ALUNO	RA

QUALIFICAÇÃO – BIOMATEMÁTICA – 23/03/2018

INSTRUÇÕES

NÃO É PERMITIDO DESTACAR AS FOLHAS DA PROVA
É PROIBIDO O USO DE CALCULADORAS
SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

Questão 1. Suponha que a dinâmica de uma população N de peixes é descrita pela seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - P,$$

em que $r > 0$,$K > 0$ e $P > 0$ são parâmetros positivos.

(a) Interprete os parâmetros r, K e P da equação acima.

(b) Descreva o que acontece com a população de peixes quando $P > \frac{rK}{4}$.

(c) Mostre que o modelo admite dois estados estacionários N_1 e N_2, com $N_1 < N_2$, se $0 < P < \frac{rK}{4}$.

(d) Classifique os estados estacionários N_1 e N_2 obtidos no item anterior.

Questão 2. Suponha que haja um inseto que afete negativa e fortemente uma lavoura. Esse inseto aparece na plantação em forma de Ovos (O), Larvas (L), Pupas (P), Adultas Fêmeas (F) e Adultos Machos (M). Modele a dinâmica populacional desse inseto indicando como se poderia identificar o estágio (seja em forma de O, de L, de P, de A ou de M) em que seria mais útil aplicar algum tipo de controle bioquímico.

Questão 3. Considere um lago em que convivem duas espécies que interagem entre si numa relação presa-predador e, ao mesmo tempo, disputam as mesmas fontes de nutrição, o que provoca uma competição intraespecífica. Considere também o lançamento no lago de um poluente que afeta negativamente as duas populações. Modele este subsistema e comente o que puder ser deduzido. Não é necessário considerar o consumo de poluente pelas duas populações. Justifique todas as suas escolhas.

Questão 4. Considere o modelo presa-predador dado pelo sistema

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P\left(1 - \frac{P}{K}\right) - aPN \quad \text{e} \quad \frac{dN}{dt} = \mu N\left(-1 - \frac{N}{\rho P}\right) + bPN. \tag{1}$$

Aqui, o "-1" na segunda equação indica ser N um predador especialista, ou seja, N só se alimenta de indivíduos da presa P, cuja capacidade de suporte é dada por "K". Interprete os termos das equações do sistema, comentando e avaliando criticamente o modelo.

Questão 5. Discorra sobre um tema de *MT624 – Biomatemática I* que as questões anteriores não abordaram. Justifique sua escolha do tema.

Boa Prova!

MT503 – Programação Linear

Exame de Qualificação – 23/03/2018

Nome: ______________________________ RA: ______________

---

1. Considere os seguintes pontos em $\mathbb{R}^2$: $p_1 = (0,0)$, $p_2 = (0,1)$, $p_3 = (2,2)$ e $p_4 = (4,0)$.
   (a) Ilustre, graficamente, o conjunto de todas as combinações convexas desses pontos.
   (b) Imagine que você irá montar um problema de programação linear cuja região de factibilidade seja a região determinada no item (a). Escreva algebricamente essa região factível usando o menor número possível de restrições lineares de igualdade e/ou desigualdade.
   (c) Usando as restrições encontradas no item (b), crie um problema de programação linear de modo que o ponto $(3,1)$ seja ótimo. Justifique.
   (d) Escreva o dual do problema do item (c).
   (e) A partir dos itens (c) e (d), o que você pode afirmar sobre a solução do problema dual, antes mesmo de resolvê-lo? Justifique.
   (f) Escreva as condições de otimalidade do par de problemas primal-dual.
   (g) Usando os itens (c) e (f), determine a solução ótima do problema dual (sem resolvê-lo). Justifique.

---

2. Os quadros inicial e final do método simplex aplicado a um problema de programação linear de minimização são dados a seguir. Determine os valores das incógnitas de a a ℓ e explique como você chegou a esse resultado.

