

Exame de Qualificação de Análise Aplicada

07 de Março de 2014

Nome e RA:

Obs: Resolva 5 questões entre as 7 a seguir. **Prove ou justifique todas** as suas afirmações de maneira clara e objetiva.

1. Considere o espaço de todas as sequências convergentes $x = (\xi_i)$ com a métrica de ℓ^∞ , isto é, do sup. Esse espaço é completo?
2. Considere um subespaço arbitrário de dimensão finita $Y \subset X$, em que X é um espaço normado. Então Y pode ser aberto ou fechado em X ? Depende do que?
3. Seja Z um subespaço próprio de dimensão finita n de um espaço vetorial X . Seja também f um funcional linear em Z . Mostre que f pode ser linearmente estendida para todo o X , isto é, $\exists \tilde{f}$ sobre X tal que $\tilde{f}|_Z = f$.
4. Considere um elemento x de um espaço com produto interno X e seus coeficientes de Fourier $\langle x, e_k \rangle$ em que (e_k) é uma dada sequência ortonormal. Mostre que o número n_m de coeficientes de Fourier tais que $|\langle x, e_k \rangle| > 1/m$ deve satisfazer a desigualdade $n_m < m^2 \|x\|^2$. Com isso

entendemos que não devem existir muitos coeficientes de Fourier $\langle x, e_k \rangle$ que tenham grandes valores do seu módulo.

5. Seja H um espaço de Hilbert e $T : H \rightarrow H$ um operador linear limitado e bijetivo tal que seu inverso também é limitado. Seja T^* o adjunto de Hilbert de T . Mostre que $(T^*)^{-1}$ existe e que

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$$

Nota:

EXAME QUALIFICAÇÃO ANÁLISE NUMÉRICA
DOUTORADO EM MATEMÁTICA APLICADA - IMECC/UNICAMP

1º SEMESTRE 2014

Nome:

RA:

Prova Dissertativa
12 de Março

*Desenvolva **somente** 4 (quatro)*
entre as 6 (seis) questões elaboradas a seguir

<i>Questões</i>	<i>Pontos</i>
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
Questão 5	
Questão 6	
<i>T o t a l</i>	

Boa Prova

Questão 1.**(2.5 Pontos)**

Seja o problema de Poisson em duas dimensões, sendo $u = u(x, y)$,

$$\nabla^2 u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega = [0, 1] \times [0, 1], \quad (1)$$

sujeita a uma condição de contorno de Dirichlet,

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (2)$$

Considerando uma malha computacional igualmente espaçada ($\Delta x = \Delta y = h$) e as aproximações para o Laplaciano,

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= u_{xx} + u_{yy}, \\ u_{xx} &\approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

e

$$u_{yy} \approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}, \quad (4)$$

pede-se discutir e demonstrar, para a equação diferencial parcial (EDP) elíptica (1), com as aproximações (3)-(4):

- (a) Erro de truncamento local.
- (b) Erro Global.
- (c) Convergência.

Dica: A matriz “A” do problema de álgebra linear associado a discretização da EDP (1) com as aproximações (3)-(4) é simétrica, negativa-definida, e na norma-2 tem-se que:

$$\|A\|_2 = \rho(A) = \max_{1 \leq p, q \leq m} \{|\lambda_{p,q}|\},$$

sendo, $\lambda_{p,q}$ os autovalores, dados por:

$$\lambda_{p,q} = \frac{2}{h^2}[(\cos(p\pi h) - 1) + (\cos(q\pi h) - 1)], \quad p, q = 1, 2, \dots, m.$$

Questão 2.

(2.5 Pontos)

Considere o problema de valor inicial (PVI) formado pela equação diferencial parcial (EDP) de evolução, sendo $u = u(x, t)$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathfrak{R}, \quad t > 0, \quad (5)$$

com a condição inicial,

$$u(x, t_0) = \eta(x), \quad x \in \mathfrak{R}, \quad t_0 = 0, \quad (6)$$

sendo κ constante ($\kappa > 0$). Se $\kappa \equiv 0$ temos uma problema parabólico degenerado. Se $\kappa < 0$ temos uma problema mal-posto no sentido “clássico” de Hadamard (Jacques Salomon Hadamard).

