MT503 – Programação Linear

Exame de Qualificação – 31/08/2018

Nome: ____ RA: ____________

---

1. Considere um problema de programação linear (PL) na forma padrão. Considere, ainda, uma partição básica factível $A = [B, N]$. Suponha que esta partição básica não corresponda a uma solução ótima para o PL, ou seja, a condição de otimalidade do método simplex não é verificada ($c_N - A_N^t y < 0$). Defina a estratégia simplex para buscar uma nova solução para o PL.

---

2. Considere os seguintes pontos em $\mathbb{R}^2$: $p_1 = (0, 0)$, $p_2 = (0, 1)$, $p_3 = (2, 3)$ e $p_4 = (5, 0)$.

   (a) Ilustre, graficamente, o conjunto de todas as combinações convexas desses pontos.

   (b) Construa um problema de programação linear cuja região de factibilidade seja a região determinada no item (a). Escreva algebricamente essa região factível usando o menor número possível de restrições lineares de igualdade e/ou desigualdade.

   (c) Usando as restrições encontradas no item (b), crie um problema de programação linear de modo que o ponto $(3, 2)$ seja ótimo. Justifique.

   (d) Escreva o dual do problema do item (c).

   (e) A partir dos itens (c) e (d), o que você pode afirmar sobre a solução do problema dual, antes mesmo de resolvê-lo? Justifique.

   (f) Escreva as condições de otimalidade do par de problemas primal-dual.

   (g) Usando os itens (c) e (f), determine a solução ótima do problema dual (sem resolvê-lo). Justifique.

---

3. Mostre que o *gap*, $\gamma^{k+1} = c^t x^{k+1} - b^t y^{k+1}$ da iteração $k + 1$ do método primal dual afim escala com passo um ($\alpha_p^k = \alpha_d^k = 1$) é dado por $\gamma^{k+1} = (dx^k)^t dz^k$.

---

4. Considere o seguinte problema de PL:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & c^t x \\ \text{s. a:} & A_1 x = b_1 \\ & A_2 x \geq b_2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

   (a) Encontre o dual deste problema.

   (b) Determine as condições de otimalidade para os problemas primal e dual.

   (c) Escreva o sistema linear que determina as direções do método primal-dual seguidor de caminhos.

   (d) No sistema linear do item (c), elimine variáveis para determine o sistema de equações normais.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

MT402 – MATRIZES

UNICAMP EXAME DE QUALIFICAÇÃO AGOSTO/2018 IMECC

Justifique todos os argumentos. Respostas sem justificativas **não** serão consideradas.

$\boxed{1}$ Seja $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|z\|_2 = 1$ e considere as matrizes $P = zz^T$, $Q = I - P$ e $R = I - 2P$, onde I é a matriz identidade de ordem n.

(a) Determine os postos de P, Q e R.

(b) Dado $x \in \mathbb{R}^n$, interprete geometricamente as ações Px, Qx e Rx.

$\boxed{2}$ Sejam $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$, com $m > n$, e considere o problema de quadrados mínimos (QM) associado ao sistema linear (SL) $Ax = b$.

(a) Defina o problema (QM) e interprete geometricamente.

(b) Comente sobre a existência e unicidade da solução de (QM).

(c) Exiba as condições sob as quais as soluções de (QM) também são soluções de (SL).

(d) Descreva um método que possa ser utilizado para obter uma solução de (QM).

(e) Explique o que é a solução de (QM) de norma-2 mínima e como pode ser obtida.

$\boxed{3}$ Sejam a e b números reais e considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ b & 0 & a \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Prove que A é unitariamente similar a uma matriz diagonal.

(b) No caso em que A é simétrica e não-singular determine $\kappa_2(A)$.

$\boxed{4}$ Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\sigma > 0$. Prove que σ é um valor singular de A se e somente se a matriz $B = \begin{pmatrix} A & -\sigma I \\ -\sigma I & A^T \end{pmatrix}$ é singular.

Escolha **uma** das questões abaixo.

$\boxed{5}$ Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ e considere a matriz $A = uv^T$.

Determine explicitamente as normas $\|A\|_\infty$, $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ e $\|A\|_F$ em termos de u e v.

$\boxed{6}$ Sejam $v \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e considere a matriz $B = \begin{pmatrix} I + vv^T & 0 \\ 0 & A^T A \end{pmatrix}$, onde I é a matriz identidade de ordem m.

(a) Determine as condições sob as quais a matriz B é definida positiva.

(b) Assuma que B é definida positiva e considere a sua fatoração de Cholesky $B = GG^T$. Para $i = 1, \ldots, m + n$, determine valores $c_i \geq 0$ tais que $|g_{ij}| \leq c_i$, $j = 1, \ldots, i$.

$\boxed{7}$ Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ e o vetor $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) Através do método de Householder obtenha a projeção ortogonal de b sobre $\mathcal{R}(A)$.