Quadro inicial:

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$B^{-1}b$
1	a	1	-3	0	0	0
0	b	c	d	1	0	6
0	-1	2	e	0	1	1

Quadro ótimo (final):

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$B^{-1}b$
1	0	$-\frac{1}{3}$	j	k	ℓ	-4
0	g	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	f
0	h	i	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	3

---

3. Mostre que se o problema primal tem uma variável livre x_j e esta for substituída por $x_j = x_j^+ - x_j^-$, então seu dual não contém pontos interiores factíveis.

---

4. Mostre que a direção de Newton aplicada às condições de otimalidade levam a um ponto primal e dual factível em uma iteração para o problema canalizado:

$$\begin{aligned} A(x+dx) &= b \\ x+dx+s+ds &= u \\ A^t(y+dy)+z+dz-w-dw &= c. \end{aligned}$$

Mostre também que para $\mu = 0$, $\gamma^{k+1} = (dx)^t dz + (ds)^t dw$.

IMECC/UNICAMP, MT403 - Análise Numérica I
Exame de Qualificação 23/03/2018

Aluno: **RA:**

Questão 1 (2,5 Pontos)

Sejam o PVC

$$u''(x) = f(x) \quad \text{em} \quad (0,1); \quad u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta \tag{1}$$

e uma discretização do domínio em uma malha uniforme com $m+2$ pontos, com $h = 1/(m+1)$ e $x_j = jh$. Aproximando esta equação em um ponto x_j com base na fórmula centrada para a derivada segunda, temos o conjunto de equações algébricas

$$\frac{1}{h^2}\left(U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}\right) = f(x_j) \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \ldots, m \tag{2}$$

com os valores $U_0 = \alpha$ e $U_{m+1} = \beta$ prescritos.

a) Este método de diferenças finitas pode ser escrito como um sistema linear

$$AU = F. \tag{3}$$

com a matriz dos coeficientes $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, o termo independente $F \in \mathbb{R}^m$ e o vetor de incógnitas $U \in \mathbb{R}^m$. Apresente a matriz A e o vetor F, discutindo a existência e a unicidade de solução do sistema (3).

b) Defina o que é *erro de truncamento local* τ_j, e mostre que o vetor erro de truncamento $\tau \in \mathbb{R}^m$ é dado por

$$\tau = A\hat{U} - F. \tag{4}$$

onde $\hat{U} \in \mathbb{R}^m$ é o vetor com os valores exatos, $\hat{U}_j = u(x_j)$. Quais são os valores τ_0 e τ_{m+1}?

c) Defina *erro global* e apresente sua relação com o vetor erro de truncamento $\tau \in \mathbb{R}^m$.

d) Defina *consistência*. O método (3) é consistente? Justifique.

e) Defina *estabilidade* para o método (3).

f) Defina *convergência*. Mostre que se um método é estável e consistente, então ele é convergente.

Questão 2 (2,5 Pontos)

Seja Problema de Valor Inicial (PVI)

$$u' = f(u) + g(t),\ 0 < t \leq T, \qquad u(0) = \eta \tag{5}$$

onde $f(u)$ é Lipschitz contínua. Um método geral de um passo para o PVI (5) pode ser escrito como

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t \varphi(U^n, t_n, \Delta t; f)$$

onde φ é uma função de U^n, t_n e Δt escolhida de forma a obter uma aproximação para $f(u)$, em geral de alta ordem.

a) Mostre quem é φ para método de Taylor de segunda ordem.

b) Encontre as condições sobre as constantes a_1, a_2, b_1 e b_2 para que a função φ dada por

$$\varphi(U^n, t_n, \Delta t; f) = a_1 f(U^n + b_1 \Delta t f(U^n)) + a_2 f(U^n + b_2 \Delta t f(U^n))$$

conduza a uma aproximação de segunda ordem. Determine um exemplo a partir da escolha destas constantes.

