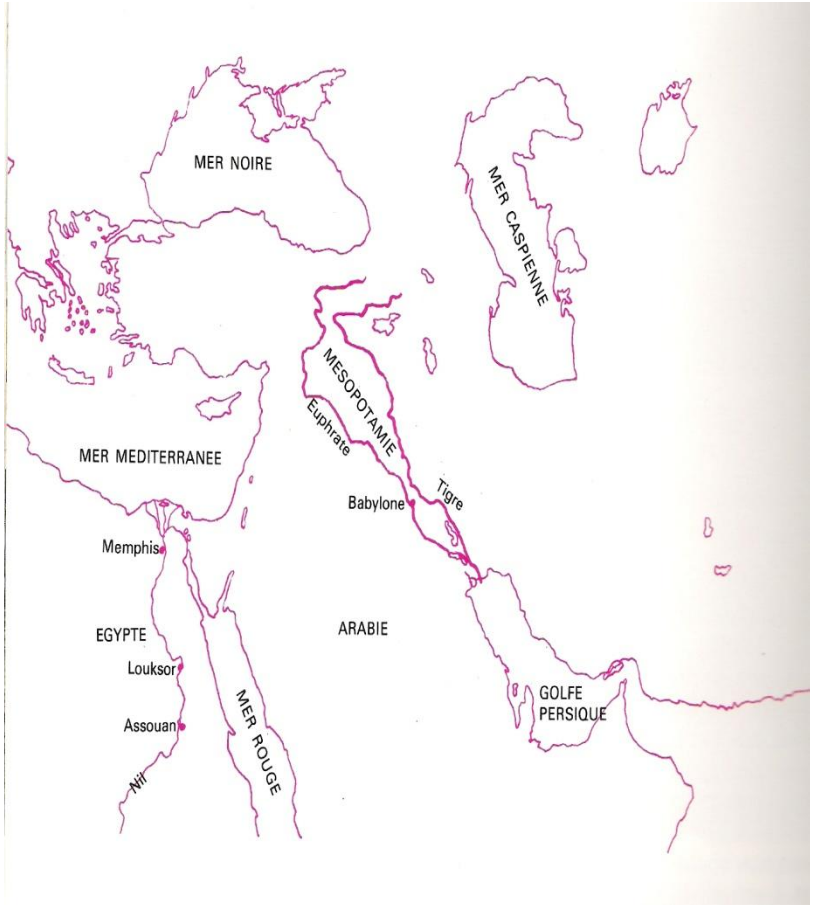
SHEM/LEM/IMECC

esebastiani@uol.com.br

O nascimento da matemática ocidental

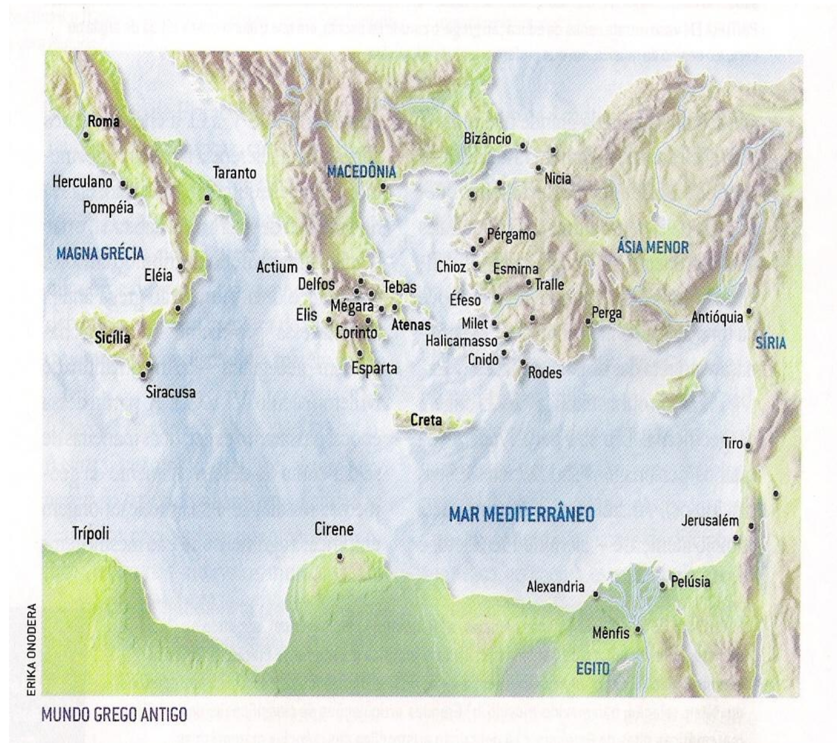
- A matemática ocidental não tem uma data certa para seu aparecimento. Ela veio das necessidades humanas, primeiro na medição de terras e depois pelas construções.
- O que conhecemos hoje, isso pela escrita, seu aparecimento iniciou nos Egito e Mesopotâmia por volta de 3000 antes de Cristo, isso pelos papiros encontrados e tabletes cuneieformes.