Aplicando ao PVI (5)-(6) aproximações combinadas de diferenças finitas no tempo e no espaço (i.e., $U_j^n \approx u(x_j, t_n)$) pode-se obter o seguinte esquema geral, sendo $r \equiv \kappa \frac{k}{h^2}$ e supondo κ constante (por simplicidade):

$$-\alpha r U_{j-1}^{n+1} + (1 + 2\alpha r) U_j^{n+1} - \alpha r U_{j+1}^{n+1} = (1 - \alpha) r U_{j-1}^n + [1 - 2(1 - \alpha) r] U_j^n + (1 - \alpha) r U_{j+1}^n, \quad (7)$$

$$t_n = n k, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad x_j = j h, \quad j = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

onde $\alpha \in [0, 1]$, $k = \Delta t$ denota o passo de tempo e $h = \Delta x$ denota o espaçamento da malha.

Pede-se, com as devidas justificativas:

- Realize uma análise de estabilidade do esquema de diferença finitas (7)-(8) para o PVI (5)-(6), sabendo que $\alpha \in [0, 1]$. Observe que a relação de estabilidade pode envolver naturalmente os parâmetros k , h , κ e α .
- Supondo que para qualquer $\alpha \in [0, 1]$ sempre se tenha um esquema consistente e estável (seja este incondicionalmente estável ou condicionalmente estável), explique se o teorema de Lax-Richtmyer pode ser usado para estabelecer a conexão entre consistência e estabilidade para convergência do esquema geral (7)-(8) para o PVI (5)-(6).
- Note que do esquema geral (7)-(8) tem-se: $\alpha = 0$ resulta no esquema “avançado no tempo e centrado no espaço (FTCS)”, $\alpha = 1$ resulta no esquema “recuado no tempo e centrado no espaço (BTCS)”, e $\alpha = \frac{1}{2}$ resulta no esquema “Crank-Nicolson (CN)”. Assim, escreva a equação de diferenças finitas para cada um desses casos para o PVI (5)-(6) e indique se o esquema correspondente é explícito ou implícito. Além disso, utilize o resultado do item (a) para escrever a relação de estabilidade para os métodos FTCS, BTCS e CN.

Questão 3.**(2.5 Pontos)**

Considere o problema de valor de inicial (PVI) formado pela equação diferencial de primeira ordem,

$$u'(t) = f(u(t), t), \quad t > 0, \quad (9)$$

com condição inicial,

$$u(t_0) = u_0. \quad (10)$$

Um método linear de r -passos múltiplos para o PVI (9)-(10) tem a forma geral dada por,

$$\sum_{j=0}^r \alpha_j U^{n+j} = k \sum_{j=0}^r \beta_j f(U^{n+j}, t_{n+j}). \quad (11)$$

Pede-se, com as devidas justificativas,

- Escreva a forma geral dos polinômios característicos $\rho(\xi)$ e $\sigma(\xi)$, associados ao método linear de r -passos múltiplos (11) para o PVI (9)-(10).
- Escreva a definição de estabilidade-zero para métodos lineares de r -passos múltiplos.
- Deduzza os métodos de Euler avançado, Euler recuado, e Leapfrog (ponto médio).
- Para um método linear de r -passos múltiplos da forma (11), a região de estabilidade absoluta é definida pela aplicação deste método para na equação diferencial de primeira ordem (9), com $f(u(t), t) = \lambda u$, que resulta em,

$$\sum_{j=0}^r \alpha_j U^{n+j} = k \sum_{j=0}^r \beta_j \lambda U^{n+j}, \quad (12)$$

e que pode ser reescrito como,

$$\sum_{j=0}^r (\alpha_j - z\beta_j) U^{n+j}, \quad z = k\lambda. \quad (13)$$

Escreva os polinômios-estabilidade da forma,

$$\pi(\xi, z) = \rho(\xi) - z\sigma(\xi),$$

e esboce a região de estabilidade absoluta (no plano complexo) para os métodos de Euler avançado, Euler recuado, e Leapfrog (ponto médio).

Questão 4.**(2.5 Pontos)**

Se aplicarmos um método de passo único ao PVI,

$$u'(t) = \lambda u(t), \quad t > 0, \quad (14)$$

com condição inicial,

$$u(t_0) = u_0, \quad (15)$$

tipicamente obtém-se uma equação da forma,

$$U^{n+1} = R(z)U^n,$$

onde $R(z)$ é alguma função de estabilidade com $z = k\lambda$; tipicamente um polinômio para um método explícito ou uma função racional para um método implícito.

Pede-se, com as devidas justificativas,

- (a) Mostre que os dois métodos de “série de Taylor de 4ª ordem” e “Runge-Kutta de 4ª ordem”, quando aplicados ao PVI teste (14)-(15), produzem a mesma função $R(z)$.