Questão 3 (2,5 Pontos)

Seja o seguinte problema de valor inicial e de contorno: Dados $a > 0$ e $\kappa > 0$, encontrar $u : (0,1) \times (0,T) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{em} \quad (0,1) \times (0,T) \tag{6}$$

satisfazendo as condições de contorno e iniciais apropriadas.

a) Utilizando uma discretização do domínio $(0,1)$ em uma malha uniforme com $m+2$ pontos, com $h = 1/(m+1)$ e $x_j = jh$ e uma aproximação centrada de segunda ordem para a derivada segunda, apresente o Método das Linhas (MOL) para o problema acima (sistema de EDOs contínuo no tempo).

b) Utilizando o fato de que a matriz A obtida pelo MOL da letra a) é constante e diagonalizável ($A = R\Lambda R^{-1}$), mostre que resolver o MOL, equivale a resolver m equações escalares independentes na forma

$$w_p'(t) = \lambda_p w_p(t), \quad p = 1, 2, \ldots, m.$$

c) Defina *Região de Estabilidade Absoluta* de um método linear de passos múltiplos e utilize o resultado da letra b) para definir um critério de estabilidade para a aproximação do MOL da letra a)

Questão 4 (2,5 Pontos)

É sabido que a aproximação de Euler explícito no tempo combinada com a diferença centrada de segunda ordem para a derivada no espaço conduz a aproximações instáveis para a EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{7}$$

Uma forma de estabilizar este esquema é utilizá-lo para aproximar a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

com o uso da fórmula centrada de segunda ordem para a derivada segunda e com a escolha adequada de ε. Neste sentido, encontre o valor de ε a partir do qual o esquema se torna estável para a resolução da equação (7) e discuta possíveis limites superiores para seu uso. Discuta também possíveis relações de estabilidade entre $a, \Delta t$ e Δx.

Bom exame!

Exame de Qualificação – DMA/UNICAMP

MT401 - Análise Aplicada
21 de março de 2018

Instruções, leia com atenção:

- *O exame tem 6 questões, mas serão consideradas apenas suas 5 melhores soluções.*
- *Inicie a solução de cada questão em uma página nova, identificando claramente que questão está sendo resolvida. Procure ser claro na escrita. Não é necessário repetir o enunciado.*
- *Certifique-se de ter se identificado em todas as folhas que usar.*
- **Não entregue** *seus rascunhos.*
- *Não é necessário devolver esta folha de questões.*
- *O resultado final será divulgado na secretaria de Pós-Graduação.*

Boa prova!

J. Pitelli & A. Saa

1.^{a} Questão. Considere as afirmações abaixo, que dizem respeito a mapas contínuos entre espaços métricos, $F : X \to Y$. Prove as que forem verdadeiras e dê um contra-exemplo às que forem falsas.

a) A imagem $F(A)$ de todo conjunto fechado $A \subset X$ é fechado em Y.

b) A imagem $F(A)$ de todo conjunto compacto $A \subset X$ é compacto em Y.

c) Para F sobrejetora, a imagem $F(A)$ de todo conjunto denso $A \subset X$ será densa em Y.

2.^{a} Questão.

a) Seja $\mathbb{R}$ a reta real com a topologia usual e M a reta real com a topologia discreta. Seja $i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ a aplicação identidade $i(x) = x$ e $j : \mathbb{R} \longrightarrow M$ sua inversa. Mostre que i é uma função contínua. A função j é contínua?

b) Seja $M = [-1, 0] \cup (1, \infty)$ e $N = [0, \infty)$ com a topologia usual da reta e $f : M \longrightarrow N$ definida por $f(x) = x^2$ para todo $x \in M$. Mostre que f é contínua em M. Sua inversa é contínua?

c) Com base nos dois itens anteriores, prove ou dê um contra-exemplo da seguinte afirmação: Seja $f : A \longrightarrow B$ contínua e bijetiva. Então $f^{-1} : B \longrightarrow A$ é também contínua.

3.^{a} Questão. Seja $c = \{x = (\xi_j) \in l^\infty : \lim\limits_{j\to\infty} \xi_j$ existe (e é finito)$\}$. Dizemos que $x \in l^\infty$ estabiliza se existir N tal que $\forall\, j \geq N$ tem-se

$$\xi_j = \xi_N.$$

Seja $M = \{x \in l^\infty : x \text{ estabiliza}\}$. Mostre que c é o fecho de M.