- Era uma matemática, digamos 'utilitária', pois era um instrumento para o uso do arquiteto, ou do medidor de terras, que cobrava os impostos. Tinha sua utilidade também na medição de tempo.

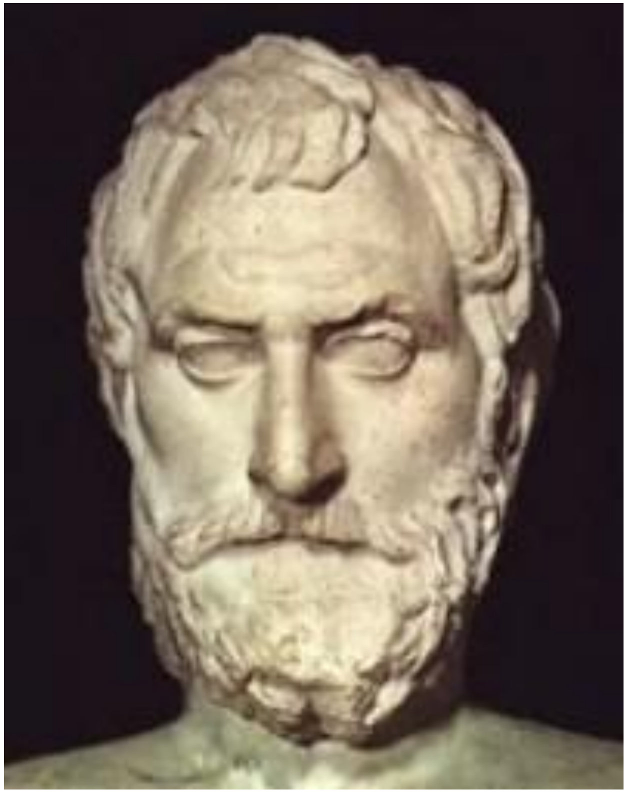


Matemática Ocidental

- Como a conhecemos hoje, uma ciência abstrata, aparece somente na Magna Grécia, isso por volta de 600 aC. O nome primeiro que aparece na história dessa matemática é de Tales de Mileto. Dizem que ele trouxe do Egito grande parte desse conhecimento, mas tem muitos conceitos que os criou



