Prova de Admissão - Dezembro 2003
Pos-graduação Matemática Aplicada
DMA-IMECC-UNICAMP

Álgebra Linear

Questão 1:

(a) Sejam $u, v \in I\!R^n$ provar que

$$\|u\| = \|v\| \Longleftrightarrow (u+v)^T.(u-v) = 0$$

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Longleftrightarrow u^T.v = 0$$

(c) Seja $A \in I\!R^{m \times n}$ com $m < n$, $b \in I\!R^m$ e o sistema $Ax = b$, qual é a condição suficiente para que o sistema tenha solução unica.

Questão 2: Sejam $\{v_1, \ldots, v_p\}$ vetores de $I\!R^n$ com $p \leq n$ consideremos os seguintes subespaços

$$S = \{A \in I\!R^{n \times n} \mid Av_i = 0, i = 1, \ldots, p\}$$

$$G = ger\{v_1, \ldots, v_p\}$$

Deteminar a relação que existe entre a $Dim(S)$ e a $Dim(G)$.

Questão 3: Sejam $\{u_1, \ldots, u_p\}$ vetores ortonormais em $I\!R^n$, definimos

$$P = \sum_{i=1}^{p} u_i u_i^T$$

(a) Determinar o Nucleo e a Imagem de P

(b) Deteminar os autovalores e os autovetores associados de P.

(c) Dado $v \in I\!R^n$, Dizer que reprecenta geometricamente Pv .

Questão 4: Seja $A \in I\!R^{n \times n}$e $v \in I\!R^n$ Tal que $A^n = 0$ e $A^{n-1}v \neq 0$, mostre que $\{v, Av, \ldots, A^{n-1}v\}$ são LI.

Cálculo

Questão 1: seja $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ Provar que se

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} = 0$$

Então existe, $\xi \in [0,1]$ tal que $P(\xi) = 0$

Questão 2: Nas seguintes questões provar se é verdadeira ou achar um contraexemplo. Seja $f : [a,b] \to I\!R$ e $g : [a,b] \to I\!R$ funções duas vezes diferenciaveis

1. Se $c \in [a,b]$ e um minimizador global de f em $[a,b]$, então $f'(c) = 0$.
2. se $f'(2) = 0$, $f''(2) = 0$ o ponto $(2, f(2))$ é um ponto de inflexion da curva $y = f(x)$.
3. se f e g são crescentes em $[a,b]$ então $f.g$ e crescente em $[a,b]$.

Questão 3:

(a) dada a função $f(x) = \frac{1}{x}$, provar que a figura formada pelas retas tangente e normal à curva no ponto $x = 1$, e o eixo dos x, é um triângulo isósceles.

(b) dada uma função $f : I\!R \to I\!R \in C^\infty$, tal que $f(0) = L$ e $f'(x) < 0 \ \ \forall x \in [0, \infty)$, voce pode concluir que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$?

Questão 4: Seja $f : [a,b] \to I\!R$ continua e $g : [a,b] \to I\!R$ não negativa e integravel sobre $[a,b]$ provar que exite $\xi \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

As repostas não Justificadas não serão consideradas.