Dica: O método de Runge-Kutta de 4ª ordem é dado por:

$$\begin{aligned} Y_1 &= U^n, \\ Y_2 &= U^n + \frac{1}{2}kf(Y_1, t_n), \\ Y_3 &= U^n + \frac{1}{2}kf\left(Y_2, t_n + \frac{k}{2}\right), \\ Y_4 &= U^n + kf\left(Y_3, t_n + \frac{k}{2}\right), \\ U^{n+1} &= U^n + \frac{k}{6}\left[f(Y_1, t_n) + 2f\left(Y_2, t_n + \frac{k}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + 2f\left(Y_3, t_n + \frac{k}{2}\right) + f(Y_4, t_n + k)\right] \end{aligned}$$

- (b) Se um método é consistente, então $R(z)$ será uma aproximação de e^z para z próximo de zero. Além disso, se esse método é de p -ésima ordem, então,

$$R(z) - e^z = O(z^{p+1}), \quad \text{quando } z \rightarrow 0.$$

Explique porque a função $R(z)$ para os métodos do item (a) concordam com e^z para $O(z^4)$, quando $z \rightarrow 0$.

Questão 5.

(2.5 Pontos)

Considere o problema de valor inicial (PVI) formado pela equação diferencial parcial (EDP) de evolução linear, sendo $u = u(x, t)$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathfrak{R}, \quad t > 0, \quad (16)$$

com a condição inicial,

$$u(x, t_0) = \eta(x), \quad x \in \mathfrak{R}, \quad t_0 = 0, \quad (17)$$

sendo a constante ($a \neq 0$). A equação (16) é o exemplo mais simples de uma equação hiperbólica, e a solução exata é dada por,

$$u(x, t) = \eta(x - at). \quad (18)$$

Isto significa que o dado inicial (17) é transladado de forma inalterada e com velocidade a para a direita (se $a > 0$) e para a esquerda (se $a < 0$). Para $a = 0$ a solução é $u(x, t) = \eta(x), \forall t > 0$. A EDP (17) é também conhecida como a equação de advecção linear, que modela problemas que exibem propagação de ondas.

Para o PVI (16)-(17), temos ainda que o valor de $u(x, t)$ é constante ao longo de cada curva característica $x - at = x_0$, sendo x_0 o domínio de dependência do ponto (x, t) para a EDP (16). No caso linear aqui discutido tal curva é uma reta com inclinação constante.

Considerando uma discretização no espaço-tempo como segue,

$$t_n = nk, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad x_j = jh, \quad j = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

onde $k = \Delta t$ denota o passo de tempo e $h = \Delta x$ denota o espaçamento da malha, temos então neste caso que sobre um único passo de tempo resulta:

$$u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j - ak, t_n). \quad (20)$$

Traçando a característica como indicado em (20) de volta no tempo por um único passo de tempo k , a partir do ponto da malha x_j , resulta na interpretação geométrica indicada na Figura 1. Se $0 < ak/h < 1$, então o ponto $x_j - ak$ pertence entre os pontos x_{j-1} e x_j ,

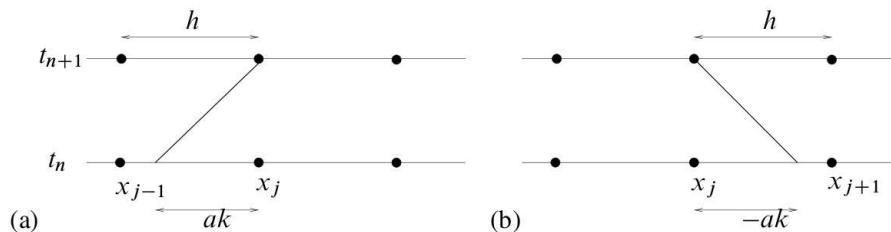


Figura 1: Curva característica “discreta”.

Questão 5. (continuação)**(2.5 Pontos)**

como é visto na Figura 1(a). Se $-1 < ak/h < 0$, temos a situação ilustrada na Figura 1(b), com o ponto $x_j - ak$ pertencendo entre os pontos x_j e x_{j+1} . Temos assim que a Figura 1 ilustra como podemos utilizar a solução analítica (18) como base para construção de um método numérico pelo cálculo de uma aproximação para (20) baseada em uma interpolação dos pontos da malha e próximos do ponto U_j^n . Por exemplo, realizando uma interpolação linear simples entre os pontos U_{j-1}^n e U_j^n , sendo $a > 0$, resulta em:

$$p(x) = U_j^n + (x - x_j) \left(\frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{h} \right). \quad (21)$$

Note que avaliando o ponto $x_j - ak$ na fórmula de interpolação (21) e definindo (naturalmente) $p(x_j - ak)$ como U_j^{n+1} , obtemos o método upwind $O(k) + O(h)$:

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + a \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{h} = 0, \quad \text{se } a > 0. \quad (22)$$

Repetindo os passos acima para $a < 0$, com os pontos de interpolação U_j^n e U_{j+1}^n , resulta no método upwind $O(k) + O(h)$:

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + a \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{h} = 0, \quad \text{se } a < 0, \quad (23)$$

Para obter uma melhor aproximação para o PVI (16)-(17), pode-se utilizar então a solução analítica (18) como base para construção de um método numérico pelo cálculo de uma melhor aproximação para (20) baseada em uma interpolação com mais pontos da malha e próximos do ponto U_j^n .