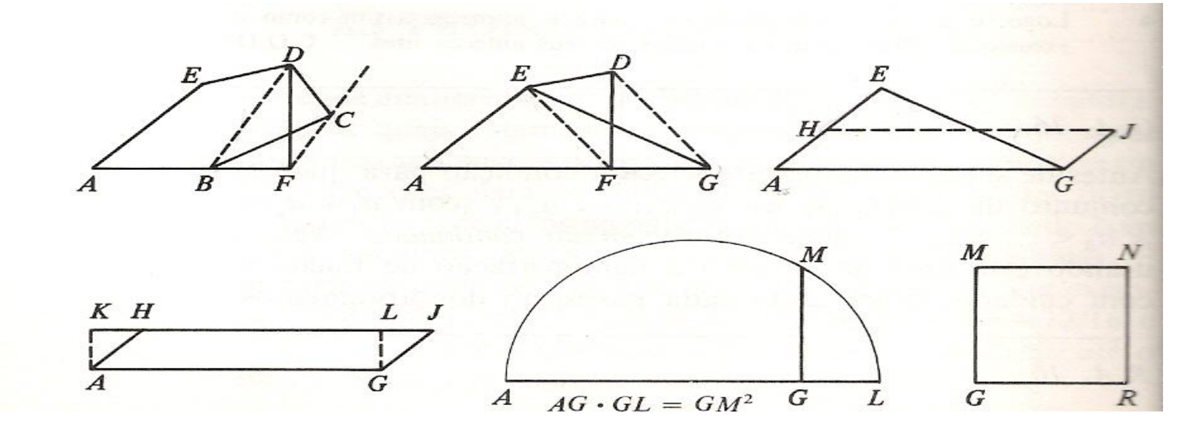
- O nome de Tales aparece na matemática com um teorema importante, que infelizmente não foi criado por ele, mas uma homenagem a esse matemático. Sabe-se hoje que devemos a Tales os somente os quatros seguintes criações matemáticas:
- Um círculo é bissectado por um diâmetro.
- Os ângulos da base de um triângulo isóscele são iguais.
- Os pares de ângulos opostos formados por retas que se cortam são iguais.
- Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado de outro, então os triângulos são congruentes.



Eudoxo de Cnido

- Eudoxo nasceu em Cnido, por volta de 408 e morreu em 355 aC. A escolha de Eudoxo para iniciar essa história é porque foi ele quem criou o conceito de Razão e Proporção. Esses conceitos são até hoje de grande importância na Matemática e foi um dos pilares na história do cálculo.

- Já se conhecia na sua época, que com régua e compasso poderia achar a área de uma figura poligonal, transformando-a em uma área de um quadrado.



- Eudoxo introduziu a noção de proporcionalidades entre magnitudes homogêneas:
- As magnitudes A e B são homogêneas se existem dois números naturais m e n, tais que: $mA>B$ e $nB>A$.
- Para grandezas geométricas a, b e c, d do mesmo tipo Eudoxo definiu que serão proporcionais (a:b::c:d)

a,b é proporcional a c, d: a:b::c:d

- Se for verdade uma das afirmações, com m e n números inteiros positivos quaisquer:
- A) $na>mb$ e $nc>md$.
- B) $na=mb$ e $nc=md$.
- C) $na<mb$ e $nc<md$.

CORTE DE DEDEKIND

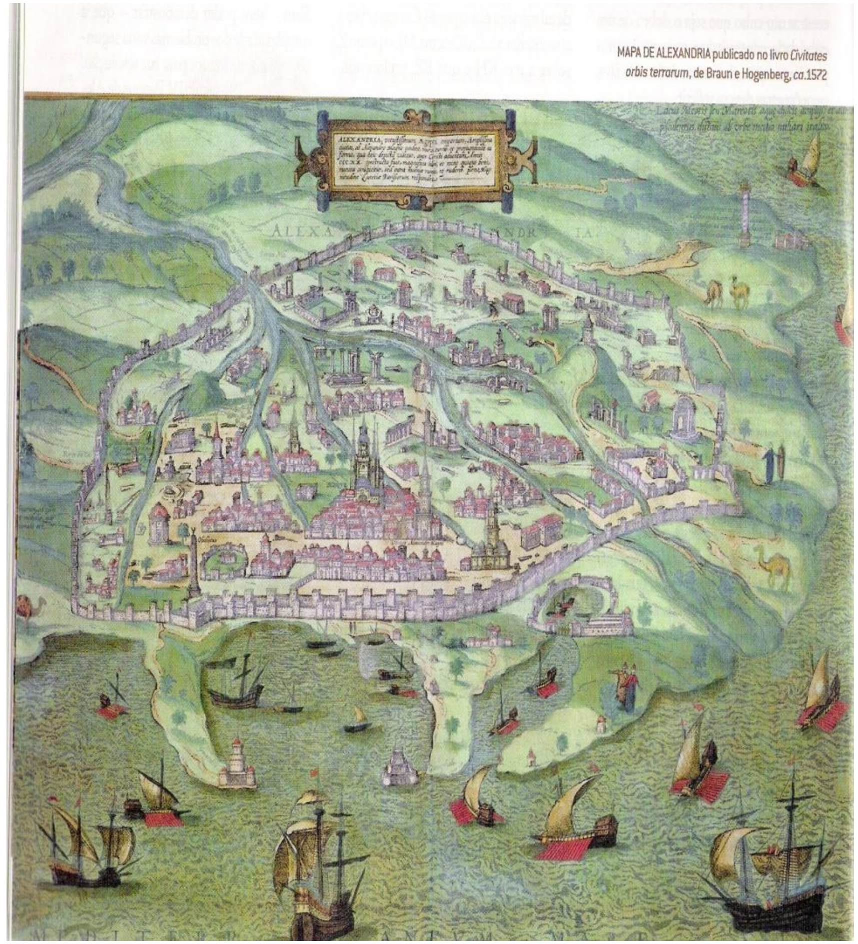
Um dos usos mais importante desse conceito foi dado por Dedekind. Matemático alemão (1831-1916) que deu a definição mais precisa até hoje do sistema dos números reais

