Exame de Qualificação – Análise Aplicada
2.^{o} semestre de 2017 – 28/08/2017

Nome:____

RA:____

1.^{a} Questão. Considere o espaço métrico $(B[a,b],d)$ constituído pelo conjunto

$$B[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : \exists M_f \geq 0, \forall x \in [a,b], |f(x)| \leq M_f\}$$

das funções reais limitadas definidas no intevalo $[a,b]$ e pela métrica

$$d(f,g) = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|.$$

Mostre que este espaço métrico não é separável. (2.0 pontos)

2.^{a} Questão. Mostre que $\delta : C([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por $\delta(f) = f(0)$, é um funcional linear. Se $C([0,1])$ está equipado com a norma

$$\|f\|_\infty = \max_{0\leq x\leq 1} |f(x)|,$$

mostre que δ é limitado e calcule sua norma. Se $C([0,1])$ está equipado com a norma

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx,$$

mostre que δ é não limitado. (2 pontos)

3.ª Questão. Sejam X um espaço com produto interno e $M \subset X$. Mostre que $M^{\perp}$ é subespaço fechado de X. (2 pontos)

4.^{a} Questão. Seja $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de números complexos em l^{∞}. Para $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l^2$ defina o operador $T : l^2 \longrightarrow l^2$ por

$$(Tx)_n = c_n x_n.$$

a) Mostre que T é limitado.

b) Encontre T^*.

c) Encontre condições sobre (c_n) para que T seja auto-adjunto.

d) Encontre condições sobre (c_n) para que T seja unitário. (2 pontos)

5.^{a} Questão. Sejam M um espaço métrico compacto e $f : M \longrightarrow M$ uma função contínua. Mostre que o conjunto dos pontos fixos de f é compacto.

Exame de qualificação - Matrizes / 2º semestre, 2017

Nome: ______________________________________ RA:___________________

Professor: Paulo J. S. Silva e Roberto Andreani

Instruções:

1. Não destaque as folhas deste caderno.
2. Preencha o cabeçalho acima.
3. A prova consta de 4 questões. Verifique antes de começar a prova se o seu caderno de questões está completo.
4. A prova pode ser feita a lápis. Cuidado com a legibilidade.
5. Seja cuidadoso com a sua argumentação, pois a clareza do seu raciocínio também será avaliada.
6. Não é necessário apagar rascunhos no caderno de questões.
7. Folhas avulsas para rascunho devem ser entregues ao final junto com o caderno de questões.
8. Não é permitido a consulta a livros, apontamentos ou colegas.

DURAÇÃO DA PROVA: 9h-13h

Questão 1

Considere as fatorações de matrizes QR, LU e Cholesky. Apresente formalmente 3 problemas de álgebra linear que devem ser resolvidos preferencialmente por cada uma dessas fatorações justificando o porque a a fotoração escolhida é superior às outras em cada caso.

Questão 2

Discorra sobre fatores de crescimento em fatoração LU e sua relação com a estabilidade.

Questão 3

(a) Seja $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ seu conjuto de todos os autovalores. Mostre que A é diagonalizável se, e somente se,

$$\mathcal{N}(A - \lambda_1 I) \oplus \mathcal{N}(A - \lambda_2 I) \oplus \dots \oplus \mathcal{N}(A - \lambda_k I) = \mathbb{C}^n,$$

em que $\mathcal{N}(\cdot)$ denota o espaço nulo do argumento.

(b) Seja $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e (λ, v) um auto para de A. Se a multiplicidade algébrica de v é 2 enquanto a multiplicidade geométrica é apenas 1, mostre que existe $u \in \mathbb{C}^n$ tal que

$$(A - \lambda I)u = v.$$

Questão 4

Considere o problema de resolver

$$Ax = b,$$

em que A é uma matriz real, simétrica e definida positiva com decomposição espectral $A = Q\Lambda Q^t$. O método dos gradientes conjugados para resolução desse sistema é

$$\begin{aligned}
&x_0 = 0, r_0 = b, p_0 = r_0\\
&\texttt{para}\ \ k = 1, 2, 3, \ldots\\
&\quad \alpha_k = (r_{k-1}^t r_{k-1})/(p_{k-1} t A p_{k-1})\\
&\quad x_k = x_{k-1} + \alpha_k p_{k-1}\\
&\quad r_k = r_{k-1} - \alpha_k A p_{k-1}\\
&\quad \beta_k = (r_k^t r_k)/(r_{k-1}^t r_{k-1})\\
&\quad p_k = r_k + \beta_k p_{k-1}.
\end{aligned}$$

Prove que quando aplicamos o método dos gradientes conjugados para resolver o sistema $Ax = b$ e para resolver o sistema equivalente $\Lambda \bar{x} = Q^t b$ obtemos sequências x_k e $\bar{x}_k$ tais que

$$\bar{x}_k = Q^t x_k.$$

Explique porque esse resultado diz que para estudar o método dos gradientes conjugados basta considerar o caso de matrizes diagonais.

PÓS–GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA
EXAME DE QUALIFICAÇÃO SETEMBRO/2017
MT 601
MÉTODOS COMPUTACIONAIS DE OTIMIZAÇÃO

Justifique todos os argumentos. Respostas sem justificativas **não** serão consideradas.