Neste contexto, pede-se, com as devidas justificativas,

- (a) Supondo que $|ak/h| \leq 1$, defina um polinômio quadrático $p(x)$ pela interpolação dos valores da malha U_{j-1}^n , U_j^n e U_{j+1}^n , e então defina U_j^{n+1} por $p(x_j - ak)$ para obter o método de Lax-Wendroff $O(k^2) + O(h^2)$ para a equação de advecção linear (16).
- (b) Suponha agora que $0 \leq ak/h \leq 2$ (i.e., uma situação onde $a > 0$ para a equação de advecção linear (16)). Defina então um outro polinômio quadrático $p(x)$ pela interpolação dos valores da malha U_{j-2}^n , U_{j-1}^n e U_j^n , defina U_j^{n+1} por $p(x_j - ak)$ para obter o método de Beam-Warming $O(k^2) + O(h^2) + O(hk)$ para o caso $a > 0$, para a equação de advecção linear (16).
- (c) Para cada um dos esquemas explícitos de Lax-Wendroff (item a) e Beam-Warming (item b) é possível escolher parâmetros k (passo de tempo) e h (espaçamento da malha) de tal forma que a solução obtida concorda exatamente com a solução analítica (18). Isso não é um “chute”, mas uma escolha adequada com base no resultado (20), como rigorosamente previsto pela teoria (18). Explique qual é essa escolha adequada para k e h para cada um dos esquemas explícitos de Lax-Wendroff e de Beam-Warming. Faça também uma interpretação geométrica (via curva característica no plano $x-t$) do mesmo tipo como na Figura 1.

Questão 6.

(2.5 Pontos)

Considere o problema de valor inicial (PVI) formado pela equação diferencial parcial (EDP) de evolução linear, sendo $u = u(x, t)$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathfrak{R}, \quad t > 0, \quad (24)$$

com a condição inicial,

$$u(x, t_0) = \eta(x) = e^{-20(x-2)^2} + e^{-(x-5)^2}, \quad x \in \mathfrak{R}, \quad t_0 = 0, \quad (25)$$

sendo a constante ($a \neq 0$). A EDP (24) é conhecida como a equação de advecção linear, que é o exemplo mais simples de uma equação hiperbólica, cuja solução exata é dada por,

$$u(x, t) = \eta(x - at). \quad (26)$$

A solução exata (26) revela que o dado inicial (25) é transladado de forma inalterada e com velocidade a para a direita (se $a > 0$) e para a esquerda (se $a < 0$).

