Exame de Qualificação – DMA/UNICAMP

MT401 - Análise Aplicada
20 de março de 2017

Instruções, leia com atenção:

- *O exame tem 6 questões, mas serão consideradas apenas suas 5 melhores soluções.*
- *Inicie a solução de cada questão em uma página nova, identificando claramente que questão está sendo resolvida. Procure ser claro na escrita. Não é necessário repetir o enunciado.*
- *Certifique-se de ter se identificado em todas as folhas que usar.*
- **Não entregue** *seus rascunhos.*
- *Não é necessário devolver esta folha de questões.*
- *O resultado final será divulgado na secretaria de Pós-Graduação. Um roteiro para a solução deste exame será divulgado em breve no endereço:* `http://analiseaplicada.wordpress.com/`

Boa prova!

A. Saa & Y. Bozhkov

---

1. Considere as afirmações abaixo, que dizem respeito a mapas contínuos entre espaços métricos, $F : X \to Y$. Prove as que forem verdadeiras, e dê um contra-exemplo às que forem falsas.

   (a) A imagem $F(A)$ de todo conjunto fechado $A \subset X$ é fechado em Y.

   (b) A imagem $F(A)$ de todo conjunto compacto $A \subset X$ é compacto em Y.

   (c) Para F sobrejetora, a imagem $F(A)$ de todo conjunto denso $A \subset X$ será densa em Y.

2. Seja $\mathcal{CH}_M \subset \ell^2$ o subconjunto das seqüências $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2$ tais que $|x_n| \leq \frac{1}{n^M}$, sendo M um inteiro positivo. Introduzindo-se a métrica $d_2(x, y)$ induzida pela norma de ℓ^2, temos o espaço métrico $(\mathcal{CH}_M, d_2) \subset \ell^2$. Demonstre que $(\mathcal{CH}_M, d_2)$ é:

   (a) limitado (qual o seu diâmetro?);

   (Relembrando, o diâmetro de um espaço métrico (X, d) é dado por $\text{diam}(X) = \sup\{d(y, z) : y, z \in X\}$.)

   (b) fechado;

   (c) e compacto.

3. Considere $C^1[-1,1]$, o espaço das funções reais com derivada contínua no intervalo fechado $[-1,1] \in \mathbb{R}$, munido da norma do sup usual $||\cdot||_\infty$. Este espaço é Banach? Justifique e prove, em particular, se este espaço é ou não fechado com relação a essa norma.

4. Seja T um operador linear, limitado e auto-adjunto em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ **complexo**. Demonstre que, para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

$$|\langle x, (T-\lambda)x\rangle| \geq |\mathrm{Im}(\lambda)|||x||^2,$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. Suponha agora que para um certo $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, valha a igualdade para todo $x \in \mathcal{H}$. O que se pode concluir sobre T nesse caso?

5. Considere o operador linear A em ℓ^2 tal que $Ae_k = \sqrt{k}e_{k+1}$, sendo $\{e_k\}$ o conjunto ortonormal usual de ℓ^2 (e_k possui todas as entradas nulas, exceto a k-ésima, que será 1).

   (a) Demonstre que A não é contínuo.

   (b) Demonstre que o operador composto $A^\dagger A$ é auto-adjunto.

6. Seja $\mathcal{B}$ um espaço de Banach e $T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ um operador linear e limitado. Considere que T é uma contração, *i.e.*, $||Tx|| < ||x||$ para todo $x \in \mathcal{B}$ não nulo.

   (a) Demonstre que o operador $(\mathbb{I} - T)$ é invertível, sendo $\mathbb{I}$ o operador identidade.

   (b) Mostre que

$$\left(\mathbb{I} + \sum_{k=1}^{\infty}(T)^k\right) x = (\mathbb{I} - T)^{-1}x$$

   para todo $x \in \mathcal{B}$, sendo $(T)^n$ a enésima iteração do operador T, *i.e*, $(T)^n = \overbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}^{n \text{ vezes}}$.

MT403, Análise Numérica I
IMECC-UNICAMP

Exame de Qualificação

1. Escreva uma aproximação para $u'(x)$ pelo método de diferenças finitas fazendo uso dos valores $u(x)$, $u(x+h)$ e $u(x+2h)$ $(h>0)$ e responda:

   a) Qual é erro de truncamento local e a ordem da aproximação.

   b) Qual é a ordem máxima da aproximação que pode ser atingida pelo método de diferenças finitas para $u'(x)$ em uma aproximação envolvendo n quaisquer distintos pontos ? Justifique sua resposta usando argumentos de análise matemática/numérica.