4.^{a} Questão. Considere o espaço de todas as funções reais limitadas. É possível definirmos duas normas neste espaço gerando duas topologias diferentes? Se sim, defina-as e justifique. Se não, justifique.

5.^{a} Questão. Seja X espaço de Banach e $A \in L(X,X)$ um opeador linear contínuo:

a) Mostre que $A^k \in L(X,X)$ e $\|A^k\|_{L(X,X)} \leq \|A\|^k_{L(X,X)}$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.

b) Através do Teomema do Ponto Fixo de Banach, mostre que se $\|A\|_{L(X,X)} < 1$, então $(I - A)$ é invertível e

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \cdots$$

c) Suponha $X = \mathbb{R}^n$ e seja B uma aproximação para a inversa da matriz A, isto é,

$$\|I - AB\| < 1.$$

Mostre que a solução do sistema $Ax = b$ é dada por

$$x = Bb + B(I-AB)b + B(I-AB)^2 b + \cdots$$

6.^{a} Questão. Seja T um operador linear, limitado e auto-adjunto em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ **complexo**. Demonstre que, para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

$$|\langle x, (T-\lambda)x\rangle| \geq |\mathrm{Im}(\lambda)|||x||^2,$$

para todo $x \in \mathcal{H}$.

Exame de Qualificação - Matrizes - MT 402

19 de março de 2018

1. Dada a matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, com $m > n$ e posto$(A) = n$, determine as expressões das seguintes matrizes: (a) $P_{\mathcal{R}}$ matriz de projeção no espaço linha de A, denotado por $\mathrm{Im}(A^T)$; (b) $P_{\mathcal{N}}$ matriz de projeção no núcleo de A, denotado por $\mathrm{Nu}(A)$.

---

2. Apresente diferentes problemas computacionais que você resolveria usando fatoração QR, LU e Cholesky. Justifique cuidadosamente a razão por escolher cada uma dessas fatorações específicas. Nessa questão desejamos avaliar o seu domínio do assunto e a clareza de sua argumentação.

---

3. Supondo conhecida a fatoração ortogonal $A = QR$, em que $A, Q, R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, Q é ortogonal e R é triangular superior, e assumindo que A é não singular, estabeleça as seguintes relações entre os respectivos números de condição das matrizes A e R:

   (a) $\kappa_2(A) = \kappa_2(R)$;

   (b) $\frac{1}{n}\kappa_1(A) \leq \kappa_1(R) \leq n\kappa_1(A)$.

---

4. Descreva a relação entre o problema de quadrados mínimos lineares e a projeção ortogonal. Como isso pode influenciar em possíveis estratégias de solução do problema de quadrados mínimos? Essa é mais uma questão em que desejamos avaliar seu domínio do tema e a clareza de sua argumentação.

---

5. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ uma matriz não nula. Considere a matriz $C = \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}_{(m+n)\times(m+n)}$ e suponha que $\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}$, com $v \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^m$, é autovetor de C com autovalor associado σ.

   (a) Mostre que $Av = \sigma u$ e $A^T u = \sigma v$.

   (b) Mostre que $\begin{bmatrix} v \\ -u \end{bmatrix}$ é autovetor de C associado ao autovalor $-\sigma$. Portanto, os autovalores de C aparecem aos pares, com variação no sinal.

   (c) Pela simetria de C, estes dois autovetores devem ser ortogonais entre si. Conclua então que $\|v\|_2 = \|u\|_2$.

   (d) Sem perda de generalidade assuma que $\sigma > 0$, $\|v\|_2 = 1$ e $\|u\|_2 = 1$. Deduza que v e u são vetores singulares de A, à direita e à esquerda, respectivamente, associados ao valor singular σ.

   (e) Reciprocamente, mostre que se v e u são vetores singulares de A, à direita e à esquerda, respectivamente, associados ao valor singular σ, então $\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} v \\ -u \end{bmatrix}$ são autovetores de C associados aos autovalores $\pm\sigma$. Conclua que os valores singulares de A são exatamente os autovalores positivos de C.