- Dado duas grandezas incomensuráveis a e b definem um corte no conjunto dos racionais m/n em dois conjuntos disjuntos, L dos que satisfazem a condição A), isso é, m/n>a/b e o conjunto U dos que satisfazem a condição C) m/n<a/b. Assim os racionais ficam separados em dois conjuntos disjuntos L e U, onde todo elemento de L é menor que todo elemento de U. Esse procedimento Dedekind chamou de corte nos racionais.

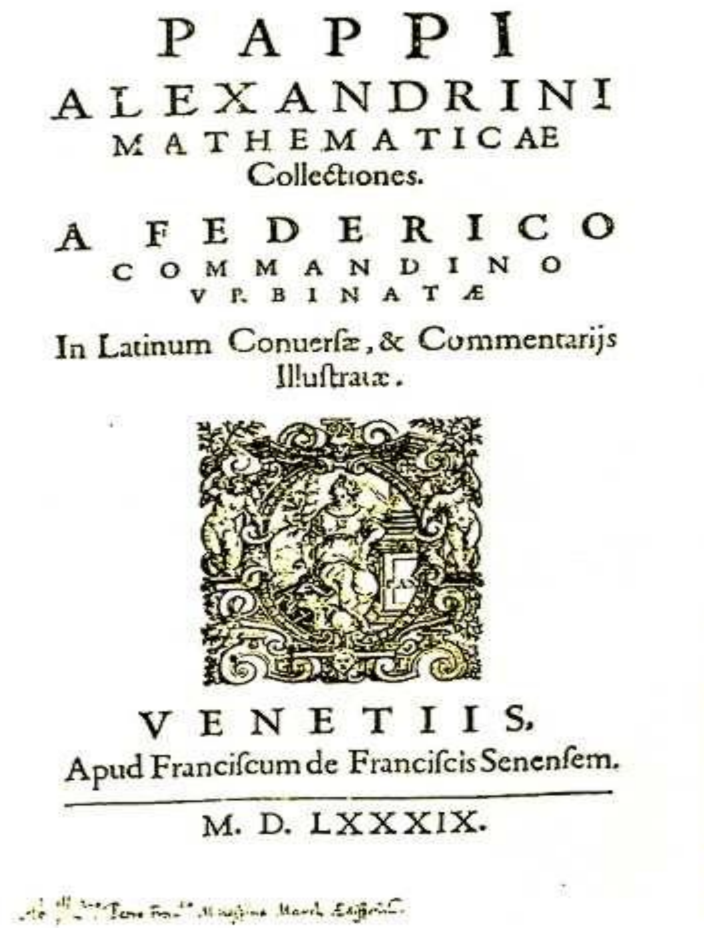
- Por exemplo: a razão entre o comprimento da diagonal de um triângulo retângulo de mesmo cateto 1 e sua diagonal são duas magnitudes incomensuráveis, por exemplo 1 e $\sqrt{2}$
- Então $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- Determina um “corte de Dedekind no conjunto do racionais: o conjunto dos racionais menores e dos maiores que $\frac{1}{\sqrt{2}}$