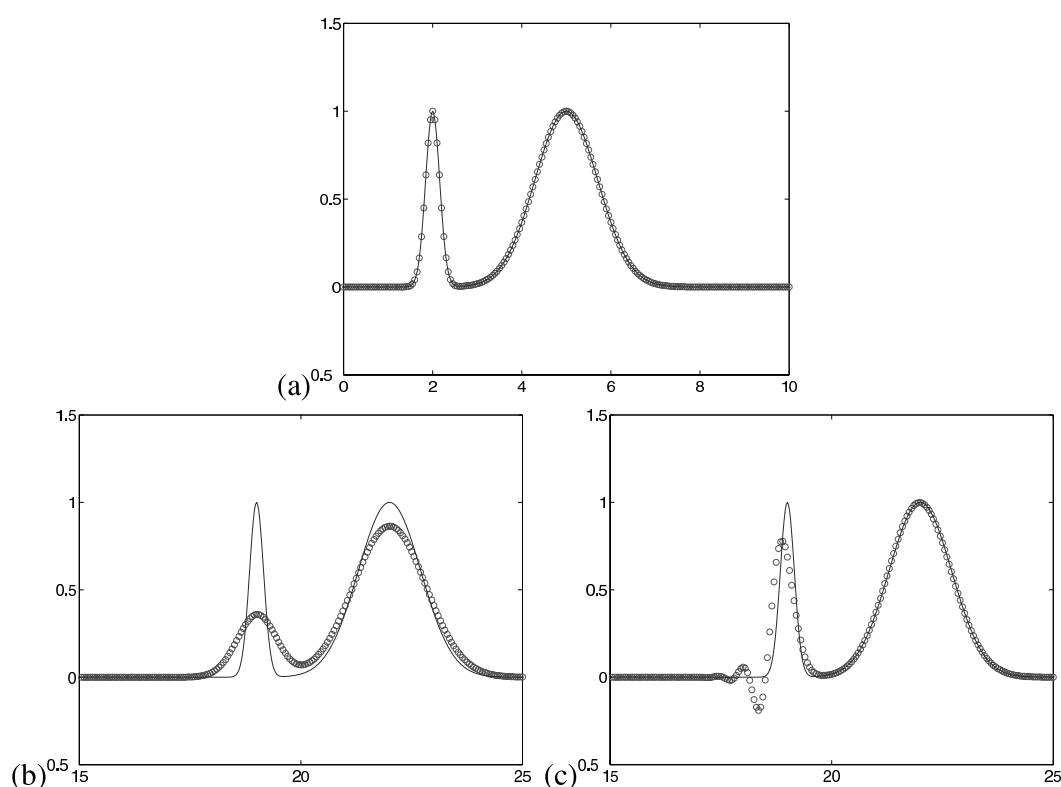


Figura 2: (a) Condição inicial $u(x, 0) = e^{-20(x-2)^2} + e^{-(x-5)^2}$. Para um tempo $t^* > 0$, temos as soluções numéricas: (b) Upwind e (c) Lax-Wendroff. A solução exata (26) é também mostrada em linha sólida nos mesmos gráficos para ambos os métodos.

A Figura 2(a) mostra o dado inicial (25). Desta forma, um bom método numérico para o PVI (24)-(25) deve ter a propriedade de preservar a “forma” da condição inicial (25) com

Questão 6. (continuação)**(2.5 Pontos)**

“velocidade” de propagação a para qualquer tempo $t > 0$. Considerando uma discretização no espaço-tempo como segue,

$$t_n = nk, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad x_j = jh, \quad j = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

onde $k = \Delta t$ denota o passo de tempo e $h = \Delta x$ denota o espaçamento da malha, e aplicando ao PVI (24)-(25) aproximações de diferenças finitas no tempo e no espaço, pode-se obter (supondo $a > 0$) os seguintes métodos explícitos Upwind e Lax-Wendroff, respectivamente:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{ak}{h} (U_j^n - U_{j-1}^n), \quad (28)$$

e

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{ak}{2h} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{a^2 k^2}{2h^2} (U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n). \quad (29)$$

Na Figura 2(b) é mostrada a solução numérica do PVI (24)-(25) para um tempo $t^* > 0$ com o método Upwind (28), enquanto que na Figura 2(c) é mostrada a solução numérica para o mesmo problema com o método Lax-Wendroff (29). Para os dois métodos utilizou-se uma velocidade de propagação $a = 1$ com os parâmetros de malha $h = 0.05$ e $k = 0.8h$, o que resulta em um número de Courant $ak/h = 0.8$.

Os resultados mostrados na Figura 2 revelam claramente que o método Upwind (28) exibe um caráter de uma equação de advecção-difusão (Figura 2(b)), que é diferente do método Lax-Wendroff (29), que exibe um caráter de uma equação de advecção-dispersão (Figura 2(c)).

Neste contexto, pede-se, com as devidas justificativas,

- (a) Determine a equação diferencial parcial modificada associada ao método Upwind (28), mantendo os termos $O(k)$, para k/h fixo.
- (b) Determine a equação diferencial parcial modificada associada ao método Lax-Wendroff (29), mantendo os termos $O(k^2)$, para k/h fixo.
- (c) Realize uma análise via transformada de Fourier das equações modificadas obtidas no itens (a) e (b), imediatamente acima, para obter a relação de dispersão associada a cada um dos métodos Upwind (28) e Lax-Wendroff (29). Utilize então esses resultados para explicar a natureza dos resultados mostrados na Figura 2.
- (d) Para cada uma das equações diferenciais parciais modificadas obtidas nos itens (a) e (b) é possível escolher um número de Courant adequado de tal forma que essas equações modificadas concordem exatamente com a EDP original (24). Assim, exiba e explique qual é essa escolha adequada para o número de Courant. Note que isso também não é um “chute”, mas uma escolha conveniente dos parâmetros k e h que pode ser totalmente justificada com base no resultado obtido no item (c).