2. Considere o problema estacionário com condições de contorno a seguir, sendo $u = u(x)$:

$$\begin{cases} u'' = f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = \alpha, \\ u(1) = \beta. \end{cases}$$

   Após definir os conceitos de consistência, estabilidade e convergência para um método de diferenças finitas no escopo desse problema linear, determine:

   a) Um método convergente de aproximação por diferenças finitas para o PVC acima que seja de segunda ordem.

   b) Considere a mesma EDO do PVC deste item, mas agora sujeita a condições de fronteira em $x = 0$ e $x = 1$ como sendo do tipo Neumann. Nesse contexto, existe alguma limitação teórica e/ou numérica para a resolução deste PVC reformulado ? Ilustre sua resposta com um exemplo numérico.

3. Considere um problema de valor inicial e de contorno associado a equação do calor, $u = u(x,t)$, como segue:

$$\begin{cases} u_t = cu_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \qquad c > 0, \\ u(x,0) = \eta(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0,t) = g_0(t), \quad t \geq 0, \\ u(1,t) = g_1(t), \quad t \geq 0. \end{cases}$$

   Diante do exposto, responda:

   a) Descreva um método por diferenças finitas para resolver o modelo diferencial para a equação do calor.

   b) Faça uma discussão sobre como determinar condições de estabilidade absoluta para método proposto no item a) (que é de sua livre escolha).

4. Considere a equação hiperbólica linear de advecção $u_t + cu_x = 0$, $t > 0$, $x \in [-\alpha, \alpha]$, $\alpha > 0$, sendo c um número real qualquer, sujeita a uma condição inicial compatível (considere fronteira livre ou periódica, por exemplo). Agora responda:

   a) Prove que o método FTCS (Forward in Time and Centered in Space) não é estável para quaisquer valores dos parâmetros de malha Δx e Δt. Dê um exemplo de um método numérico estável para o tratamento numérico deste problema de valor inicial.

   b) Utilize a análise das curvas características para mostrar quando os métodos upwind são estáveis.

   c) Após definir os conceitos da relação de dissipação e dispersão associadas a um método numérico discretizado por diferenças finitas para problemas hiperbólicos lineares, dê um exemplo de um método que exibe um caráter dissipativo e um outro que exibe um caráter dispersivo.

Exame de qualificação - Matrizes / 2017

Nome: ______________________________________ RA:___________________

Professor: Paulo J. S. Silva e Roberto Andreani

Instruções:

1. Não destaque as folhas deste caderno.
2. A prova consta de 4 questões. Verifique antes de começar a prova se o seu caderno de questões está completo.
3. A prova pode ser feita a lápis. Cuidado com a legibilidade.
4. Seja cuidadoso com a sua argumentação, pois a clareza do seu raciocínio também será avaliada.
5. Não é necessário apagar rascunhos no caderno de questões.
6. Folhas avulsas para rascunho devem ser entregues ao final junto com o caderno de questões.
7. Não é permitido a consulta a livros, apontamentos ou colegas.

DURAÇÃO DA PROVA: 3h50m

Questão 1

Um refletor sobre o Subespaço Vetorial S de $\mathbb{R}^n$ e definido pelo operador

$$A = 2P - I_n$$

Onde P é um projetor ortogonal sobre S.

(a) Mostrar com um gráfico em $\mathbb{R}^2$ que faz geometricamente este operador sobre um vetor u.

(b) Provar que: A é um refletor $\Leftrightarrow$ A é simétrica e ortogonal.

(c) Dê exemplo de um refletor importante e sua utilidade.

Questão 2

Discorra sobre os métodos para calcular autovalores e autovetores, destacando de maneira concisa suas principais caraterísticas e propriedades.

(a) Método das potências.

(b) Método da iteração inversa.

(c) Método do quociente de Rayleigh com deslocamento.

(d) Algoritmo QR.

Questão 3

Considere as seguintes classes de matrizes de $\mathbb{R}^{n\times n}$: matrizes simétricas, antisimétricas, ortogonais, idempotente ($A^2 = A$), $A^k = 0$ para $k < n$ e autoreflexiva ($A^2 = I$). Descreva, para cada classe, as características principais dos autovalores, da fatoração SVD e da diagonalização.

Questão 4

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não singular, provar que

$$\min \left\{ \frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} : \quad A + \delta A \;\; \text{singular} \;\; \right\} = \frac{1}{\kappa_2(A)}$$

Explicar o significado deste resultado.

PÓS–GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA
EXAME DE QUALIFICAÇÃO MARÇO/2017
MT 601
MÉTODOS COMPUTACIONAIS DE OTIMIZAÇÃO

Justifique todos os argumentos. Respostas sem justificativas **não** serão consideradas.