MÉDIAS

- Ptolomeu que foi rei em Alexandria, em 297 aC, e tornou essa cidade a maior cidade do Mediterrâneo. Escolheu Demétrios, que estudou com os discípulos de Aristóteles no Liceu, para construir em Alexandria um museu, com uma biblioteca que se tornou a maior do mundo conhecido por muitos anos. Além disso, consegui levar para esse museu os maiores cientistas conhecidos na época como: Euclides, Apolônio, Eudemo etc.



- Pappus foi um dos grandes seguidores de Eudoxos e Arquimedes (que falaremos depois). Sua grande obra foi o livro “COLEÇÃO (Synagoge)” de 320. Nesse livro ele deu novas provas e lemas suplementares para as obras de Euclides, Arquimedes, Apolônio e Ptolomeu.



PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
Collectiones.

A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATÆ

In Latinum Conuerſæ, & Commentarijs
Illuſtratæ.

VENETIIS.
Apud Franciſcum de Franciſcis Senenſem.

M. D. LXXXIX.

- No livro III,seção 2 desse livro Papus estuda as três médias mais conhecidas: aritmética, geométrica e harmônica. Sua maior preocupação foi de colocar num mesmo desenho essas médias. Vejamos, primeiramente como ele definiu essas médias:
- Dados dois números a e c, com c < a, definimos um novo número b, com c < b <a, então se b satisfizer a relação:

$$\frac{a-b}{b-c} =$$

=a/a=c/c então, b é média <u>aritmética</u> entre a e c.

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a} = \frac{c}{c}$$

=a/b, então b é média <u>geométrica</u> entre a e c

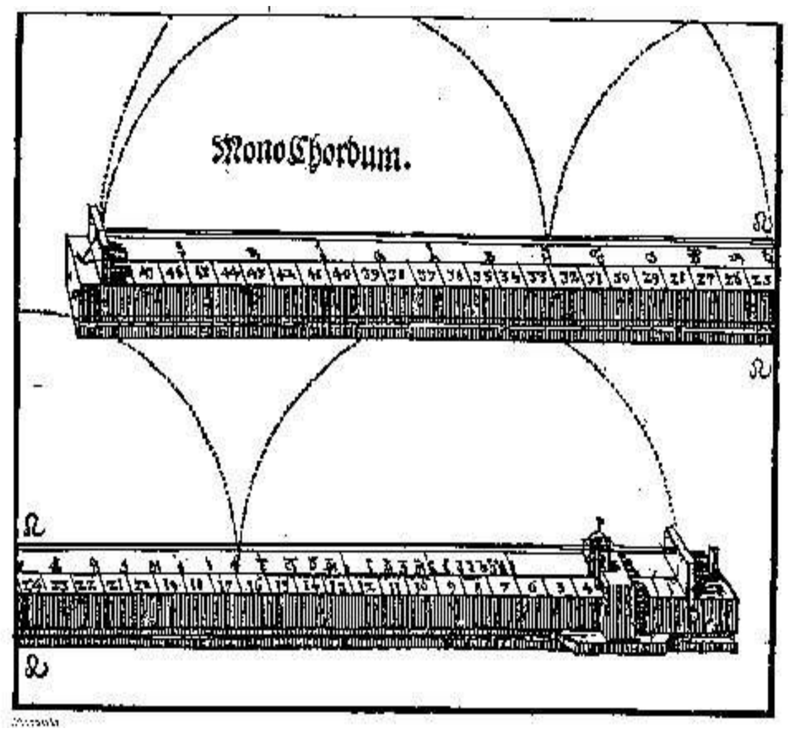
$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b}$$

=a/c, então b é média <u>harmônica</u> entre a e c

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$$

Pitágoras e a música

- Por volta de 500 aC Pitágoras tinha sua escola secreta em Samos. Ele estudou muito bem o monocórdio que tinha 12 divisões e os harmônicos musicais que podia ser produzido nele, assim, utilizando os números 6, 8, 9 e 12 produzia a oitava, a quinta e a quarta: 9 é média aritmética entre 6 e 12, 8 é média harmônica entre 6 e 12 que dão na música a quarta. A quinta é dada pelos 6 e 8 e a oitava e quinta por 6:12 e 8:12 respectivamente. Na geometria Pitágoras chamava o cubo de “corpo harmônico”, por ter 6 faces, 8 vértices e 12 arestas.