Esquema de Beam-Warming para ($a > 0$)

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{ak}{2h} (3U_j^n - 4U_{j-1}^n + U_{j-2}^n) + \frac{a^2k^2}{2h^2} (U_j^n - 2U_{j-1}^n + U_{j-2}^n).$$

Interpolação polinomial de grau n - método de Lagrange

$$p(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \left[\prod_{i=0; i \neq k}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} \right]$$

**Qualificação – Biomatemática –
12/Março/2014**

1.	
2.	
3.	
Σ	

Nome: _____

R.A.: _____

Não desgrampear a prova. Justifique suas respostas. BOA PROVA!

1ª QUESTÃO: Um modelo para sistema hospedeiro-parasita é dado por

$$\begin{cases} H_{t+1} = FH_t \left(1 + \alpha \frac{P_t}{b}\right)^{-b} \\ P_{t+1} = H_t - \frac{H_{t+1}}{F}, \end{cases}$$

onde F , α e b são constantes positivas.

1.a) Encontre os estados estacionários. (1,0 ponto)

1.b) Determine a estabilidade dos pontos estacionários. (2,0 pontos)

2ª QUESTÃO: Considere o modelo

$$\frac{dN}{dt} = rN(K - N)(N - M),$$

onde $r > 0$ e $0 < M < K$.

2.a) Expresse a taxa de crescimento intrínseco $g(N)$ como polinômio e determine os coeficientes a_1 , a_2 e a_3 . (1,0 ponto)

2.b) Determine os estados estacionários e a estabilidade de cada um deles. (1,0 ponto)

3ª QUESTÃO: Considere o modelo de Ludwig para descrever população de vermes de folhas de pinheiros, dado por

$$\frac{d}{dt}N = r_B N \left(1 - \frac{N}{k_B}\right) - \frac{BN^2}{A^2 + N^2},$$

onde N é o número de vermes; r_B e k_B são taxa intrínseca de crescimento e capacidade de suporte (total de folhas novas); e B e A são taxa de predação máxima e número crítico de vermes no comportamento predatório.

3.a) Explique cada componente da equação. (1,0 ponto)

3.b) Obtenha um sistema adimensionalizado (dica: $u = N/A$, $\tau = Bt/A$, $r = Ar_B/B$ e $q = k_B/A$). (1,0 ponto)

3.c) Obtenha pontos de (ou equações que determinem) equilíbrio. (1,0 ponto)

3.d) Obtenha equações paramétricas para que haja exatamente duas soluções positivas, e como podem ser utilizadas para desenhar diagrama de bifurcação. (2,0 pontos)



Exame de Qualificação
Equações Diferenciais Parciais
12 de Março de 2014

Nome: _____ RA: _____

Questão 1. [2.5 pontos] Considere a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, y) + y \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x, y) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y}u(x, y) = 0$$

com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

a) Classifique-a quanto ao tipo; b) Na região de hiperbolicidade, reduza-a à forma canônica e c) No caso do item anterior, integre-a.

Questão 2. [2.5 pontos] No estudo de populações de células com estrutura de tamanho encontramos a seguinte equação diferencial parcial

$$x \frac{\partial}{\partial t}u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}u(x, t) = 0$$

cuja solução satisfaz as condições $u(x, 0) = 0$ e $u(0, t) = t$.

a) Classifique a equação e as condições e b) Utilize a metodologia da transformada de Laplace para obter a solução do problema, isto é, equação diferencial e condições.

Questão 3. [2.5 pontos] Considere o seguinte problema, composto pela equação diferencial

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x, t)$$

com $c^2 > 0$ e as condições $u(x, 0) = 1$ para $0 < x < 1$; $u(0, t) = 1$; $u(1, t) = 0$ e $\frac{\partial}{\partial t}u(x, t)|_{t=0}$ para $0 < x < 1$.

a) Classifique a equação e as condições e b) Resolva-o.

Questão 4. [2.5 pontos] Obtenha uma solução “explícita” do problema

$$\begin{cases} (\partial_t + c\partial_x)u = -u & x > 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = H(x) - H(1-x) \end{cases}$$

onde c é uma constante positiva, e H a função de Heaviside,

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

e interprete o resultado como propagação de um sinal.

Justifique todas as suas respostas!

1. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde A $n \times n$ é não singular e a fatoração LU de A .

- (a) Discuta a existência e unicidade da fatoração.
- (b) Descreva a estratégia de pivoteamento parcial aplicada à fatoração e à resolução do sistema linear.
- (c) Suponha agora que A é simétrica definida positiva. Que método direto (fatoração) você usaria neste caso para resolver o sistema linear? Novamente discuta a existência e unicidade dessa fatoração e a aplicação à resolução do sistema linear.