$\boxed{1}$ Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$, tal que $x^* \in \mathbb{R}^n$ é o único ponto estacionário de f e é um minimizador local.
(a) Prove que se $n = 1$ então x^* é o minimizador global de f.
(b) Para $n = 2$ considere a função $f(x) = x_1^2 + x_2^2(x_1 + 1)^3$ e analise se a afirmação provada em (a) é verdadeira para $n > 1$.

$\boxed{2}$ Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$, tal que $\nabla^2 f(x)$ é não singular para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Seja $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e considere o **Método de Newton** com busca linear exata: Para $k = 0, 1, \ldots,$

$$\nabla^2 f(x^k)d^k = -\nabla f(x^k), \quad t_k = \arg\min_{t\in\mathbb{R}} f(x^k + t\, d^k), \quad x^{k+1} = x^k + t_k d^k.$$

Suponha que $\lim x^k = x^*$. Prove que:
(a) $\nabla f(x^*)^T[\nabla^2 f(x^*)]^{-1}\nabla f(x^*) = 0$.
(b) Se $\nabla^2 f(x^*) > 0$ então:
 (b1) x^* é um minimizador local estrito de f.
 (b2) $\lim t_k = 1$.

$\boxed{3}$ Resolva o seguinte problema de otimização

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x, y) \\ \text{s. a} & 0 \le x \le 1 \\ & 0 \le y \le 1 \end{array}$$

com $f(x, y) = g(x) - x^2 + y^2$, em que $g(x)$ é o valor ótimo do seguinte problema

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & z^2 + w^2 \\ \text{s. a} & 3z + w \ge x, \\ & z, w \ge 0. \end{array}$$

$\boxed{4}$ Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f, g \in C^1$, e considere o problema de minimizar $f(x)$ sujeita a $g(x) \le 0$. Seja (x^k) uma sequência de minimizadores locais das funções penalizadas $E_k(x) = f(x) + \dfrac{1}{\rho_k}\exp\{\rho_k\, g(x)\}$, onde $0 < (\rho_k) \to \infty$. Observe que a função de penalidade não é nula no conjunto viável. Prove que se x^* é um ponto de acumulação de (x^k) com $\nabla g(x^*) \neq 0$, então x^* é um ponto estacionário do problema original.

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
$\sum$	

ALUNO	RA

Exame de Qualificação – Equações Diferenciais – 1/setembro/2017

INSTRUÇÕES

Todas as questões valem 3.5 pontos. Escolha apenas três para resolver.

Questão 1. Considere a seguinte equação diferencial

$$2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + 5\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}u(x,y) + 2\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) = 0$$

Pede-se: (a) Classifique esta equação quanto ao tipo, (b) Obtenha as equações, curvas e coordenadas características, (c) Reduza a equação à sua forma canônica e (d) Obtenha, se possível, a solução geral.

Questão 2. Resolva o seguinte problema:

$$\text{Equação :} \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \ \text{ com } \ c > 0$$

$$\text{Condições Iniciais :} \begin{cases} u(x,0) = 1 & 0 < x < \ell \\ \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t)|_{t=0} = 0 & 0 < x < \ell \end{cases}$$

$$\text{Condições de Contorno :} \quad u(0,t) = 1 \ \text{ e } \ u(\ell,t) = 0$$

Questão 3. Se uma membrana circular de raio r_0 com fronteira fixa está sujeita a uma força periódica $F_0 \operatorname{sen} \omega t$ por unidade de massa, uniformemente distribuída sobre a membrana, então a função deslocamento $u(r,t)$ satisfaz à equação

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(r,t) = a^2\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}u(r,t) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}u(r,t)\right] + F_0 \operatorname{sen} \omega t$$

onde F_0, a^2 e ω são constantes positivas. Determine o deslocamento de modo que tenhamos uma solução periódica em t.

Questão 4. Para calcularmos a função de Green associada à equação de onda (três variáveis espaciais e uma temporal) é conveniente utilizar a metodologia das transformadas de Fourier. Introduzindo coordenadas esféricas, aproveitando a simetria do problema e após a integração nos ângulos, obtemos a seguinte representação integral para a função de Green (radial)

$$G(\vec{r}) = -\frac{1}{\pi r}\frac{d}{dr}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\xi r}}{\xi^2 - k^2} d\xi$$

onde k, r e ξ são reais. Obtenha a função de Green estacionária, isto é, calcule o valor principal de Cauchy.

Questão 5. Considere o seguinte sistema de Sturm-Liouville

$$\text{Equação :} \quad x\frac{d^2}{dx^2}y(x) - \frac{d}{dx}y(x) = \mu(x)$$

$$\text{Condições :} \quad y(0) = 0 = y(2)$$

Pede-se: (a) Classifique o sistema, (b) Escreva a equação satisfeita pela função de Green, $G(x|x')$, associada ao problema, (c) Mostre que a função de Green existe, (d) Calcule a função de Green e (e) Utilizando o item anterior resolva o problema para $\mu(x) = 1$.

Formulário, eventualmente, útil

- Série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) + a_k \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \right]$$

$$a_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx \qquad b_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx$$

- Equações de Bessel

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}y(x) + x\frac{d}{dx}y(x) + (x^2 - \mu^2)y(x) = 0 \qquad y(x) = A\,J_\mu(x) + B\,Y_\mu(x)$$

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}y(x) + x\frac{d}{dx}y(x) - (x^2 + \mu^2)y(x) = 0 \qquad y(x) = A\,I_\mu(x) + B\,K_\mu(x)$$

- Coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen}\theta \cos\phi \\ y &= r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

Boa Prova!