(b) Usando os resultados do item (a), obtenha a projeção ortogonal de b sobre $\mathcal{N}(A^T)$.

Exame - Análise Numérica

Aluno: RA:

Questão 1

Seja o seguinte problema de valor de contorno:

PVC: Dado um domínio quadrado unitário $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, encontrar $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y) \quad \text{em} \quad \Omega \tag{1}$$

satisfazendo a condição de contorno $u(x,y) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma = \partial\Omega$.

Apresente o clássico esquema de diferenças finitas de cinco pontos para a resolução deste PVC, analisando com detalhes sua consistência, estabilidade e convergência utilizando a norma 2.

Questão 2

Seja o Problema de Valor Inicial (PVI)

$$u' = f(u), \ 0 < t \leq T, \qquad u(0) = \eta \tag{2}$$

onde $f(u)$ é Lipschitz contínua. Um método linear de r passos para a solução deste PVI pode ser escrito na forma

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j U^{n+j} = \Delta t \sum_{j=0}^{r} \beta_j f(U^{n+j}) \tag{3}$$

com $\alpha_r = 1$.

a) Qual a condição para que o método (3) seja explícito?

b) Mostre que o método (3) será consistente se

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=0}^{r} j\alpha_j = \sum_{j=0}^{r} \beta_j$$

c) Defina estabilidade zero para o método (3).

Questão 3

Apresente os métodos Upwind e de Lax-Friedrichs para a EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

com a respectiva análise de estabilidade de cada método. Qual a ordem de convergência para cada caso?

Bom exame!

Apêndice

- $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$ onde ρ denota o raio espectral.
- $u_{ij}^{p,q} = \sin(p\pi ih)\sin(q\pi jh)$
- $\lambda_{p,q} = \dfrac{2}{h^2}\left[(\cos(p\pi h) - 1) + (\cos(q\pi h) - 1)\right]$

Exame de Qualificação, Biomatemática

1. Considere uma epidemia em que Suscetíveis se tornam Infectados através de diversos tipos de contatos com infectados sendo que, algum tempo após sua Infecção adquirem uma Resistência temporária. Considere, também, que filhos de Infectados e Resistentes nascem Suscetíveis. Introduza um compartimento para Vacinados considerando que essa vacina confere imunidade permanente. Os filhos de Vacinados também nascem Suscetíveis. Esboce um modelo dessa situação justificando suas decisões.

2. Uma população de reprodução sazonal tem sua dinâmica populacional descrita (após uma adimensionalização) por:

   $$\mathbf{x(n+1) = \lambda.x(n).(1 - x(n)^{(1/2)})}.$$

   Comente esta modelo e indique os estados estacionários e caracterize-os quanto à estabilidade.

3. Numa situação de competição a dinâmica populacional de duas espécies é descrita com o modelo dado por:

   $$\mathbf{dP/dt = a.P.[1 - (P + s.Q)} \quad \mathbf{e}$$

   $$\mathbf{dQ/dt = b.Q.[1 - (r.P + Q)}.$$

   Descreva o significado de cada termo e comente os estados estacionários, caracterizando-os.

4. Suponha que, para se obter uma Dinâmica Populacional de determinado inseto, seja necessário considerar suas várias formas (morfologia) e comportamentos (etologia) e que esse inseto aparece numa lavoura em forma de Ovo (O), Larva (L), Pupa (P), Jovens não-reprodutores (J), Machos (M) e Fêmeas(F). Esboce uma modelagem que descreva tal Dinâmica Populacional.

5. Das questões abaixo, escolha uma e responda-a:

   - Explique probabilisticamente a constante 'mu' da equação de Malthusx para mortalidade. (Utilize a definição frequencial de probabilidade, isto é, "número de eventos 'favoráveis'/Número de eventos totais").

   - Justifique, argumentando biologicamente, a utilização do produto de densidades para representar o conceito de interação entre duas populações em um modelo dinâmico.

- Observando o Princípio de Parcimônia de Ockham, apresente três modelos distintos (pelo menos um discreto e pelo menos um diferenciável) para o "Modelo de Verhulst" em dinâmica populacional autônoma caracterizado pelas duas seguintes condições biológicas :
    - 1-Para populações pequenas o crescimento é aproximadamente Malthusiano.
    - 2-Há um efeito de saturação caracterizado por um determinado valor da população (capacidade de suporte) acima da qual a dinâmica é regressiva e abaixo da qual ela é progressiva.

- Exponha um Modelo Malthusiano para dinâmica populacional em que a fertilidade dos indivíduos somente é atingida depois de um "curto" período de maturação e, explique porque, ao contrário do modelo clássico commaturação instantânea, esta dinâmica pode apresentar 0scilações."

- Registre matematicamente os modelos populacionais Holling II e III e explique as motivações biológicas que sugerem a utilização de cada um deles.

6. Mencione um tópico que considerou importante da disciplina MT624 que as questões anteriores não abordaram, justificando essa importância em sua opinião.