2. Considere o problema de quadrados mínimos

$$\text{Min}_x \|Ax - b\|_2^2, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m \geq n.$$

- (a) Mostre que resolver este problema é o mesmo que resolver o sistema linear normal

$$A^T Ax = A^T b.$$

- (b) Mostre que, se $\text{posto}(A) = n$, o problema acima possui uma única solução e que, se $\text{posto}(A) < n$, o problema possui infinitas soluções.
- (c) Suponha agora que $\text{posto}(A) = n$ e considere a fatoração QR de A , onde $Q : m \times m$ é ortogonal e $R : m \times n$ é triangular superior. Descreva como obter a solução e o resíduo do problema acima via QR .

3. Descreva o método QR para estimar os autovalores de uma matriz A $n \times n$. Considere também a versão QR com *shift* e aspectos de implementação do método.

4. Seja A uma matriz de dimensão $m \times n$. Considere a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^t & 0 \end{bmatrix}.$$

Encontre a relação entre os valores singulares de A e os autovalores de M .

MÉTODOS COMPUTACIONAIS DE OTIMIZAÇÃO

MT601

Exame de qualificação

Profs.: Sandra Augusta Santos e Roberto Andreani

Março/2014

1. Considere o problema de otimização

$$\text{Min } f(x) \quad \text{s.a } h(x) = 0, \quad (1)$$

em que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $f, h \in C^2$. Suponha que x^* é um ponto regular, minimizador local do problema (1) com multiplicadores de Lagrange $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$, e o par (x^*, λ^*) cumpre as condições suficientes de segunda ordem para (1). Considere também o problema perturbado

$$\text{Min } f(x) \quad \text{s.a } h(x) = c, \quad (2)$$

em que o lado direito $c \in \mathbb{R}^m$ é dado.

- (a) Prove que existem $\delta > 0$ e uma curva $x(c)$ continuamente diferenciável dependendo de $c \in B(0, \delta)$, bola em torno da origem e de raio δ , tal que $x(0) = x^*$ e $x(c)$ é solução do problema (2).
- (b) Prove que

$$\left. \nabla_c f(x(c)) \right|_{c=0} = -\lambda^*.$$

2. Considere o seguinte problema

$$\text{Min } \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \quad \text{s.a } (x_1 + x_2 - 2)^2 = 0. \quad (3)$$

- (a) Ache a solução graficamente.
- (b) Verifique as condições KKT no ótimo. Caso não seja possível, explique porque e escreva um problema exatamente equivalente que as verifique.
- (c) Aplique penalização quadrática pura e mostre que a solução do subproblema existe; verifique o que acontece com a sequência gerada quando o parâmetro tende a ∞ .
- (d) No método de penalidade quadrática pura aplicado a um problema em que o conjunto viável é regular, existe uma expressão que tende aos multiplicadores do problema original quando o parâmetro tende a ∞ ; explique o que acontece com esta expressão para o problema (3).

3. Considere $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + b^T x + c$ com $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica definida positiva. Seja $S \in \mathbb{R}^{n \times m}$ uma matriz de posto completo, com $m < n$. Mostre que, dado $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, o vetor

$$x^* = \bar{x} - S(S^T Q S)^{-1} S^T \nabla f(\bar{x})$$

é solução do problema

$$\text{Min } f(x) \quad \text{s.a } x \in \{\bar{x} + S\gamma \mid \gamma \in \mathbb{R}^m\}.$$

4. Explique, de maneira resumida, o método de Lagrangianos aumentados, comparando-o com a penalidade quadrática pura.

MT503 - Programação Linear - Exame de Qualificação - 2014

Nome:

RA:

1. Uma empresa extrai um único tipo de minério e precisa determinar sua estratégia de produção para os próximos 3 meses. Suponha que:

- A demanda por minério (em ton) a cada mês i seja dada por d_i , $i = 1, \dots, 3$.
- A capacidade de extração (em ton) no mês i seja dada por u_i , $i = 1, \dots, 3$.
- O custo por tonelada extraída normalmente no mês i seja dado por c_i , $i = 1, \dots, 3$.
- Seja possível armazenar até m toneladas de minério, a um custo de e reais por ton., por mês.
- A mineradora possa entregar parte da demanda do mês i no mês $i + 1$, a um custo adicional de p_i reais por tonelada entregue em atraso.
- Não haja minério estocado no início do período.
- Seja necessário manter um estoque de v toneladas ao final dos 3 meses.

Formule o problema de modo a minimizar o custo.