PAPUS DE ALEXANDRIA

Em 320 o matemático grego Papus compôs a obra COLEÇÃO (Synagoge) que o fez conhecido até hoje. Ela é composta de oito livros:

O primeiro e metade do segundo está perdido. Pelo que se sabe continha os princípios do sistema de tetradas de Apolônio na numeração grega.

O terceiro tem-se problemas Planos, Sólidos e Lineares. Trata nesse livro do problema das médias.

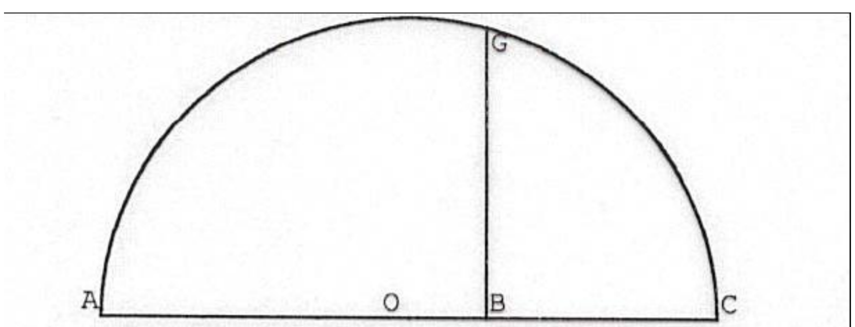
No quarto mostra que não pode confundir problemas de lugares sólidos, com os lugares planos e os de lugares lineares. Afirma, por exemplo, que a trissecção de uma ângulo é um problema sólido.

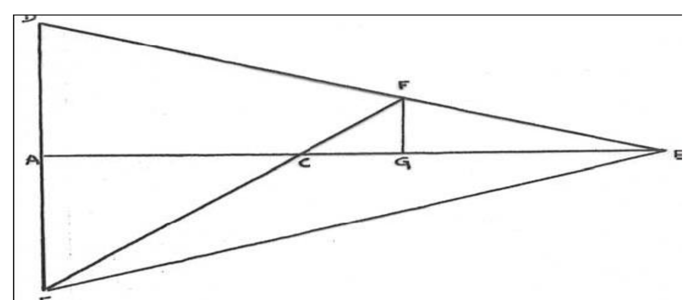
Quanto ao quinto livro são abordados problemas isoperimétricos.

Nos livros VI e VIII são dedicados a aplicações da matemática à astronomia, à ótica e a mecânica.

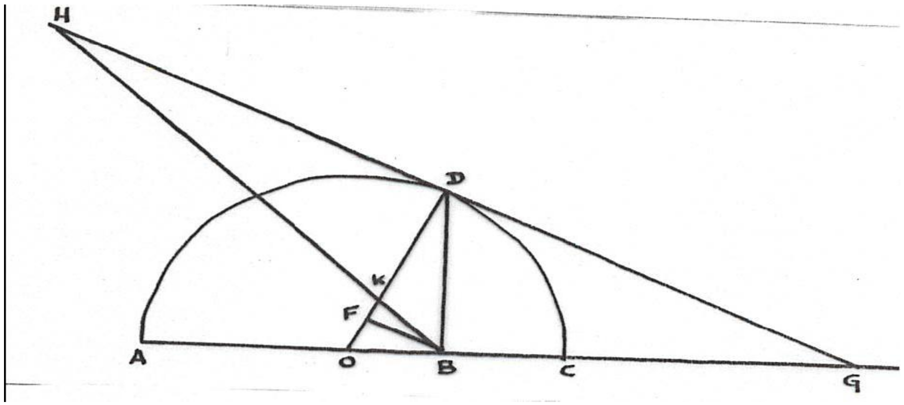
Podemos dizer que o livro VII é o de maior significado matemático. Nele Papus propôs uma generalização para o estudos de curvas planas.