$\boxed{1}$ Encontre e classifique todos os pontos estacionários da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = (x_1^2 + x_2^2)^2 + 2(x_1^2 - x_2^2) + 1.$$

$\boxed{2}$ Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2$, onde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Dado $x^0 \in \mathbb{R}^n$, considere o **Método do Gradiente**:

Para todo $k = 0, 1, \ldots, \quad x^{k+1} = x^k - t_k \nabla f(x^k), \quad t_k \geq \bar{t} > 0.$

Suponha que $\lim x^k = x^*$.

(a) Prove que x^* é o minimizador de f mais próximo de x^0 na norma 2.

(b) Comente sobre a utilidade do resultado acima.

$\boxed{3}$ Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f, c \in C^2$ e o problema de otimização

Minimizar $f(x)$ sujeita a $c(x) \leq 0$.

Sejam $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda^0 \in \mathbb{R}^m_+$ e considere o **Método de Programação Quadrática Sequencial (PQS)**: Para $k = 0, 1, \ldots,$

- Defina d^k como a solução do problema quadrático
  Minimizar $\nabla f(x^k)^T d + \frac{1}{2} d^T H_k d$ sujeita a $c(x^k) + J_c(x^k)d \leq 0,$
  em que $H_k = \nabla^2 f(x^k) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k \nabla^2 c_i(x^k)$.
- Defina λ^{k+1} como o vetor de multiplicadores das restrições lineares do problema quadrático.
- $x^{k+1} = x^k + d^k$.

Suponha agora que $f(x) = x_1 + x_2$, $c(x) = x_1^2 - x_2$ e $x^0 = (0, 0)^T$.

(a) Se $\lambda^0 = 0$, por que o método PQS estabelecido acima falha?

(b) Se $\lambda^0 = 1$, verifique que haverá convergência rápida e justifique o comportamento obtido.

$\boxed{4}$ Sejam $f, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f, h \in C^2$, e considere o problema de otimização

Minimizar $f(x)$ sujeita a $h(x) = 0$.

(a) Escreva as condições necessárias de segunda ordem para um minimizador local.

(b) Escreva as condições suficientes de segunda ordem para um minimizador local.

(c) Indique um método numérico de otimização para resolver o problema acima, explicitando os detalhes para a sua aplicação: inicialização, iteração, resolução dos subproblemas, critérios de parada, etc.

(d) Para o método indicado em (c), descreva as hipóteses necessárias para a sua utilização e as condições que garantem a convergência para um minimizador.

Programação Linear - Exame de Qualificação - 24/03/17

Resolva somente quatro dos cinco exercícios abaixo.

1. Considere um problema de programação linear (PL) na forma:

$$\begin{array}{ll} \min & c^t x \\ \text{s. a} & Ax \leq b \\ & x \geq 0, \end{array}$$

em que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c, x \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

(a) Seja $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b\}$. S é convexo? Mostre ou dê um contraexemplo.

(b) Considere $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = (2, 2, 4)^t$ e $c = (-1, -1)^t$. Resolva o PL. Indentifique uma partição básica factível e aponte no gráfico. Exiba a solução ótima e o valor ótimo.

2. Considere um problema de programação linear (PL) na forma padrão. Considere, ainda, uma partição básica factível $A = [B, N]$. Suponha que esta partição básica não corresponda a uma solução ótima para o PL, ou seja, a condição de otimalidade do método simplex não é verificada ($c_N - A_N^t y < 0$). Defina a estratégia simplex para buscar uma nova solução para o PL.

3. Encontre o dual do dual do problema a seguir:

$$\begin{array}{ll} \min & c^t x \\ \text{s. a} & Ax = b \\ & Ex + s = u \\ & (x, s) \geq 0, \end{array}$$

4. Dado um ponto (x, y, z) interior e factível, mostre que as direções dx e dz no método de pontos interiores primal-dual afim escala são ortogonais.

5. Considere o seguinte problema de PL:

$$\begin{array}{lll} \max & \delta & \\ \text{s. a} & Ax + b\delta + w = e, & \\ & 0 \leq w \leq 2e, & \delta, x \text{ livres}, \end{array}$$

onde $\delta \in \Re, A \in \Re^{m \times n}, b, x, w, e$ são vetores com as dimensões apropriadas e $m > n$.

(a) Encontre o dual deste problema.

(b) Determine as condições de otimalidade para os problemas primal e dual.

(c) Escreva o sistema linear que determina as direções do método primal-dual.

(d) Encontre o sistema de equações normais através de eliminação de variáveis. Não se preocupe em desenvolver o lado direito das equações. Considere que A e E tem posto igual ao respectivo número de linhas.