2. Seja $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Definimos os poliedros $P^0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Mx \leq b, x \geq 0\}$ e $P = \{(x, x^r) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid Mx + Ix^r = b, x \geq 0, x^r \geq 0\}$. Prove que \bar{x} é vértice de P^0 se, e somente se, $(\bar{x}, b - M\bar{x})$ é vértice de P . Use, necessariamente, esse fato para encontrar todos os vértices do poliedro

$$\begin{array}{rcccc} -z_1 & -z_2 & +z_3 & & = & -2 \\ & +z_2 & & +z_4 & = & +2 \end{array} \quad \text{e } z \geq 0.$$

3. Obtenha a solução ótima do problema abaixo aplicando o método simplex com duas fases. Ao final do método, forneça a solução ótima e o valor da função objetivo.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & -2x_1 \quad -x_2 \\ \text{s.a.} & -x_1 \quad +2x_2 \geq 3 \\ & 3x_1 \quad +4x_2 \geq 11 \\ & \quad \quad \quad x_2 \leq 4 \\ & x_1, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

4. Considere que o problema de programação linear abaixo tem valor ótimo finito:

$$\begin{array}{ll} \min & c'x \\ \text{s.a.} & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array} \quad (\text{P})$$

Mostre que ele tem um conjunto de soluções ótimas limitado se, e somente se, existe p tal que $A'p < c$.

Dica: Mostre inicialmente que existe p tal que $A'p < c$ se, e somente se, existem $(\bar{p}, \bar{\alpha})$ tais que $A'\bar{p} + \bar{\alpha}c < -e$, $\bar{\alpha} < 0$. O vetor e é o vetor de uns.

Dica2: Uma dificuldade que você pode ter é controlar o sinal do $\bar{\alpha}$. Isso pode ser feito lembrando que ao descrever o conjunto de soluções ótimas de (P) como um poliedro a restrição associada ao valor ótimo pode ser escrita tanto com igualdade como com uma desigualdade.

5. Considere o problema abaixo, cuja solução ótima tem x_1 e x_2 como variáveis básicas.

$$\begin{array}{rllll} \text{Minimizar} & -x_1 & -x_2 & & \\ \text{s.a.} & 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 6 \\ & x_1 & +2x_2 & & +x_4 = 4 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \geq 0 \end{array}$$

Usando análise de sensibilidade, responda as perguntas abaixo.

- (a) Para qual intervalo de b_1 a base ótima permanece a mesma?
- (b) Qual seria a solução ótima se b_2 valesse 1?
- (c) Para qual intervalo de c_1 a solução ótima permanece a mesma?
- (d) Imagine que seja possível incluir uma nova variável, x_5 , com coeficiente 2 na primeira equação e coeficiente 1 na segunda equação (ou seja, $A_5 = [2 \ 1]^T$). Para quais valores de c_5 a solução ótima dada acima permaneceria a mesma?

6. Esse exercício contém dois itens:

- (a) Considere um problema de programação linear na forma

$$\begin{array}{ll} \min & c'x \\ \text{s.a.} & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{array}$$

com conjunto viável limitado. Mostre que um ponto de sua trajetória central é centro analítico de um poliedro obtido a partir dos dados do problema acima, isto é, envolvendo A , b e c .

- (b) Mostre através de um exemplo que o centro analítico de um poliedro na forma $\{x \mid Ax \leq b\}$ depende da descrição do poliedro, isto é depende da escolha específica da matriz A e do lado direito b .



1 Dada uma função $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sua Transformada de Laplace $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Descreva como a Transformada de Fourier pode ser utilizada para computar a Transformada de Laplace.

2 Considere o sinal discreto real $[s_1, s_2, s_3, s_4]$.

(a) Compute a Transformada de Fourier Discreta (DFT) de s .

(b) Para que valores de s_j ($j = 1, 2, 3, 4$) a DFT é real?

3 Seja $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$ com transformada de Fourier $\hat{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$ dada por

$$\hat{u}(\omega) = \begin{cases} \sin(\pi|\omega|/\Omega), & |\omega| \leq \Omega, \\ 0, & |\omega| > \Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega > 0$.

(a) Esboce o gráfico de \hat{u} e determine $u(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(b) Considere a amostra de u , $u_n = u(n\Delta t)$, $n \in \mathbb{Z}$ e $\Delta t > 0$. Analise a reconstrução do sinal $u(t)$ através do Teorema de Shannon.

(c) Se \hat{u} for usada como um filtro, qual será a sua atuação?

4 Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t) = 0$ para $|t| > T > 0$ e $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$ a Transformada de Fourier de f .

(a) Seja $S > T$ e considere os coeficientes c_n , $n \in \mathbb{Z}$, da série de Fourier de f no intervalo $[-S, S]$. Qual é a relação entre os c_n e \hat{f} ?

(b) Utilize o resultado do item (a) para mostrar que se f é de banda limitada, isto é, $\hat{f}(\omega) = 0$ para $|\omega| > \Omega > 0$, então f é a função identicamente nula.