- Papus já conhecia a construção das médias aritmética e geométrica utilizando a semi-circunferência:
- AO=OC é média aritmética entre AB e BC e BG sua média geométrica.
- Para a média harmônica ele usou primeiramente o triângulo ao lado, com AD=AE perpendicular a AB. Ligamos D e E à B. Pelo ponto G traçamos uma perpendicular a AB até o ponto F, e desse ponto o ligamos ao E, essa reta corta AB em C. Então, ele mostrou que BC é média harmônica entre AB e BG.
- AB:BG=DA:FG(semelhança de triângulos)
- = EA:FG (construção)
- = AC:CG(semelhança de triângulos)
- =(AB-BC)(BC-BG)



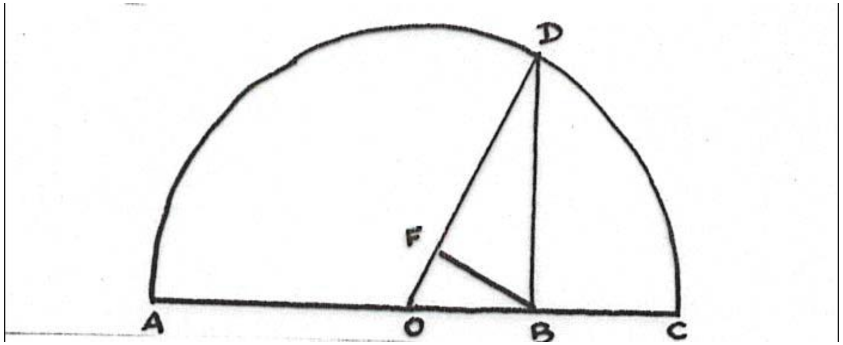


- Papus colocou isso em no desenho que tinha as duas médias anteriores e obteve:



- Então AO média aritmética entre AB e BC.
- BG a geométrica, mas a harmônica era entre OF e OD vai ser OK, e não entre AB e BC.

- Ele escreve no seu livro “um outro geômetra mostrou que DF é média harmônica entre AB e BC.



- Como DO é o raio, então DF.(AB+BC)=2AB.BC, ou AB(DF-BC)=BC(AB-DF), isso é AB.BC= (AB-DF).(DF-BC). Além disso só foi usados 5 segmentos.

As Médias apresentadas por Nicômano de Gerasa

(aproximadamente ano 100)

Nº em icômaco	Nº em Papus	Fórmula	Equivalente
1	1	$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c}$	$a + c = 2b$ aritmética
2	2	$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b}$	$ac = b^2$ geométrica
3	3	$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$	$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$ harmônica
4	4	$\frac{a-b}{b-c} = \frac{c}{a}$	$\frac{a^2 + c^2}{a + c} = b$
5	5	$\frac{a-b}{b-c} = \frac{c}{b}$	$a = b + c - \frac{c^2}{b}$
6	6	$\frac{a-b}{b-c} = \frac{b}{a}$	$c = a + b - \frac{a^2}{b}$
7	(omitiu)	$\frac{a-c}{b-c} = \frac{a}{c}$	$c^2 = ac - ab$
8	9	$\frac{a-c}{a-b} = \frac{a}{c}$	$a^2 + c^2 = (b + c)a$
9	10	$\frac{a-c}{\quad} = \frac{b}{\quad}$	$b^2 + c^2 = (a + b)c$

No livro XII dos Elementos de Euclides encontramos um resultado importante de Hipócratas de Quios

- Dois círculos estão um em relação ao outro como o quadrado de seus diâmetros.
- Se C1 e C2 são dois círculos de diâmetros d1 e d2, então:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{{d_1}^2}{{d_2}^2}$$