Exame de Qualificação em Matrizes - 04/03/2015

• Questão 1

Em cada item: demonstre se a afirmação for Verdadeira, caso seja Falsa, acrescente ou retire alguma informação, de modo a obter uma afirmação verdadeira. Justifique.
Considere a matriz $A : n \times n$.
a) A matriz $A = I + ww^t$ é simétrica definida positiva.
b) Se A_k tem posto k, $k < n$, tal que $\|A - A_k\|_2 = \beta \|A\|_2$, então, $\text{cond}_2(A) \geq \frac{1}{\beta}$.
c) Se A é projetor então $I - 2A$ é uma matriz ortogonal.
d) Se $A = QR$, Q ortogonal, R triangular superior com diagonal estritamente positiva, então $\|R\|_2 \leq \|G\|_2$, onde G é o fator de Cholesky de A^tA.
e) posto$(A) = 1$, se e somente se, $A = uu^t$, $u \in \mathbb{R}^n$, u não nulo.

• Questão 2

Considere a matriz $A : n \times n$ e seus fatores L e U. Denotando por $\rho = \dfrac{\max |u_{ij}|}{\max |a_{ij}|}$ o fator de crescimento para A, demonstre que $\rho \leq 2^{n-1}$ quando os fatores L e U são obtidos com estratégia de pivoteamento parcial.

• Questão 3

Considere a matriz $A : n \times n$ com autovalores distintos $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$ e autovetores associados v_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Considere o vetor $q = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i$.
a) O que acontece com o método das potências quando usamos q como vetor inicial, em aritmética exata?
b) O que ocorre, com suas conclusões acima, em aritmética de ponto flutuante (na presença de erros de arredondamento)?
Justifique detalhadamente.

• Questão 4

Considere uma matriz não nula $A : m \times n$ e posto $(A) = r$ e sua decomposição SVD $A = UDV^t$.
a) Demonstre que $A = \hat{U}\hat{D}\hat{V}^t$ (*forma condensada da SVD*), onde $\hat{U} : m \times r$. $\hat{D} : r \times r$ e $\hat{V} : n \times r$ tais que $\hat{U}$ e $\hat{V}$ são isometrias, $\hat{D}$ é diagonal, com elementos na diagonal $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$.
b) Demonstre que: A pode ser escrita na forma: $A = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j u_j v_j^t$.
c) Considerando $m > n$, usando a SVD de A e SVD condensada do item (a):
deduza a expressão geral para a solução de quadrados mínimos do sistema linear $Ax = b$;
a partir desta expressão geral, deduza a solução de norma–2 mínima. Justifique.

MÉTODOS COMPUTACIONAIS DE OTIMIZAÇÃO

MT601 Exame de Qualificação

Profs.: Sandra A. Santos e Paulo J. S. Silva Março/2015

1. Aplique o método de Newton para a minimização da função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \|x\|_2^3$ e mostre que ele converge *linearmente* para $x_* = 0$. Explique como esse fato está relacionando com o resultado de convergência super-linear ou quadrática, que é mais típico do método de Newton.

2. Sejam $c \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica definida positiva. Considere o par de problemas
$$\begin{array}{ll} \min & c^T x + \dfrac{1}{2}x^T H x \\ \text{s.a} & Ax \le b \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{ll} \min & h^T v + \dfrac{1}{2}v^T G v \\ \text{s.a} & v \ge 0, \end{array}$$
em que $G = AH^{-1}A^T$ e $h = AH^{-1}c + b$. Investigue a relação entre as condições KKT dos dois problemas.

3. Resolva
$$\begin{array}{ll} \min & f(x_1, x_2) \\ \text{s.a} & 0 \le x_1, x_2 \le 1 \end{array}$$
com $f(x_1, x_2) = g(x_1) - x_1^2 + x_2^2$, em que $g(x_1)$ é o valor ótimo da função objetivo do seguinte problema:
$$\begin{array}{ll} \min & u_1^2 + u_2^2 \\ \text{s.a} & u_1 + 2u_2 \ge x_1 \\ & u_1, u_2 \ge 0. \end{array}$$

4. Escolha e resolva **uma** das questões a seguir:

   I. Considere o problema
$$\begin{array}{ll} \min & f(x) = 2(x_1^2 + x_2^2 - 1) - x_1 \\ \text{s.a} & x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{array}$$

   (a) Prove que $x_* = (1, 0)^T$ é seu minimizador, com multiplicador de Lagrange associado $\lambda_* = 3/2$.

   (b) Suponha que $x_k = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)^T$, em que $\theta \approx 0$. Verifique que x_k é viável e próximo de x_*. Seja $\lambda_k = \lambda_*$. Formule e resolva o subproblema quadrático de *Programação Quadrática Sequencial* (PQS) no ponto (x_k, λ_k). Mostre que a solução para o passo em x é $s_k = (\operatorname{sen}^2\theta, -\operatorname{sen}\theta\cos\theta)^T$. Quem é o passo ξ_k para o multiplicador? Mostre que, se $x_{k+1} = x_k + s_k$, então $f(x_{k+1}) > f(x_k)$ e que x_{k+1} não é viável. Isso mostra que, mesmo próximo a uma solução, o passo completo ao longo da direção de Newton pode aumentar o valor de *qualquer* função de mérito, e é conhecido como *efeito Maratos*.

II. Considere o problema de otimização com uma única restrição

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) \\ \text{s.a} & g(x) \geq 0 \end{array}$$

em que $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções suaves. Transforme a restrição em uma igualdade, subtraindo o quadrado de uma variável de folga $s \in I\!R$.

(a) Escreva a função *Lagrangiano aumentado* $\mathcal{L}_\rho(x, s, \lambda)$ associada a esse novo problema.

(b) Determine uma fórmula de atualização para o multiplicador de Lagrange λ.

(c) Seja (x_*, λ_*) uma solução do problema original, e seja $s_* = \sqrt{g(x_*)}$. Prove que $\mathcal{L}_\rho(x_*, s_*, \lambda_*) = f(x_*)$, e que $\nabla_{x,s}\mathcal{L}(x_*, s_*, \lambda_*) = 0$.